Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2008-09

Davide Guidetti

Un problema inverso per un'equazione delle onde lineare astratta

7 maggio 2009

Abstract

We consider an abstract linear integrodifferential hyperbolic problem, with an unknown scalar convolution kernel. This lack of information is compensated by the knowledge, for any time, of a certain expression, depending on the solution u and on the kernel k. Under suitable assumptions, we prove a result of global existence and uniqueness of the pair (u, k). k is determined in the class of bounded variation (not necessarily continuous) functions. The abstract results are applied to some concrete hyperbolic systems, and in these concrete cases, the aforementioned expression is a certain flux through the boundary.

In questo seminario illustrerò alcuni risultati che ho ottenuto sul problema inverso della ricostruzione di un nucleo di convoluzione in un'equazione di evoluzione integrodifferenziale lineare. In passato mi ero occupato prevalentemente del caso di un'equazione di tipo parabolico (vedi [**?**]). Qui considererò una versione astratta di un problema misto di tipo iperbolico.

Il sistema di cui vorrei parlare è il seguente:

$$
(1) \qquad \begin{cases} u''(t) = Au(t) + k * (Bu + r)(t) + f(t), \\ t \in (0, T), \\ u(0) = u_0, \\ u''(0) = u_1, \\ \Phi_0(u(t)) + \Phi_1(k * u)(t) + k * J(t) = h(t), \\ t \in (0, T), \end{cases}
$$

nelle incognite u e k. Qui (vedremo nel seguito delle ipotesi più precise) A è un operatore non limitato, generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta, B è un operatore lineare con "peso confrontabile" con quello di A, Φ_0, Φ_1 sono funzionali lineari di dominio $X_2 = D(A)$. L'ultima condizione in (**??**) dovrebbe consentire di identificare k assieme a u. Osserviamo che il problema della determinazione della coppia (u, k) è non lineare, in quanto nella prima e nell'ultima equazione compare la convoluzione $k * u$ con entrambi i fattori incogniti.

Passo ora a descrivere brevemente altri lavori dedicati a problemi analoghi, sia di tipo concreto che astratto. Per semplicità mi limiterò a considerare equazioni lineari nella u.

A mia conoscenza, il primo articolo in cui si tratta un problema astratto simile a (**??**) è dovuto a Grasselli-Kabanikhin-Lorenzi (1990) ([**?**]), che hanno studiato il sistema

$$
(2) \qquad \begin{cases} u''(t) = Au(t) + \int_0^t h(t-s)Au(s)ds + f(t), \\ u(0) = u_0, \\ u'(0) = u_1, \\ \Phi[u(t)] = g(t). \end{cases}
$$

La principale differenza tra (??) e (??) è la "condizione supplementare" costituita dall'ultima equazione. Il fatto che in (??) compaia esplicitamente in essa la convoluzione $k * u$ consente di considerare funzionali più generali definiti solo in X_2 (con alcune limitazioni), mentre, per un problema di tipo (??), si è più o meno obbligati a prendere il funzionale Φ definito su tutto lo spazio base X_0. Sottolineo, tuttavia, che la versione di (??) considerata in [?] non è un caso particolare della versione che considereremo di (??), in quanto chiederemo che $\Phi_1 \neq 0$. [?] contiene un risultato di esistenza locale di una soluzione e di unicità globale. Le ipotesi sono abbastanza forti da garantire l'esistenza (almeno per tempi piccoli) di un nucleo k di classe C^1.

Il caso della determinazione di nuclei a valori operatoriali (di cui non ci occuperemo) è stato trattato da M. Grasselli in [?].

Casi particolari di problemi misti al contorno sono stati considerati da Grasselli-Kabanikhin-Lorenzi (1992) ([?]) e da Janno ([?]).

