

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico 2007-08

Ermanno Lanconelli

COSTRUZIONE DI GRUPPI DI LIE ASSOCIATI AD
OPERATORI DI HÖRMANDER. APPLICAZIONI AD
EQUAZIONI DI KOLMOGOROV-FOKKER-PLANCK

7 febbraio 2008

ABSTRACT

If $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2 + X_0$ is a Hörmander partial differential operator in \mathbb{R}^N , we give sufficient conditions on the X_j 's for the existence of a Lie group structure $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$, not necessarily nilpotent, such that \mathcal{L} is left invariant on \mathbb{G} . We also investigate the existence of a global fundamental solution Γ for \mathcal{L} , providing results ensuring a suitable left invariance property of Γ . Examples are given for operators \mathcal{L} to which our results apply: some are new, some appear in recent literature, usually quoted as Kolmogorov-Fokker-Planck type operators.

Lavoro in collaborazione con ANDREA BONFIGLIOLI

1. PRESENTAZIONE DEL PROBLEMA

Sia

$$(1) \quad \mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2 + X_0$$

un operatore di Hörmander in \mathbb{R}^N . Con questo intendiamo dire che gli X_j sono operatori differenziali del primo ordine in \mathbb{R}^N , con coefficienti regolari, soddisfacenti la condizione di rango massimo

$$(H) \quad \dim(\text{Lie}\{X_0, X_1, \dots, X_m\}(x)) = N, \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Comè ben noto, questa condizione implica la *ipoellitticità* di \mathcal{L} (Hörmander [19, Theorem 1.1]). Negli ultimi decenni, molto lavoro sono stati dedicati agli operatori (1), per la loro rilevanza sia teorica che applicativa. Tuttavia, a parte i lavori fondamentali di Folland [17] e di Rothschild e Stein [36], la maggiore attività è stata dedicata agli operatori *somma di quadrati* $\sum_{j=1}^m X_j^2$ e alla loro controparte *parabolica*

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^m X_j^2 - \partial_t,$$

si vedano [16, 20, 25, 26, 27, 28, 38, 39]. D'altra parte, operatori alle derivate parziali, lineari e del secondo ordine, che compaiono come operatori di Kolmogorov di equazioni stocastiche, come modelli differenziali in Finanza Matematica e nella visione umana e artificiale, nei moti per curvatura Browniani, nelle equazioni *phase-noise* di tipo Fokker Planck, si presentano tutte nella forma più generale (1) (si vedano [1, 2, 12, 13, 14, 15, 31, 32, 35, 41]).

Quando \mathcal{L} in (1) è *invariante a sinistra* e *omogeneo* di grado due su di un gruppo di Lie stratificato (quindi *nilpotente*) in \mathbb{R}^N , avente dimensione omogenea $Q \geq 3$, dai risultati di Folland in [17], si ottengono teoremi di regolarità *massimale* L^p . Precisamente: se $1 < p < \infty$ e $\mathcal{L}u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, allora

$$X_i X_j u \in L^p(\mathbb{R}^N), \quad \text{for every } i, j = 1, \dots, m.$$

In generale, in assenza di una struttura di gruppo omogeneo soggiacente l'operatore \mathcal{L} , Rothschild e Stein hanno dimostrato una versione *locale* della precedente stima L^p [36], utilizzando il celebre metodo di *lifting e approssimazione*, che consente di applicare la teoria di Folland allo studio delle proprietà locali degli operatori di Hörmander in forma generale. Infatti, il Teorema di Lifting si può descrivere nei termini seguenti. Sia $\{X_i\} = \{X_0, X_1, \dots, X_m\}$ un sistema di campi vettoriali in \mathbb{R}^N verificanti la condizione del rango (H), e sia $x_0 \in \mathbb{R}^N$ un punto arbitrariamente fissato. Allora, in un intorno U di x_0 , il sistema $\{X_i\}$ può essere *liftato* in un altro sistema di campi vettoriali $\{\widehat{X}_i\}$ definito in un aperto $\widehat{U} \subseteq \mathbb{R}^{N+p}$, con $p \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, in modo tale che gli \widehat{X}_i risultino localmente approssimabili mediante campi vettoriali Y_i invarianti a sinistra e omogenei su di gruppo di Lie stratificato (in realtà *libero*) in \mathbb{R}^{N+p} .

