Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2008-09

Maria Manfredini

Campi vettoriali non regolari di step 2: la disuguaglianza di Poincaré e la soluzione fondamentale dell'operatore associato.

21 maggio 2009

Abstract

We provide a Poincaré inequality for families $X_1, \ldots, X_m$ of Lipschitz continuous vector fields which satisfy the Hörmander condition of step two, see [14]. Beside, we adapt the Levi's classical parametrix method to construct the fundamental solution Γ for the operator $\sum_{i=1}^m X_i^2$ when the vector fields are $C_d^{1,\alpha}$, see [15]. We also provide estimates of Γ and of its derivatives.

1. Introduzione

Viene presentata una disuguaglianza di Poincaré per famiglie di campi vettoriali X_1, $\ldots, X_m$ lipschitziani che verificano la condizione di Hörmander di step 2, provata in [14]. Inoltre, viene adattato il metodo della parametrice di Levi per costruire la soluzione fondamentale dell'operatore $\sum_{i=1}^m X_i^2$ quando i campi vettoriali sono solo di classe $C_d^{1,\alpha}$, si veda [15].

La motivazione che ci ha spinto a considerare campi vettoriali non di classe C^∞ viene dallo studio della regolaritá delle soluzioni di equazioni nonlineari degeneri. Ad esempio, nel gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$, $n > 1$, la condizione di minimalitá di un grafico intrinseco é espressa dall'equazione:

$$\sum_{i=1}^{2n-1} X_{i,u}\left(\frac{X_{i,u}u}{\sqrt{1+|\nabla_u u|^2}}\right) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^{2n},$$

dove

$$X_i = \partial_i, \ i = 1, \ldots, n-1,$$

$$X_i = \partial_i + x_{i-n+1}\partial_{2n}, \ i = n, \ldots, 2n-2,$$

e $X_{2n-1,u}$ é il campo non lineare che dipende da $u \in Lip_{Eucl}$:

$$X_{2n-1,u} = \partial_{2n-1} + u(x)\partial_{2n}.$$

É noto che per la regolaritá bassa (ad esempio da Lip_{Eucl} a $C^{1,\alpha}$) la disuguaglianza di Poincaré é fondamentale se si utilizza il metodo iterativo di Moser. Mentre per lo studio della regolaritá piú alta puó essere utile avere formule di rappresentazione mediante la soluzione fondamentale.

2. Disuguaglianza di Poincaré

Consideriamo m campi vettoriali $X_1, \ldots, X_m$ in $\mathbb{R}^n$ localmente lipschitziani in senso euclideo e supponiamo che verifichino la condizione di Hörmander di ordine 2. Siano $d(x,y)$ la distanza di controllo associata ai campi e $B(x,r)$ le corrispondenti sfere. Lo scopo della prima parte del seminario é presentare la disuguaglianza di Poincaré sulle sfere $B(x,r)$

$$\int_{B(x,r)} |u(y) - u_B| \, dy \leq c\, r \int_{B(x,\rho r)} |\nabla_X u(y)| \, dy, \ \forall u \in C^1(B(x, \rho r))$$

dove $\rho \geq 1$, $u_B = \frac{1}{|B|} \int\limits_B u$ e $\nabla_X u = (X_1 u, \ldots, X_m u)$.

Se i campi sono di classe C^∞ tale disuguaglianza é stata provata da Jerison in [11] nel 1986. La dimostrazione di Jerison presuppone la doubling per la misura delle sfere della metrica, dimostrata da Nagel, Stein e Wainger in [20] nel 1985. Il celebre risultato in [20] permette di rappresentare le sfere della metrica di controllo come immagini di funzioni esponenziali di opportune ball-boxes. Nel caso di campi non regolari vorrei citare il lavoro [20] di Franchi e Lanconelli del 1983, per campi diagonali non smooth ($X_i = \lambda_i(x)\partial_i$, $i = 1, \ldots, n$). Nel recente articolo [12] di Lanconelli e Morbidelli del 2000, la condizione di regolaritá dei campi é espressa mediante una proprietá di rappresentabilitá delle sfere della distanza tramite mappe controllabili in un senso opportuno. Montanari e Morbidelli in [17] e in [18], rispettivamente per campi di ordine 2 (coefficienti $C_d^{1,1}$) e di ordine s (coefficienti $C_d^{s-1,1}$), provano la Poincaré usando il risultato di Lanconelli e Morbidelli. Vorrei infine segnalare l'articolo [4] di Bramanti, Brandolini e Pedroni del 2008, per campi di ordine s con coefficienti $C^{s-1,1}$ euclidei.