Vengo ora al problema che ha ispirato la mia trattazione astratta. Tale problema è stato inizialmente considerato da M. Grasselli in ([?]) (1994). Si tratta del sistema

$$
(3) \qquad \begin{cases}
u_{tt}(t,x) = \Delta_x u(t,x) + \int_0^t k(t-s)\Delta_x u(s,x)ds + F(t,x), \\
t \in (0,T), x \in \Omega, \\
u(t,x') = G(t,x'), t \in (0,T), x' \in \partial\Omega, \\
u(0,x) = U_0(x), x \in \Omega, \\
u_t(0,x) = U_1(x), x \in \Omega, \\
\int_{\partial\Omega} D_\nu u(t,x')d\sigma(x') + \int_{\partial\Omega} k * D_\nu u(t,x')d\sigma(x') = L(t), \\
t \in (0,T),
\end{cases}
$$

ovviamente nelle incognite U e k. Nel suo articolo, M. Grasselli prova l'esistenza e l'unicità di una soluzione in un intervallo "piccolo" (ricordiamo ancora che il problema è non lineare). Il nucleo k è identificato nella classe $W^{1,1}(0,\tau)$, per qualche $\tau \in (0,T]$. Torneremo nel seguito al problema (??).

Voglio, infine, citare il lavoro [?] di Lorenzi-Sinestrari (2007). Questi autori hanno considerato un problema astratto del tipo (??) e hanno provato l'esistenza e l'unicità di una soluzione globale (u,k). È interessante il fatto che il nucleo k, invece che nella classe $W^{1,1}(0,\tau)$, è stato determinato nella più vasta classe delle funzioni continue e a variazione limitata. La ricerca in questo spazio permette di indebolire un poco le ipotesi di regolarità di dati e coefficienti.

Il problema astratto (??) che andiamo a considerare ha il sistema (??) come caso particolare. Rispetto al lavoro di Grasselli:

1. saremo in grado di provare l'esistenza di una soluzione globale, per di più in un quadro astratto applicabile ad altri problemi;

2. lavoreremo con ipotesi che, nel caso particolare del problema (??), sono più deboli di quelle del lavoro [?]. Tali ipotesi consentiranno di determinare un nucleo k, solo a variazione limitata e non necessariamente continuo.

Supporremo allora quanto segue:

(H1) X_0, X_1, X_2 *sono spazi di Banach, con* $X_2 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow X_0$ *(immersioni continue). Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione in* X_j $(j \in \{1,2\})$ *convergente a* x *in* X_0 *e limitata in* X_j*, chiediamo che* $x \in X_j$*.*

(H2) $A, B \in \mathcal{L}(X_2, X_0)$*. L'operatore*

$$\begin{cases} \mathcal{A} : X_2 \times X_1 \to X_1 \times X_0, \\ \mathcal{A}(u,v) = (v, Au) \end{cases} \tag{4}$$

è generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo $(e^{t\mathcal{A}})_{t\geq 0}$ *in* $X_1 \times X_0$*.*

(H3) $u_0, u_1 \in X_2$*.*

(H4) $r \in W^{1,\infty}(0,T;X_0)$*,* $f \in W^{2,1}(0,T;X_0)$*.*

(H5) $u_2 := Au_0 + f(0) \in X_1$*.*

(H6) $h \in W^{1,1}(0,T)$, $h' \in BV([0,T])$.

(H7) $\Phi_0, \Phi_1 \in X_2'$.

(H8) Se $x_j \in X_j$ $(j \in \{0,1\})$, *indichiamo con* $S(t)x_0 + C(t)x_1$ *la prima componente di* $e^{t\mathcal{A}}(x_1, x_0)$. *Chiediamo che esistano* $C_0 \in \mathbb{R}^+$, $p \in (1,\infty]$, *tali che,* $\forall (x_2, x_1) \in X_2 \times X_1$,

$$\|\Phi_0[C(.)x_2 + S(.)x_1]\|_{L^p(0,T)} \leq C_0(\|x_2\|_{X_1} + \|x_1\|_{X_0}).$$

(H9) $J \in W^{1,\infty}(0,T)$, $\Phi_0(u_0) = h(0)$, $\Phi_1(u_0) + J(0) \neq 0$.

L'ipotesi (H2) è sostanzialmente equivalente a richiedere che l'operatore A sia il generatore infinitesimale di una funzione coseno astratta (vedi [**?**]).