Con Andrea Bonfiglioli ci siamo prefissi lo scopo di ottenere stime di regolarità L^p *globali e massimali*, in assenza di strutture omogenee. Più precisamente, ci siamo posti i seguenti problemi :

(P1) Dato un sistema $\{X_0, X_1, \dots, X_m\}$ di campi vettoriali in \mathbb{R}^N verificanti la condizione del rango (H), esiste un gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$, non necessariamente omogeneo ne' nilpotente, tale che gli X_i generino l'algebra di Lie di \mathbb{G} (e quindi $\mathcal{L} = \sum_{j=1}^m X_j^2 + X_0$ sia invariante a sinistra \mathbb{G})?

(P2) Esiste una funzione non negativa γ , di classe C^∞ in nel complementare di $\{0\}$ tale che

$$\Gamma(x, y) := \gamma(y^{-1} * x), \quad x, y \in \mathbb{R}^N, \quad x \neq y$$

sia una soluzione fondamentale globale di \mathcal{L} ?

Risultati come in (P1) and (P2), insieme con opportune stime all'infinito di γ e delle sue derivate seconde $X_i X_j \gamma$ ($i, j = 1, \dots, m$), consentono di sviluppare una teoria globale L^p per \mathcal{L} . Infatti, se γ é la funzione in (P2), allora

$$-\mathcal{L}(\varphi * \gamma) = \varphi, \quad \text{per ogni funzione test } \varphi.$$

Qui $*$ indica la convoluzione in \mathbb{G} , il gruppo di Lie Lie in (P1).

Di conseguenza, ponendo $u := \varphi \star \gamma$, si ha $\mathcal{L}u = -\varphi$, da cui segue la formula di rappresentazione

$$X_i X_j u = (\text{p.v.}) f \star X_i X_j \gamma + c_{i,j} f,$$

dove le $c_{i,j}$ sono opportune costanti reali.

Si possono quindi ottenere stime L^p per \mathcal{L} utilizzando la teoria degli integrali singolari di tipo Calderón-Zygmund negli *spazi quasi-metrici non omogenei*, recentemente sviluppata da Bramanti in [9], ove viene esteso ai generali spazi quasi-metrici *non-doubling* un notevole risultato di Nazarov, Treil and Volberg [33, 34] (si veda anche la monografia [40]).

Questo approccio alla regolarità massimale L^p è stata recentemente seguito in [11], ove l'operatore di Ornstein-Uhlenbeck degenera

$$(2) \quad \mathcal{L}_0 = \text{trace}(A D^2) + \langle Bx^T, D \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

è stato studiato come controparte stazionaria dell'operatore di Kolmogorov

$$(3) \quad \mathcal{K} = \mathcal{L}_0 - \partial_t.$$

In (2), A e B indicano matrici $N \times N$ costanti e reali, con $A \geq 0$. Ricordiamo che \mathcal{K} si può scrivere come in (1) e che \mathcal{K} è ipoellittico se e solo se A and B hanno la particolare forma a blocchi mostrata per la prima volta in [30]. In questo caso, l'operatore \mathcal{K} è invariante a sinistra su un opportuno gruppo di Lie in \mathbb{R}^{N+1} , ed ha una soluzione fondamentale globale $\Gamma(z, \zeta)$ che si scrive come in (P2), se $\text{traccia}(B) = 0$.