Si osservi che nessuno dei risultati precedenti si applica ai campi che descrivono i grafici intrinseci in Heisenberg.

Introduciamo alcune notazioni. Consideriamo i campi e tutti i loro commutatori di ordine 2

$$X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_q.$$

Poniamo $d(X_i) = 1$ se $i = 1, \ldots, m$ e $d(X_i) = 2$ se $i = m+1, \ldots, q$. Data una n-upla $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \{1, \ldots, q\}^n$, definiamo $d(I) = \sum_{j=1}^n d(X_{i_j})$,

$$\lambda_I(x) = \det\left[X_{i_1}(x), \ldots, X_{i_n}(x)\right], \ x \in \mathbb{R}^n.$$

e la ball-box associata ad I come l'insieme $\mathrm{Box}_I(r) = \left\{h \in \mathbb{R}^n \ : \ ||h||_I \leq r\right\}, \ r > 0$ dove $||h||_I = \max_{j=1,\ldots,n} |h_j|^{\frac{1}{d(X_{i_j})}}$.

Nel caso di campi C^∞, si puó definire la mappa esponenziale relativa ad $I = (i_1, \ldots, i_n)$:

$$E_I(x, h) = \exp(h_1 X_{i_1} + \cdots + h_n X_{i_n})(x),$$

per h piccolo. Si ha $\lambda_I(x) = \det\left[X_{i_1}(x), \ldots, X_{i_n}(x)\right] = det \frac{\partial E_I}{\partial h}(x, 0)$.

Teorema 2.1. (Nagel-Stein-Wainger, [20]) *Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto ed $x \in K$. Esistono $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, r_0$ tali che, data una n-upla $I = (i_1, \ldots, i_n)$ tale che $\lambda_I(x) \neq 0$ e*

$$|\lambda_I(x)| r^{d(I)} > \frac{1}{2} \max_{J \in \{1,\ldots,q\}^n} |\lambda_J(x)| r^{d(J)}$$

allora

(i) la mappa $E_I(x, \cdot)$ é iniettiva in $Box_I(\varepsilon_0 r)$;

(ii) $\frac{1}{2}|\lambda_I(x)| \leq \left|\det \frac{\partial E_I}{\partial h}(x, h)\right| \leq 2|\lambda_I(x)|$ q.o. per $h \in Box_I(\varepsilon_0 r)$;

(iii) $B(x, \varepsilon_1 r) \subset E_I(x, Box_I(\varepsilon_0 r)) \subset B(x, \varepsilon_2 r)$.

Se i campi $X_1, \ldots, X_m$ sono soltanto lipschitziani, allora per $i, j = 1, \ldots, m$ si puó definire (si veda [19]) la mappa

$$\exp^*(h[X_i, X_j]) := \begin{cases} e^{-\sqrt{h}X_j} e^{-\sqrt{h}X_i} e^{\sqrt{h}X_j} e^{\sqrt{h}X_i} x & \text{se } h \geq 0, \\ e^{-\sqrt{|h|}X_i} e^{-\sqrt{|h|}X_j} e^{\sqrt{|h|}X_i} e^{\sqrt{|h|}X_j} x & \text{se } h \leq 0 \end{cases}$$

che, in prima approssimazione, si comporta come l'esponenziale del commutatore $[X_i, X_j]$.

Data $I = (i_1, \ldots, i_n)$, si definisce la mappa *quasi esponenziale*

$$E_I^*(x, h) = \exp^*(h_1 X_{i_1}) \circ \cdots \circ \exp^*(h_n X_{i_n})(x)$$

dove $\exp^*(h_j X_{i_j})(x) = \exp(h_j X_{i_j})(x)$ se $i_j \in \{1, \ldots, m\}$.

Teorema 2.2. (Montanari-Morbidelli, [17]) *Il teorema di Nagel-Stein-Wainger é ancora vero per campi $C_d^{1,1}$ e la mappa quasi esponenziale E_I^*.*

Introduciamo ora la nostra ipotesi, verificata ad esempio dai campi che descrivono i grafici intrinseci in Heisenberg presentati nell'introduzione.