Il principale risultato astratto è :

Teorema 1. *Supponiamo che valgano le ipotesi (H1)-(H9). Allora il problema (**??**) ammette una soluzione* (u,k) *tale che*

$$u \in \bigcap_{j=0}^{2} W^{3-j,\infty}(0,T;X_j), \qquad k \in BV([0,T]). \tag{5}$$

Se , per $i = 1,2$, (u_i, k_i) *sono soluzioni di (**??**), entrambe appartenenti a* $\bigcap_{j=0}^{2} W^{3-j,\infty}(0,T; X_j) \times BV([0,T])$, *allora*

$$u_1(t) = u_2(t), \quad \forall t \in [0,T], \quad k_1(t) = k_2(t), \quad \textit{a. e. in } [0,T].$$

Qualche osservazione sulla dimostrazione Il problema principale consiste nel fatto che k è incognita e, se pensiamo a (**??**) come a un sistema nell'incognita k, otteniamo un'equazione integrale di Volterra di prima specie. La strategia fondamentale (comune a quasi tutti i problemi di questo tipo) è derivare l'equazione rispetto a t. Se poniamo $v := u'$, otteniamo il nuovo sistema

$$
(6) \qquad \begin{cases}
v''(t) = Av(t) + k(t)(Bu_0 + r(0)) \\
+k * (Bv + r')(t) + f'(t), \ a. \ e. \ in \ (0,T), \\
v(0) = u_1, \\
v'(0) = u_2, \\
\Phi_0(v(t)) + k(t)[\Phi_1(u_0) + j(0)] \\
+\Phi_1(k * v(t)) + k * j'(t) = h'(t), \ a. \ e. \ in \ (0,T).
\end{cases}
$$

in cui, sotto condizioni ragionevoli, k è soluzione di un sistema di equazioni di Volterra di seconda specie. Inoltre, (**??**) contiene alcuni termini di convoluzione che possono essere stimati usando il seguente risultato, che non sono riuscito a trovare nella letteratura:

Teorema 2. *Siano* $k \in BV([0,T])$ *(a valori scalari),* $z \in L^\infty(0,T;Z)$*, con* Z *spazio di Banach. Allora* $k * z \in W^{1,\infty}(0,T;Z)$*.*

Ricordo che in generale $W^{1,\infty}(0,T;Z)$ costituisce una classe più ristretta della classe coincide delle funzioni lipschitziane. I due spazi coincidono se vale la così detta proprietà di Radon-Nikodym. Nel citato lavoro di Lorenzi-Sinestrari si usa il risultato più debole che, se $k \in BV([0,T])$ e $z \in C([0,T];Z)$, $k * z \in W^{1,\infty}(0,T;Z)$. dimostrato da Sinestrari ([**?**]), che è sufficiente nel loro caso.

Per quanto riguarda l'esistenza globale, la si ottiene come conseguenza della seguente semplice osservazione, riportata per la prima volta in [**?**]. Supponiamo che una certa soluzione (u,k) sia data nell'intervallo $[0,\tau]$, con $\tau < T$. Poniamo

$$U := u_{[0,\tau]}, K := u_{[0,\tau]},$$

$$u_\tau(t) := u(\tau + t), k_\tau(t) := k(\tau + t).$$

Allora si può facilmente verificare che, per $t \in [0, \tau \wedge (T-\tau)]$, (u_τ, k_τ) risolve un sistema lineare della forma

$$
(7) \qquad \begin{cases} u_\tau''(t) = Au_\tau(t) + K * Bu_\tau + k_\tau * BU + \hat{F}(t), \\ u_\tau(0) = U(\tau), \\ u_\tau'(0) = U'(\tau), \\ \Phi_0(u_\tau(t)) + \Phi_1(k_\tau * U + K * u_\tau)(t) \\ +k_\tau * J(t) = \hat{h}(t). \end{cases}
$$

Per un sistema di tale tipo si può provare un risultato di esistenza globale, che permette di estendere (U, K) all'intervallo $[0, T \wedge (2\tau)]$. Se vale $2\tau < T$, il metodo si può iterare e con un numero finito di passi si arriva a costruire una soluzione su $[0, T]$.