Lo scopo principale del nostro lavoro è consistito nel determinare una classe di operatori di Hörmander soddisfacenti (P1) e (P2), ai quali si possa quindi applicare il precedente approccio alle stime globali L^p . La classe che abbiamo trovato e' ampia abbastanza da contenere come esempi particolari gli operatori di Kolmogorov (3), così come i seguenti prototipi di operatori di tipo Fokker-Planck introdotti da Mumford in [32] nella visione

¹Si veda [6, Section 4.1.4], ove questo gruppo è chiamato di tipo Kolmogorov .

artificiale:

$$(4) \quad \mathcal{M}_f = (\partial_{x_1})^2 + \cos x_1 \partial_{x_2} + \sin x_1 \partial_{x_3} - \partial_t,$$

$$(5) \quad \mathcal{M}_b = (x_2 \partial_{x_1} - x_1 \partial_{x_2} + \partial_{x_3})^2 + \partial_{x_1} + \partial_t.$$

Qui, i suffissi f e b stanno per *forward* e *backward*, rispettivamente. La nostra classe contiene anche operatori di Kolmogorov non autonomi con coefficienti periodici recentemente studiati da Da Prato e Lunardi [13]. Un esempio è il seguente:

$$(6) \quad \mathcal{L} = (\partial_{x_1})^2 + (\cos t \partial_{x_2} + \sin t \partial_{x_3})^2 - (\partial_t + x_1 \partial_{x_4})$$

.

Vogliamo ora descrivere sinteticamente come abbiamo affrontato i precedenti problemi (P1) e (P2).

1.1. La legge di gruppo. Premettiamo alcune nozioni e risultati della teoria dei gruppi di Lie in \mathbb{R}^N , così come sono presentati in [6, Chapter 1]. Chiamiamo *campo vettoriale in \mathbb{R}^N* ogni operatore alle derivate parziali lineare del primo ordine

$$(7) \quad X = \sum_{j=1}^N a_j \partial_{x_j},$$

con $a_j \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ per ogni $j = 1, \dots, N$. Se le funzioni a_j sono analitiche reali diremo che X è analitico reale. Inoltre, se X è come in (7), conveviamo di porre $XI = (a_1, \dots, a_N)^T$. Quindi, se X è un campo vettoriale in \mathbb{R}^N , XI è una funzione di classe C^∞ da \mathbb{R}^N a \mathbb{R}^N . L'insieme dei campi vettoriali in \mathbb{R}^N , denotato con $T(\mathbb{R}^N)$, ha una naturale struttura di algebra di Lie, data dalla sua struttura standard di spazio vettoriale combinata con l'operazione $[X, Y] := XY - YX$. Ogni sottospazio lineare di $T(\mathbb{R}^N)$, chiuso rispetto alla precedente parentesi di Lie, viene chiamato *algebra di Lie di campi vettoriali in \mathbb{R}^N* . Se \mathfrak{a} è un'algebra di Lie di campi vettoriali in \mathbb{R}^N , e x è un punto di \mathbb{R}^N , allora

$$\mathfrak{a}(x) := \{XI(x) \mid X \in \mathfrak{a}\}$$

è un sottospazio lineare di \mathbb{R}^N . L' *algebra di Lie generata* da un famiglia di campi vettoriali $\mathcal{Z} = \{Z_\alpha \in T(\mathbb{R}^N) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$ è così definita: $\text{Lie}\{Z_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A}\} := \bigcap_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}} \mathfrak{a}$, dove \mathfrak{A} indica la totalità delle algebre di Lie di campi vettoriali in \mathbb{R}^N contenenti \mathcal{Z} . Data

un'algebra $\mathfrak{a} \subseteq T(\mathbb{R}^N)$, è facile riconoscere che $\dim(\mathfrak{a}(x)) \leq \dim(\mathfrak{a})$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$. La disuguaglianza opposta, in generale, è falsa. Tuttavia, se \mathfrak{g} è l'algebra di Lie di un gruppo di Lie $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$, i.e., $\mathfrak{g} = \{X \in T(\mathbb{R}^N) \mid X \text{ è invariante a sinistra su } \mathbb{G}\}$, allora $\dim(\mathfrak{g}) = N = \dim(\mathfrak{g}(x))$, per ogni $x \in \mathbb{R}^N$.