(H) Ipotesi sui campi. Assumiamo che i campi $X_1, \dots, X_m$ siano localmente lipschitziani in senso Euclideo e supponiamo che valga la condizione di Hörmander di passo 2. Consideriamo i loro commutatori di ordine 2: $X_{m+1}, \dots, X_q$. Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto. Per ogni $x \in K$ esiste una n-upla $\bar{I} = (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, q\}^n$ tale che $\lambda_{\bar{I}}(x) \neq 0$ ed inoltre $\bar{I}$ é quasi-massimale, cioé

$$|\lambda_{\bar{I}}(x)| r^{d(\bar{I})} > \frac{1}{2} \max_{J \in \{1,\dots,q\}^n} |\lambda_J(x)| r^{d(J)}.$$

Supponiamo inoltre che i campi $X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$ siano localmente lipschitziani.

Teorema 2.3. (M. [14]) *Supponiamo che sia soddisfatta (H). Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto. Esistono $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, r_0$ tali che la mappa $E^*_{\bar{I}}(x, \cdot)$ é lipschitziana in $Box_{\bar{I}}(\varepsilon_0 r)$, $r < r_0$. Inoltre per $x \in K$*

(i) la mappa $E^*_{\bar{I}}(x, \cdot)$ é iniettiva in $Box_{\bar{I}}(\varepsilon_0 r)$;

(ii) $\frac{1}{2}|\lambda_{\bar{I}}(x)| \leq \left|\det \frac{\partial E^*_{\bar{I}}}{\partial h}(x, h)\right| \leq 2|\lambda_{\bar{I}}(x)|$ q.o. per $h \in Box_{\bar{I}}(\varepsilon_0 r)$;

(iii) $B(x, \varepsilon_1 r) \subset E^*_{\bar{I}}(x, Box_{\bar{I}}(\varepsilon_0 r)) \subset B(x, \varepsilon_2 r)$.

Seguono la doubling e la disuguaglianza di Poincaré.

Esempio: grafici minimi in $\mathbb{H}^n$, $n > 1$. Denotiamo con $(s, x_1, ..., x_{2n})$ gli elementi di $\mathbb{R}^{2n+1}$ e scegliamo i seguenti vettori come base del tangente orizzontale

$X_s = \partial_s, \ X_i = \partial_i, \ i = 1, ..., n-1,$

$X_i = \partial_i + x_{i-n+1}\partial_{2n}, \ i = n, ..., 2n-2,$

$X_{2n-1} = \partial_{2n-1} + s\,\partial_{2n}.$

Una superficie regolare di $\mathbb{H}^n$ é localmente il grafico di una funzione $u : \Omega \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$: $S = \{(s, x_1, ..., x_{2n}) : \ s = u(x_1, ..., x_{2n})\}$. Nel dominio di u, consideriamo i campi che si ottengono come proiezione dei campi iniziali e otteniamo

$X_i = \partial_i, \ i = 1, \dots, n-1,$

$X_i = \partial_i + x_{i-n+1}\partial_{2n}, \ i = n, \dots, 2n-2,$

$X_{2n-1,u} = \partial_{2n-1} + u(x)\partial_{2n}$, u localmente lipschitziana in senso Euclideo.

Sia $c > 0$. Consideriamo i campi

$X_i = c\,\partial_i,\ i = 1, \ldots, n-1,$

$X_i = c\,\partial_i + c\,x_{i-n+1}\partial_{2n},\ i = n, \ldots, 2n-2,$

$X_{2n-1,u} = \partial_{2n-1} + u(x)\partial_{2n}.$

Se $k \leq n-1$ e $i = k+n-1$ oppure $i \leq n-1$ e $k = i+n-1$, allora $[X_k, X_i] = c^2\, sign(k-i)\,\partial_{2n}$; e $[X_k, X_{2n-1,u}] = c\,X_k u\,\partial_{2n}$, se $k < 2n-1$. Introduciamo inoltre il campo $X_{2n} := [X_n, X_1]$.