Veniamo ora a presentare qualche applicazione del risultato astratto. Cominciamo col problema (**??**). Introduciamo a questo proposito le seguenti ipotesi.

(K1) Ω *è un sottoinsieme aperto e limitato di* $\mathbb{R}^n$*, che giace su un solo lato della sua frontiera* $\partial\Omega$*, sottovarietà di* $\mathbb{R}^n$ *di classe* C^2*.*

(K2) $F \in W^{2,1}(0, T; L^2(\Omega))$*;*

(K3) $G \in H^3(0, T; L^2(\partial\Omega)) \cap H^2(0, T;\ H^1(\partial\Omega)) \cap C^1([0, T]; H^{3/2}(\partial\Omega))$*.*

(K4) U_0*,* $U_1 \in H^2(\Omega)$*,* $\Delta_x U_0 + F(0) \in H^1(\Omega)$*.*

(K5) Se indichiamo con γ *l'operatore di traccia su* $\partial\Omega$*, si ha*

$$
\begin{aligned} \gamma U_0 = G(0), \gamma U_1 = G'(0), \\ \gamma(\Delta_x U_0 + F(0)) = G''(0). \end{aligned}
$$

(K6) $L \in W^{1,\infty}(0, T)$*,* $L' \in BV([0, T])$*.*

(K7)$\int_{\partial\Omega} D_\nu U_0(x') d\sigma(x') = L(0) \neq 0$*.*

Si ha allora:

Teorema 3. *Supponiamo che le ipotesi (K1)-(K7) siano soddisfatte. Allora il sistema (**??**) ammette una soluzione (U, k), tale che*

$$U \in \bigcap_{j=0}^{2} W^{3-j,\infty}(0,T; H^j(\Omega)), \tag{8}$$

$$k \in BV([0,T]). \tag{9}$$

*Se, per $i = 1,2$, (U_i, k_i) sono soluzioni (**??**), entrambe appartenenti a $\bigcap_{j=0}^{2} W^{3-j,\infty}(0,T; H^j(\Omega)) \times BV([0,T])$, allora*

$$U_1(t) = U_2(t), \quad \forall t \in [0,T],$$

$$k_1(t) = k_2(t), \quad a.\ e.\ in\ [0,T].$$

Diamo qualche idea della dimostrazione. Si comincia col ridursi al caso di condizioni al contorno nulle, considerando preliminarmente la soluzione Z del problema

$$\begin{cases} Z_{tt}(t,x) = \Delta_x Z(t,x) + F(0,x), & t \in (0,T), x \in \Omega, \\ Z(t,x') = G(t,x'), & t \in (0,T), x' \in \partial\Omega, \\ Z(0,x) = U_0(x), & x \in \Omega, \\ Z_t(0,x) = U_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{10}$$

Ponendo $u := U - Z$, ci si riduce a un problema della forma (**??**), con

$$X_0 = L^2(\Omega), \quad X_1 = H_0^1(\Omega), \quad X_2 = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

$$A : X_2 \to X_0, Au = \Delta u.$$

$$\Phi_0 : X_2 \to \mathbb{C}, \quad \Phi_0(u) = \int_{\partial\Omega} u(x) d\sigma(x).$$

Esaminiamo l'ipotesi (H8) del teorema **??**. Nel nostro caso, si richiede quanto segue: consideriamo la soluzione V del problema di Cauchy

$$\begin{cases} V_{tt}(t,x) = \Delta_x V(t,x), & (t,x) \in [0,T] \times \Omega, \\ V(t,x) = 0, & (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega, \\ V(0,x) = V_0(x), & x \in \Omega, \\ V_t(0,x) = V_1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

con $V_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $V_1 \in H_0^1(\Omega)$. È noto che ammette un'unica soluzione $V \in \bigcap_{j=0}^2 C^{2-j}([0,+\infty); H^j(\Omega))$. Consideriamo l'applicazione

$$\Phi_0(V)(t) := \int_{\partial\Omega} D_\nu V(t,x) d\sigma(x).$$

Per poter applicare il teorema **??**, questa dovrebbe soddisfare la seguente stima, per qualche $p > 1$:

$$\|\Phi_0(V)\|_{L^p(0,T)} \leq C(\|V_0\|_{H^1(\Omega)} + \|V_1\|_{L^2(\Omega)}).$$