Se $X \in T(\mathbb{R}^N)$ e $x \in \mathbb{R}^N$, il problema di Cauchy

$$\dot{\gamma}(t) = XI(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = x$$

ha una unica soluzione $t \mapsto \gamma(x, t)$, definita in un opportuno intervallo aperto dell'asse reale, che denoteremo $\exp(tX)(x)$. Un campo vettoriale in \mathbb{R}^N è detto *completo* se per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, $\exp(tX)(x)$ esiste per ogni $t \in \mathbb{R}$. È ben noto che ogni campo invariante a sinistra su di un gruppo di Lie è completo.

Consideriamo ora una famiglia di campi vettoriali $\{X_0, \dots, X_m\}$ in $T(\mathbb{R}^N)$ verificante la condizione del rango (H), e denotiamo $\mathfrak{a} := \text{Lie}\{X_0, \dots, X_m\}$. Allora, se gli X_j sono invarianti a sinistra su qualche gruppo di Lie \mathbb{G} in \mathbb{R}^N , \mathfrak{a} deve coincidere ² con l'algebra di \mathbb{G} . Di conseguenza, una condizione necessaria affinché (P1) sia risolvibile è la seguente.

(H1) Ogni $X \in \mathfrak{a}$ è completo e $\dim(\mathfrak{a}) = N$.

Se vale (H1), allora $\exp(tX)(x)$ è ben definito per ogni $X \in \mathfrak{a}$, $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$. In particolare, la mappa

$$(8) \quad \text{Exp} : \mathfrak{a} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \text{Exp}(X) := \exp(tX)(0)|_{t=1}$$

è ben definita e di classe C^∞ . Inoltre, poichè $\text{Exp}(X) = XI(0) + o(|X|)$ per $X \rightarrow 0$, esistono un intorno \mathcal{U} dell'origine in \mathfrak{a} e un intorno V dell'origine in \mathbb{R}^N tali che $\text{Exp}|_{\mathcal{U}}$ è un diffeomorfismo di \mathcal{U} su V . Poniamo $\text{Log} := (\text{Exp}|_{\mathcal{U}})^{-1}$ e definiamo

$$(9) \quad x * y := \exp(\text{Log}(y))(x), \quad \text{for } x, y \in V.$$

Se \mathfrak{a} è l'algebra di Lie di un gruppo di Lie \mathbb{G} in \mathbb{R}^N , la legge di composizione di \mathbb{G} verifica (9) e, per $x \in V$, l'inversa x^{-1} è data da

$$(10) \quad x^{-1} = \text{Exp}(-\text{Log}(x)).$$

²Infatti, $N = \dim(\mathfrak{a}(x)) \leq \dim(\mathfrak{a}) \leq \dim(\text{Lie}(\mathbb{G})) = N$.

Osserviamo che le mappe $(x, y) \mapsto x * y$ e $x \mapsto x^{-1}$ in (9) e (10) sono analitiche reali, se lo sono i campi X_j .

Il nostro principale risultato riguardante il problema (P1) è il seguente.

TEOREMA 1. Siano X_0, \dots, X_m campi vettoriali analitici reali in \mathbb{R}^N verificanti la condizione del rango **(H)** e supponiamo che $\mathfrak{a} := \text{Lie}\{X_0, \dots, X_m\}$ soddisfi l'ipotesi **(H1)**. Supponiamo inoltre che le mappe $(x, y) \mapsto x * y$ e $x \mapsto x^{-1}$ in (9) e (10) si possano prolungare analiticamente a tutto $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ e a tutto \mathbb{R}^N , rispettivamente. Allora $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^N, *)$ è un gruppo di Lie la cui algebra è \mathfrak{a} .