Questi campi soddisfano l'ipotesi (H). Infatti, se scegliamo $\bar{I} = (1, 2, \ldots, 2n-1, 2n)$ allora i campi corrispondenti sono localmente lipschitziani in senso euclideo, $d(\bar{I}) = 2n+1$ e $|\lambda_{\bar{I}}(x)| = |\det[X_1(x), \ldots, X_{2n-1}(x), X_{2n}(x)]| = c^{2n+1}$.

Se J é una $2n$-upla tale che $\lambda(J) \neq 0$ allora J é del tipo $(X_1, \ldots, X_{2n-1,u}, c^2 sign(k-i)\partial_{2n})$ e quindi $d(J) = 2n+1, |\lambda_J(x)| = c^{2n+1}$, oppure J é del tipo $(X_1, \ldots, X_{2n-1,u}, cX_k u\partial_{2n})$, in tal caso $d(J) = 2n+1, |\lambda_J(x)| = c^{2n}|X_k u(x)|$. Se K é un compatto allora esiste $c = c(K)$ tale che $\bar{I}$ é quasi massimale. Infatti, é sufficiente scegliere $c > \frac{1}{2}\,||X_k u(x)||_{L^\infty(K)}$ per avere

$$|\lambda_{\bar{I}}(x)| r^{d(\bar{I})} = c^{2n+1} r^{2n+1} > \frac{1}{2} c^{2n} |X_k u(x)| r^{2n+1}.$$

Esempio: equazione di Monge-Ampére. Rios, Sawyer e Wheeden in [22] studiano l'equazione

$$\det\, D^2 u = k(x, u, \nabla u) \text{ in } \ \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

dove k é una funzione smooth e non negativa. Mediante una trasformazione di tipo Legendre il problema viene ricondotto a studiare un'equazione del tipo $\sum_{i,j=1}^m X_i^*(a_{i,j} X_j u) = f$, dove $(a_{i,j})_{i,j}$ é una matrice costante definita positiva e $X_1, \ldots, X_m$ é una numerazione dei campi

$$X_1 = \partial_s, \quad X_\beta^1 = s\,\partial_{t_\beta}, \quad X_\beta^\alpha = v_\alpha(s,t)\,\partial_{t_\beta},$$

$2 \leq \alpha, \beta \leq n,\ (s,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$ e le funzioni v_α sono solamente lipschitziane.

Tali campi verificano l'ipotesi (H).

3. Soluzione fondamentale per campi $C_d^{1,\alpha}$

In questa parte del seminario costruiamo, mediante il metodo della parametrice di Levi, una soluzione fondamentale per operatori somma di quadrati di campi vettoriali di step

2 con coefficienti $C^{1,\alpha}$ intrinseci. Consideriamo $X_1, \dots, X_m$ campi in $\mathbb{R}^n$ della forma

$$X_j = \partial_j + \sum_{k=m+1}^{N} a_{j,k}(x)\partial_k, \quad j = 1, \dots, m.$$

Supponiamo per ora che $a_{j,k} \in Lip_{loc,Eucl}$ e che esistano e siano continue le derivate di Lie dei coefficienti, $X_i a_{j,k}$. Inoltre, assumiamo che

$$\partial_j = \sum_{1 \le i < k \le m} \lambda_j^{i,k}(x)[X_i, X_k](x), \; j = m+1, \dots, n$$

e $\lambda_j^{i,k} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $j = m+1, \dots, n$, $1 \le i < k \le m$.

Vale un risultato tipo teorema di connettivitá di Chow

Lemma 3.1. (Connettivitá, [15]) *Per ogni $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ esiste una curva γ integrale a tratti dei campi $X_1, \dots, X_m$ che congiunge x_0 ed x.*

Quindi é possibile definire la distanza di controllo: se $P(x, x_0)$ é l'insieme delle curve integrali che congiungono x_0 e x allora

$$d(x_0, x) = \inf\{T > 0 | \exists \gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^n, \gamma \in P(x, x_0), \gamma(0) = x_0, \gamma(T) = x\}.$$

Consideriamo infine gli spazi intrinseci delle funzioni hölderiane associati a d in modo naturale: $C_d^\alpha(\Omega)$, $C_d^{1,\alpha}(\Omega)$, $C_d^{2,\alpha}(\Omega)$, con $0 < \alpha \le 1$.