Ciò non è ovvio, perché, se $V_0 \in H_0^1(\Omega)$ e $V_1 \in L^2(\Omega)$, non è neppure chiaro se $\Phi_0(V)$ sia definita, poiché sappiamo solo che $V \in C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Ebbene, una delle idee principali di [**?**] è applicare un bel risultato dovuto a Lasiecka, J. L. Lions, Triggiani ([**?**]). Essi hanno provato che

$$\|D_\nu V\|_{L^2(0,T;L^2(\partial\Omega))} \leq C(\|V_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|V_1\|_{L^2(\Omega)}),$$

che implica, chiaramente, quanto voluto, con $p = 2$.

Presentiamo una seconda applicazione. Consideriamo il problema

$$
(11) \qquad \begin{cases}
U_{tt}(t,x) = \Delta_x U(t,x) + \int_0^t k(t-s)\Delta_x U(s,x)ds \\
+F(t,x), t \in (0,T), x \in \Omega, \\
\\
D_\nu U(t,x') + b(x')U(t,x') = 0, t \in (0,T), x' \in \partial\Omega, \\
\\
U(0,x) = U_0(x), x \in \Omega, \\
\\
U_t(0,x) = U_1(x), x \in \Omega, \\
\\
\int_{\partial\Omega} D_\nu U(t,x')d\sigma(x') + \int_{\partial\Omega} k * D_\nu U(t,x')d\sigma(x') \\
\qquad = L(t), t \in (0,T),
\end{cases}
$$

in cui abbiamo sostituito la condizione al contorno di (**??**), con una condizione di tipo Neumann omogenea. Supporremo che valgano le seguenti ipotesi:

(L1) Ω è un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^n$, che giace su un solo lato della sua frontiera $\partial\Omega$, sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di classe $C^{2+\alpha}$, per qualche $\alpha \in (1/2, 3/2)$.

(L2) $F \in W^{2,1}(0,T; H^\alpha(\Omega))$;

(L3) $b \in C^{\alpha+1/2}(\partial\Omega)$ ed è a valori reali;

(L4) U_0, $U_1 \in H^{2+\alpha}(\Omega)$, $D_\nu U_0 + b\gamma U_0 = D_\nu U_1 + b\gamma U_1 = 0$ su $\partial\Omega$;

(L5) $U_2 := \Delta U_0 + F(0) \in H^{1+\alpha}(\Omega)$ e $D_\nu U_2 + b\gamma U_2 = 0$;

(L6) $L \in W^{1,\infty}(0,T)$, $L' \in BV([0,T])$.

(L7) $\int_{\partial\Omega} D_\nu U_0(x')d\sigma(x') = L(0)$, $\int_{\partial\Omega} D_\nu U_1(x')d\sigma(x') \neq 0$.

Allora, applicando ancora il teorema **??**, si può provare il seguente

Teorema 4. *Supponiamo che siano soddisfatte le ipotesi (L1)-(L7). Allora il sistema (**??**) ammette una soluzione (U, k), tale che*

$$U \in \bigcap_{j=0}^{2} W^{3-j,\infty}(0,T; H^{j+\alpha}(\Omega)), \tag{12}$$

$$k \in BV([0,T]). \tag{13}$$

*Se, per $i = 1, 2$, (U_i, k_i) sono soluzioni di (**??**), entrambe appartenenti a $\bigcap_{j=0}^{2} W^{3-j,\infty}(0,T; H^{j+\alpha}(\Omega)) \times BV([0,T])$, allora*

$$U_1(t) = U_2(t), \quad \forall t \in [0,T],$$

$$k_1(t) = k_2(t), \quad a.\ e.\ in\ [0,T].$$

Cenno alla dimostrazione del teorema ??. È chiaro che ci si può limitare a provare il risultato nel caso di k monotona non decrescente. La prima osservazione è che, per il teorema di rappresentazione di Riesz, esiste una misura di Borel ν in $[0,T]$ tale che per ogni $f \in C([0,T])$