Dal Teorema 1 si deduce un corollario che ha un interesse a sè stante. Per formularlo, è necessario introdurre un'altra definizione. Un gruppo di dilatazioni in \mathbb{R}^N è un'applicazione lineare $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ del tipo

$$(11) \quad \delta_\lambda : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \delta_\lambda(x) = (\lambda^{\sigma_1} x_1, \dots, \lambda^{\sigma_N} x_N),$$

con $\sigma_j \geq 1$ indipendente da λ , for $j = 1, \dots, N$. Un campo vettoriale $X \in T(\mathbb{R}^N)$ è δ_λ -omogeneo di grado a se $X(\varphi \circ \delta_\lambda) = \lambda^a (X\varphi) \circ \delta_\lambda$, per ogni $\lambda > 0$ ed ogni $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Abbiamo quindi il seguente corollario che generalizza un precedente risultato di Bonfiglioli [3].

COROLLARIO. Siano X_0, \dots, X_m campi vettoriali analitici reali in \mathbb{R}^N verificanti la condizione **(H)** e supponiamo che $\mathfrak{a} := \text{Lie}\{X_0, \dots, X_m\}$ verifichi l'ipotesi **(H1)**. Supponiamo poi che esista un gruppo di dilatazioni $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$ in \mathbb{R}^N tale che X_j sia δ_λ -omogeneo di grado $a_j > 0$, per ogni $j = 0, \dots, m$. Allora Exp in (8) è un diffeomorfismo globale, la mappa $x * y$ in (9) è definita su tutto $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ e $\mathbb{G} := (\mathbb{R}^N, *)$ è un gruppo nilpotente la cui algebra di Lie è \mathfrak{a} .

1.2. La soluzione fondamentale. Riguardo al problema (P2), abbiamo dimostrato l'esistenza della soluzione fondamentale per una classe per operatori di Hörmander nella forma generale (1) sotto le seguenti ipotesi (L1) and (L2).

(L1) *Esiste una funzione regolare $\psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ tale che*

$$0 \leq \psi \leq 1, \quad \mathcal{L}\psi < 0 \text{ in } \mathbb{R}^N.$$

(L2) *Esiste una successione crescente $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di aperti \mathcal{L} -regolari tali che*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n = \mathbb{R}^N.$$

Chiamiamo \mathcal{L} -regolare ogni aperto limitato $V \subset \mathbb{R}^N$, con frontiera Lipschitziana, tale che, per ogni $x_0 \in \partial V$, esiste un intorno U di x_0 ed una funzione $w : U \rightarrow \mathbb{R}$ verificante

$$(12) \quad w(x_0) = 0, \quad \mathcal{L}w(x_0) < 0, \quad w > 0 \text{ in } \bar{V} \cap U \setminus \{x_0\}.$$

Il nostro principale risultato riguardante il problema (P2) è (P2)il seguente.

TEOREMA 2 Sia \mathcal{L} un operatore di Hörmander del tipo in (1) verificante le ipotesi (L1) e (L2). Allora esiste una funzione Γ con le seguenti proprietà

- (i) La funzione $(x, y) \mapsto \Gamma(x, y)$ è non-negativa e di classe C^∞ nell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^N : x \neq y\}$.
- (ii) Per ogni fissato $x \in \mathbb{R}^N$, $\Gamma(\cdot, x)$ e $\Gamma(x, \cdot)$ sono localmente integrabili.
- (iii) Per ogni funzione test φ , valgono le seguenti identità :

$$\mathcal{L}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(\cdot, \xi) \varphi(\xi) d\xi\right) = -\varphi = \int_{\mathbb{R}^N} \Gamma(\cdot, \xi) \mathcal{L}\varphi(\xi) d\xi.$$

- (iv) Per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, $\mathcal{L}(\Gamma(\cdot, \xi)) = -Dir_\xi$, dove Dir_ξ denota la misura di Dirac in $\{\xi\}$.