Lemma 3.2. (Formula di taylor, [15]) *Se $u \in C_d^{1,\alpha}(\Omega)$ allora*

$$u(x) = P^1_{x_0} u(x) + O\left(d^{1+\alpha}(x_0, x)\right), \text{ per } x \to x_0 \in \Omega,$$

dove $P^1_{x_0} u(x) = u(x_0) + \sum_{i=1}^m X_i u(x_0)(x - x_0)_i$ é il polinomio di Taylor intrinseco del primo ordine.

Consideriamo l'operatore

$$L = \sum_{i=1}^m X_i^2.$$

Teorema 3.1. (M. [15]) *Sia $\zeta \in \mathbb{R}^n$. Esistono $T \subset \mathbb{R}^n$ e $\Gamma = \Gamma(z, \zeta)$, tali che*

$$L^z \Gamma(z, \zeta) = -\delta_\zeta(z), \text{ in } T.$$

Inoltre:

(i) $\Gamma(\cdot,\zeta) \in C^{2,\beta}_{d,loc}(T \setminus \{\zeta\})$ *per ogni* $\beta < \alpha$ *e* $L^z\Gamma(z,\zeta) = 0$ *se* $z \in T \setminus \{\zeta\}$*;*

(ii) localmente per $z \neq \zeta$

$$|\Gamma(z,\zeta)| \leq c\, d^{2-Q}(z,\zeta),\ |X_i^z\Gamma(z,\zeta)| \leq c\, d^{1-Q}(z,\zeta), \quad i \in \{1,\dots,m\},$$

dove $Q = m + 2(n-m)$*.*

Il metodo di Levi é un metodo classico che consente di costruire la soluzione fondamentale di un operatore a coefficienti variabili partendo dalla soluzione fondamentale dell'operatore a coefficienti costanti. Inizialmente introdotto da Levi nel 1907 in [13], per gli operatori ellittici, venne successivamnete esteso a quelli parabolici, [9]. Tale metodo é stato utilizzato per operatori di tipo Kolmogorov-Fokker-Plank da Polidoro [21]. Per operatori della forma $\sum_{i,j=1}^m a_{i,j}(x)X_iX_j - \partial_t$, con campi di classe C^∞ su gruppi di Carnot e $a_{i,j} \in C^\alpha$, si veda Bonfiglioli, Lanconelli, Uguzzoni [1]. Per il caso generale, non necessariamente campi su gruppi di Carnot, si veda Bramanti, Brandolini, Lanconelli, Uguzzoni [3].

Ricordo brevemente il metodo di Levi della parametrice per un operatore uniformemente ellittico $L = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}(x)\partial_i\partial_j$ con coefficienti hölderiani. Per ogni fissato ζ si considera l'operatore congelato $L_\zeta = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}(\zeta)\partial_i\partial_j$ e la sua soluzione fondamentale $\Gamma_\zeta(z,\zeta)$ con polo in ζ. Si cerca Γ soluzione fondamentale di L nella forma

$$\Gamma(z,\zeta) = \Gamma_\zeta(z,\zeta) + J(z,\zeta)$$

con $J(z,\zeta)$ del tipo

$$J(z,\zeta) = \int_T \Gamma_\xi(z,\xi)\varphi(\xi,\zeta)d\xi.$$

Formalmente (ammesso che si possano portare le derivate sotto il segno di integrale)

$$L^zJ(z,\zeta) = \int_T L^z\Gamma_\xi(z,\xi)\varphi(\xi,\zeta)d\xi - \varphi(z,\zeta),\ z \neq \zeta \tag{1}$$

e quindi, affinché Γ sia soluzione fondamentale di L, deve essere

$$0 = L^z\Gamma_\zeta(z,\zeta) + \int_T L^z\Gamma_\xi(z,\xi)\varphi(\xi,\zeta)d\xi - \varphi(z,\zeta).$$

Si cerca φ soluzione dell'equazione integrale

$$\varphi(z,\zeta) = L^z\Gamma_\zeta(z,\zeta) + \int_T L^z\Gamma_\xi(z,\xi)\varphi(\xi,\zeta)d\xi,$$

e la si puó deteminare con il metodo delle approssimazioni successive ponendo

$$Z_1(z,\zeta) = L(z \to \Gamma_\zeta(z,\zeta))$$

e per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$Z_{j+1}(z,\zeta) = \int_T Z_1(z,\eta) Z_j(\eta,\zeta) d\eta, \ z \in T, \ z \neq \zeta.$$

Si definisce quindi φ nel seguente modo

$$\varphi(z,\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} Z_j(z,\zeta), \ z \neq \zeta.$$

Poi occorre studiare la convergenza della serie.