$$\int_0^T f(s)dk(s) = \int_0^T f(s)d\nu(s).$$

Si verifica abbastanza facilmente che, se $t \in [0,T]$ e k è continua a destra in t, si ha

$$\nu([0,t]) = k(t) - k(0).$$

La funzione z, che supponiamo misurabile (a valori nello spazio di Banach Z e limitata) può essere modificata su un insieme di misura nulla in modo da ottenere una funzione misurabile rispetto alla $\sigma-$algebra dei boreliani (funzione di Borel). Acquista allora un senso la definizione della funzione

$$\begin{cases} g : [0,T] \to Z, \\ \\ g(t) := \int_{[0,t]} z(t-s)d\nu(s). \end{cases}$$

Si può verificare che g è misurabile secondo Lebesgue e limitata. Facciamo ora vedere che vale la formula

$$k * z(t) = \int_0^t [k(0)z(s) + g(s)]ds. \tag{14}$$

che implica, evidentemente, la conclusione. Infatti, si può vedere che la funzione $(s,r) \to z(t-s)\chi_+(t-s)$ è di Borel in $[0,T] \times [0,T]$ (con χ_+ funzione caratteristica di $[0,+\infty)$) e che la $\sigma-$algebra dei boreliani $\mathcal{B}([0,T] \times [0,T])$ coincide con la $\sigma-$algebra prodotto $\mathcal{B}([0,T]) \bigotimes \mathcal{B}([0,T])$. Allora, utilizzando il teorema di Fubini per la misura prodotto $L_1 \bigotimes \nu$, con L_1 misura di Lebesgue, si ha

$$\int_0^t g(s)ds = \int_0^t (\int_{[0,s]} z(s-r)d\nu(r))ds = \int_{[0,t]} (\int_r^t z(s-r)ds)d\nu(r)$$

$$= \int_{[0,t]} (\int_0^{t-r} z(s)ds)d\nu(r) = \int_{[0,t]} (\int_{[0,t-s]} d\nu(r))z(s)ds = \int_0^t [k(t-s)-k(0)]z(s)ds.$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che k è continua a destra quasi dappertutto rispetto a L_1.

Riferimenti bibliografici

[1] F. Colombo, D. Guidetti *A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev Spaces*, Math. Models Methods Appl. Sci. **17** (2007), 537-565.

[2] M. Grasselli, *An Identification Problem for an Abstract Linear Hyperbolic Integrodifferential Equation with Applications*, Jour. Math. Anal. Appl. **171** (1992), 27-60.

[3] M. Grasselli, *On an inverse problem for a linear hyperbolic integrodifferential equation*, Forum Math. **6** (1994), 83-110.

[4] M. Grasselli, S. I. Kabanikhin, A. Lorenzi, *An inverse hyperbolic integro-differential problem arising in Geophysics I*, Sib. Mat. J. **33** (1992), 415-426.

[5] M. Grasselli, S. I. Kabanikhin, A. Lorenzi, *An inverse hyperbolic integro-differential problem arising in Geophysics II*, Nonlinear Analysis **15** (1990), 283-298.

[6] D. Guidetti, *Reconstruction of a bounded variation convolution kernel in an abstract wave equation,* in corso di stampa su Forum Math..

[7] J. Janno : *On an inverse problem for a hyperbolic equation*, Tartu Riikl. Ül. Toimetised **672** (1984), 40-46.

[8] Kisyński J., *On cosine operator functions and one-parameter groups of operators*, Studia Math. **44** (1972), 93-105.

[9] I. Lasiecka , J. L. Lions, R. Triggiani, *Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators*, J. Math. Pures Appl. **65** (1986), 149-192.

[10] A. Lorenzi, E. Sinestrari, *Identifying a BV-kernel in a hyperbolic integrodifferential equation*, preprint (2007).

[11] E. Sinestrari, *An integrodifferential wave equation*, Adv. Diff. Eq. **11** (2006), 751-779.