Inoltre, se \mathcal{L} è invariante a sinistra su $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, *)$ e la misura di Lebesgue è invariante a sinistra sullo stesso \mathbb{G} , allora

$$(13) \quad \Gamma(x, y) = \Gamma(\alpha * x, \alpha * y) \quad \text{for every } \alpha, x, y \in \mathbb{G}, x \neq y.$$

In particolare, se e denota l'identità di \mathbb{G} , then

$$\Gamma(x, y) = \Gamma(y^{-1} * x, e) = \Gamma(e, x^{-1} * y), \quad \text{for every } x, y \in \mathbb{G}, x \neq y.$$

Ringraziamento. Ringraziamo Giovanna Citti per averci illustrato l'importanza delle equazioni di Fokker-Planck nei modelli matematici della visione, e per averci segnalato i lavori [1] and [41].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. August, J., Zucker, S. W.: *Sketches with Curvature: The Curve Indicator Random Field and Markov Processes*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence **25** (2003), 387-400.
2. Barucci, E., Polidoro, S., Vespri, V.: *Some results on partial differential equations and Asian options*, Math. Models Methods Appl. Sci. **11** (2001), 475-497.
3. Bonfiglioli, A.: *Homogeneous Carnot groups related to sets of vector fields*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8), **7**, 79–107 (2004).
4. Bonfiglioli, A.: *Remarks on an ODE's version of the Baker-Campbell-Dynkin-Hausdorff formula and the construction of Lie groups with prescribed Lie algebra*. Preprint (2008).
5. Bonfiglioli, A., Lanconelli, E., Uguzzoni, F.: *Uniform Gaussian estimates of the fundamental solutions for heat operators on Carnot groups*, Adv. Differ. Equ. **7** (2002), 1153-1192.
6. Bonfiglioli, A., Lanconelli, E., Uguzzoni, F.: *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics **26**, New York, NY, Springer (2007).
7. Bonfiglioli, A., Uguzzoni, F.: *Maximum principle and propagation for intrinsically regular solutions of differential inequalities structured on vector fields*, J. Math. Anal. Appl. **322**, 886–900 (2006).
8. Bony, J.-M.: *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **19**, 277–304 (1969).
9. Bramanti, M.: *Singular Integrals in Nonhomogeneous Spaces: L^2 and L^p Continuity from Hölder Estimates*. Preprint (2008).
10. Bramanti, M., Brandolini, L.: *L^p -estimates for uniformly hypoelliptic operators with discontinuous coefficients on homogeneous groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. **58** (2000), 389-433.
11. Bramanti, M., Cupini, G., Lanconelli, E., Priola, E.: *Maximal regularity in L^p -spaces for degenerate Ornstein-Uhlenbeck operators*. Preprint (2008).
12. Da Prato, G.: *Kolmogorov equations for stochastic PDE's*. Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Basel: Birkhäuser. **9** (2004).
13. Da Prato, G., Lunardi, A.: *Ornstein-Uhlenbeck operators with time periodic coefficients*. J. Evol. Equ. **7** (2007), 587–614.
14. Da Prato, G., Lunardi, A.: *On a class of self-adjoint elliptic operators in L^2 spaces with respect to invariant measures*. J. Differ. Equations **234** (2007), 54–79.
15. Farkas, B., Lunardi, A.: *Maximal regularity for Kolmogorov operators in L^2 spaces with respect to invariant measures*, J. Math. Pures Appl. **86** (2006), 310-321.
16. Fefferman, C.L., Sánchez-Calle, A.: *Fundamental solutions for second order subelliptic operators*. Ann. Math. **124** (1986), 247–272.