Risulta quindi cruciale la scelta del tipo di congelamento. Nel contesto subellittico se si congela semplicemente come nel caso ellitico allora si perde completamente la struttura dell'operatore. Il congelamento alla Rothschild-Stein é conveniente se i campi sono regolari.

Chiamiamo *campi congelati* in un punto fissato ζ quelli ottenuti sostituendo ai coefficienti il loro sviluppo di Taylor intrinseco di punto iniziale ζ. Tale tipo di congelamento é stato introdotto per la prima volta da Citti in [6] nello studio dell'equazione di curvatura di Levi.

Precisamente:

$$X_j = \partial_j + \sum_{k=m+1}^{n} a_{j,k}(x)\partial_k, \ j = 1, \dots, m$$

con $a_{j,k} \in C_d^{1,\alpha}(\Omega)$.

Fissiamo $\zeta \in \mathbb{R}^n$ e definiamo

$$X_{j,\zeta} := \partial_j + \sum_{k=m+1}^{n} P_\zeta^1 a_{j,k}(x)\partial_k, \quad j = 1, \dots, m$$

dove $P_\zeta^1 a_{j,k}(x) = a_{j,k}(\zeta) + \sum_{i=1}^m X_i a_{j,k}(\zeta)(x-\zeta)_i$.

Osserviamo che $[X_{l,\eta}, X_{j,\zeta}] = [X_l, X_j](\zeta), \quad l,j = 1, \dots, m.$ quindi le algebre di Lie generate da $X_{1,\zeta}, \dots, X_{m,\zeta}$ e da $X_1, \dots, X_m$ fino allo step 2 hanno la stessa struttura.

Si dimostra che la distanza associata ai campi congelati é localmente equivalente a quella relativa ai campi di partenza. Inoltre i campi $X_{1,\zeta}, \ldots, X_{m,\zeta}$ sono regolari e generano un'algebra nilpotente di step 2. Quindi esiste un cambiamento di variabile canonico

$$\psi_\zeta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ c_1 \le \det J\psi_\zeta \le c_2$$

che trasforma i campi $X_{i,\zeta}$ in campi Y_i di step 2 e indipendenti da ζ, tali che

$$X_{i,\zeta} u = Y_i u_Y,\ u_Y = u \circ \psi_\zeta^{-1}.$$

I campi $Y_1, \ldots, Y_m$ generano un'algebra di Lie il cui gruppo é omogeneo di Carnot. Sia $d_Y(x,y)$ la distanza associata ai campi Y_i. Allora $d_\zeta(z,\eta) = d_Y(\psi_\zeta(z), \psi_\zeta(\eta))$. L'operatore congelato $L_Y := \sum_{i=1}^m Y_i^2$ ha una soluzione fondamentale Γ_Y, si veda [1].

La funzione $\Gamma_\zeta(z,\eta) = (\det J\psi_\zeta)\,\Gamma_Y(\psi_\zeta(z), \psi_\zeta(\eta))$ é soluzione fondamentale di L_ζ. Inoltre, se Q é la dimensione omogenea del gruppo si ha

$$|\Gamma_\zeta(z,\eta)| \le c\,|\Gamma_Y(\psi_\zeta(z), \psi_\zeta(\eta))| \le c\, d_Y^{2-Q}(\psi_\zeta(z), \psi_\zeta(\eta)) = c\, d_\zeta^{2-Q}(z,\eta)$$

(stime analoghe valgono per le derivate).

Usiamo Γ_ζ come *parametrice* nella costruzione di Levi.

Osserviamo che il punto cruciale nella costruzione della soluzione fondamentale, oltre alla convergenza della serie che definisce φ, é dimostare la (1)

$$L^z J(z,\zeta) = \int_T L^z \Gamma_\xi(z,\xi)\varphi(\xi,\zeta) d\xi - \varphi(z,\zeta).$$

É standard provare che la funzione $J(\cdot,\zeta)$ é derivabile per $z \neq \zeta$ e vale

$$X_j^z J(z,\zeta) = \int_T X_j^z \Gamma_\xi(z,\xi)\varphi(\xi,\zeta) d\xi.$$

Nel caso classico, dopo aver 'scambiato' la derivata destra con quella sinistra, si usa, il teorema della divergenza per integrali del tipo

$$\int_T X_i^z (X_i^z \Gamma_\xi(z,\xi)\psi_\varepsilon(z,\xi))\varphi(\xi,\zeta) d\xi$$

dove $\psi_\varepsilon(z,\xi)$ é una opportuna funzione cut-off. Ora vale la seguente relazione per le derivate intrinseche: [23]

$$X_i^z = \sum_k X_k^\eta \cdot R_k^i + R^i$$

dove R^i_k, R^i sono operatori differenziali di grado ≤ 0. Sembra quindi che l'approccio classico non funzioni.

Abbiamo allora calcolato le derivate le derivate X_j^z di $X_j^z J(z,\zeta)$ in senso distribuzionale. Cenno della prova: Sia $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\sum_{j=1}^m \int \int_T X_j^z \Gamma_\xi(z,\xi)\varphi(\xi,\zeta)d\xi X_j^* h(z)\,dz = \sum_{j=1}^m \int_T \int X_j^z \Gamma_\xi(z,\xi) X_j^* h(z) dz\,\varphi(\xi,\zeta)d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^m \int_T \int_{\{z:\Gamma_\xi(z,\xi)\geq \varepsilon^{2-Q}\}} X_j^z \Gamma_\xi(z,\xi) X_j^* h(z) dz\,\varphi(\xi,\zeta)d\xi \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^m \int_T \int_{\{z:\Gamma_\xi(z,\xi)\geq \varepsilon^{2-Q}\}} (X_j^z)^2 \Gamma_\xi(z,\xi) h(z) dz\,\varphi(\xi,\zeta)d\xi \qquad (2)\\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^m \int_T \int_{\{z:\Gamma_\xi(z,\xi)= \varepsilon^{2-Q}\}} \frac{X_j^z \Gamma_\xi(z,\xi) X_j^z \Gamma_\xi(z,\xi)}{|\nabla^z \Gamma_\xi(z,\xi)|} h(z)\,d\sigma_z \varphi(\xi,\zeta)d\xi.
\end{aligned}$$

Ora vale la seguente stima per $\varepsilon \to 0$

$$\begin{aligned}
&\int_T \int_{\{z:\Gamma_\xi(z,\xi)= \varepsilon^{2-Q}\}} \frac{X_j^z \Gamma_\xi(z,\xi) X_j^z \Gamma_\xi(z,\xi)}{|\nabla^z \Gamma_\xi(z,\xi)|} h(z)\,d\sigma_z \varphi(\xi,\zeta)d\xi \qquad (3)\\
&= \int_T \int_{\{z:\Gamma_\xi(z,\xi)= \varepsilon^{2-Q}\}} \frac{X_{j,\xi}^z \Gamma_\xi(z,\xi) X_{j,\xi}^z \Gamma_\xi(z,\xi)}{|\nabla^z \Gamma_\xi(z,\xi)|}\, d\sigma_z h(\xi)\varphi(\xi,\zeta)d\xi + O(\varepsilon^\alpha).
\end{aligned}$$

Concludendo

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^m \int \int_T X_j^z \Gamma_\xi(z,\xi)\varphi(\xi,\zeta)d\xi X_j^* h(z)\,dz \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^m \int_T \int_{\{z:\Gamma_\xi(z,\xi)\geq \varepsilon^{2-Q}\}} (X_j^z)^2 \Gamma_\xi(z,\xi) h(z)\,dz\varphi(\xi,\zeta)d\xi \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^m \int_T \int_{\{z:\Gamma_\xi(z,\xi)= \varepsilon^{2-Q}\}} \frac{X_{j,\xi}^z \Gamma_\xi(z,\xi) X_{j,\xi}^z \Gamma_\xi(z,\xi)}{|\nabla^z \Gamma_\xi(z,\xi)|}\, d\sigma_z h(\xi)\varphi(\xi,\zeta)d\xi \qquad (4)\\
&= -\sum_{j=1}^m \int \int_T (X_j^z)^2 \Gamma_\xi(z,\xi)\varphi(\xi,\zeta)d\xi h(z)\,dz \\
&\quad + \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j=1}^m \int_T \int_{\{z:\Gamma_\xi(z,\xi)= \varepsilon^{2-Q}\}} \frac{X_{j,\xi}^z \Gamma_\xi(z,\xi) X_{j,\xi}^z \Gamma_\xi(z,\xi)}{|\nabla^z \Gamma_\xi(z,\xi)|}\, d\sigma_z h(\xi)\varphi(\xi,\zeta)d\xi
\end{aligned}$$