17. Folland, G.B.: *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*. Ark. Mat. **13** (1975), 161–207.
18. Folland, G.B., Stein, E.M.: *Hardy spaces on homogeneous groups*. Mathematical Notes, **28**, Princeton University Press, Princeton, N.J. (1982).
19. Hörmander, L.: *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171.
Jacobson, N.: *Lie algebras*. Intersci. Tracts in Pure and Appl. Math. **10**. N.Y. and Lond.: Intersci. Publishers, John Wiley and Sons (1962).
20. Jerison, D., Sánchez-Calle, A.: *Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields*, Indiana Univ. Math. J. **35** (1986), 835–854.
21. Kogoj, A. E., Lanconelli, E.: *An invariant Harnack inequality for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations*, Mediterr. J. Math. **1** (2004), 51–80.
22. Kogoj, A. E., Lanconelli, E.: *Link of groups and homogeneous Hörmander operators*, Proc. Am. Math. Soc. **135** (2007), 2019–2030.
23. Kohn, J. J.: *Pseudo-differential operators and hypoellipticity*, Partial diff. Equ., Berkeley 1971, Proc. Sympos. Pure Math. **23** (1973), 61–69.
24. Kolmogorov, A.N.: *Zufällige Bewegungen*. Ann. of Math. **35** (1934), 116–117.
25. Kusuoka, S., Stroock, D.: *The partial Malliavin calculus and its application to nonlinear filtering*. Stochastics **12** (1984), 83–142.
26. Kusuoka, S., Stroock, D.: *Applications of the Malliavin calculus. II*. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A. **32** (1985), 1–76.
27. Kusuoka, S., Stroock, D.: *Applications of the Malliavin calculus III*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I A. **34** (1987), 391–442.
28. Kusuoka, S., Stroock, D.: *Long time estimates for the heat kernel associated with a uniformly subelliptic symmetric second order operator*. Ann. of Math. **127** (1988), 165–189.
29. Lanconelli, E., Pascucci, A.: *On the fundamental solution for hypoelliptic second order partial differential equations with non-negative characteristic form*, Ricerche Mat. **48** (1999), 81–106.
30. Lanconelli, E., Polidoro, S.: *On a class of hypoelliptic evolution operators*. Rend. Semin. Mat. Torino **52** (1994), 29–63.
31. Lunardi, A.: *Schauder estimates for a class of degenerate elliptic and parabolic operators with unbounded coefficients in \mathbb{R}^n* . Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser. **24** (1997), 133–164.
32. Mumford, D.: *Elastica and computer vision*. Bajaj, Chandrajit L. (ed.), Algebraic geometry and its applications. Purdue University, West Lafayette, IN, U SA, June 1-4, 1990. New York: Springer-Verlag. 491–506 (1994).
33. Nazarov, F., Treil, S., Volberg, A.: *Accretive system Tb-theorems on nonhomogeneous spaces*. Duke Math. J. **113** (2002), 259–312.

34. Nazarov, F., Treil, S., Volberg, A.: *The Tb-theorem on non-homogeneous spaces*. Acta Math. **190** (2003), 151–239.
35. Pascucci, A.: *Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options*, Finance and Stochastics **12** (2008), 21–41.
36. Rothschild, L.P., Stein, E.M., *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*. Acta Math. **137** (1976), 247–320.
37. Sagle, A.A., Walde, R.E.: *Introduction to Lie groups and Lie algebras*. Pure and Applied Mathematics, **51**. New York-London: Academic Press (1973).
38. Sánchez-Calle, A.: *Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields*. Invent. Math. **78** (1984), 143–160.
39. Varopoulos, N. T., Saloff-Coste, L., Coulhon, T.: *Analysis and geometry on groups*. Cambridge Tracts in Mathematics **100**, Cambridge University Press, Cambridge (1992).
40. Volberg, A.: *Calderón-Zygmund capacities and operators on nonhomogeneous spaces*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics **100**. Providence, RI: American Mathematical Society (2003).
41. Wang, Y., Zhou, Y., Maslen, D.K., Chirikjian, G.S.: *Solving phase-noise Fokker-Planck equations using the motion-group Fourier transform*. IEEE Transactions on Communications **54** (2006), 868–877.
42. Wojtyński, W.: *Quasinilpotent Banach-Lie algebras are Baker-Campbell-Hausdorff*. J. Funct. Anal. **153** (1998), 405–413.