Dove

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{j=1}^{m}\int_{\{z:\Gamma_\xi(z,\xi)=\varepsilon^{2-Q}\}} \frac{X^z_{j,\xi}\Gamma_\xi(z,\xi)X^z_{j,\xi}\Gamma_\xi(z,\xi)}{|\nabla^z\Gamma_\xi(z,\xi)|}\,d\sigma_z = 1, \tag{5}$$

essendo Γ_ξ soluzione fondamentale di L_ξ.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Fundamental solutions for non-divergence form operators on stratified groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 356, no.7, (2004), 2709-2737.

[2] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, (2007).

[3] M. Bramanti, L. Brandolini, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Heat kernels for non-divergence operators of Hörmander type*, Comptes rendus - Mathematique, 343, no.7, (2006), 463-466.

[4] M. Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni, *Basic properties of nonsmooth Hrmander's vector fields and Poincar's inequality*, preprint 2008.

[5] L. Capogna, G. Citti, M. Manfredini, *Smoothness of Lipschitz minimal intrinsic graphs in Heisenberg groups $\mathbb{H}^n$, $n > 1$*, accettato per la pubblicazione su CRELLE.

[6] G. Citti, *C^∞ regularity of solutions of a quasilinear equation related to the Levi operator*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. , (4) 23 (1996), 483-529.

[7] G. Citti, M. Manfredini, *Implicit function theorem in Carnot-Carathéodory spaces*, Commun. Contemp. Math., 8, no.5, (2006), 657-680.

[8] B. Franchi, E. Lanconelli, *Hölder regularity theorem for a class of linear nonuniformly elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 10 (1983), 523-541.

[9] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type*,Prentice-Hall, (1964).

[10] H. Hörmander, *Hypoelliptic second-order differential equations*, Acta Math. 119, (1967), 147-171.

[11] D. Jerison, *The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition*, Duke Math. J., 53 (1986), 503-523.

[12] E. Lanconelli, M. Morbidelli, *On the Poincaré inequality for vector fields*, Ark. Mat., 38, (2000), 327-342.

[13] E.E. Levi, *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 24, (1907) 312-313.

[14] M. Manfredini, *A note on the Poincaré inequality for non smooth vector fields*, preprint.

[15] M. Manfredini, *Fundamental solutions for sum of square vector fields operators with $C^{1,\alpha}$ coefficients*, preprint.

[16] C. Miranda, *Partial differential equations of elliptic type*, Springer-Verlag, New York-Berlin, (1970).

[17] A. Montanari, D. Morbidelli, *Balls defined by nonsmooth vector fields and the Poincaré inequality*, Ann. Inst. Fourier, 54 no. 2, (2004), 431-452.

[18] A. Montanari, D. Morbidelli, *Nonsmooth Hormander vector fields and their control balls*, preprint 2008

[19] D. Morbidelli, *Fractional Sobolev norms and structure of the Carnot-Carathéodory balls for Hörmander vector fields*, Studia Math. , 139, (2000), 213-244.

[20] A. Nagel, E.M. Stein, S. Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties*, Acta Math. 155, (1985), 103-147.

[21] S. Polidoro, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type*, Le Matematiche, 49, (1994), 53-105.

[22] C. Rios, E. T. Sawyer, R. L. Wheeden, *Regularity of subelliptic Monge-Ampére equations*, Adv. Math. 217, no. 3, (2008), 967-1026.

[23] L. Rothschild, E.M. Stein, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent Lie groups*, Acta Math. 137, (1977), 247-320.