Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2007-08

Martino Vittorio

Una proprietà della direzione caratteristica per le ipersuperfici reali in $\mathbb{C}^{n+1}$

5 Giugno 2008

Abstract

In this paper we show the following property of a non Levi flat real hypersurface in $\mathbb{C}^{n+1}$: if the unit characteristic direction T is a geodesic, then it is an eigenvector of the second fundamental form and the relative eigenvalue is constant. As an application we prove a symmetry result, of Alexandrov type, for compact hypersurfaces in $\mathbb{C}^{n+1}$ with positive constant Levi mean curvature.

In questo seminario mostriamo la seguente proprietà di una ipersuperficie reale in $\mathbb{C}^{n+1}$ non Levi piatta: se la direzione caratteristica unitaria T è geodetica allora è un autovettore per la seconda forma fondamentale e il relativo autovalore è costante. Come applicazione dimostriamo un risultato di simmetria, di tipo Alexandrov, per ipersuperfici compatte in $\mathbb{C}^{n+1}$ con curvatura media di Levi costante positiva.

1. Introduzione

I risultati qui esposti sono stati ottenuti in collaborazione con A. Montanari [8].

Usando le equazioni di Codazzi e il teorema di Chow, dimostriamo un risultato di caratterizzazione per le ipersuperfici regolari non Levi piatte in $\mathbb{C}^{n+1}$, la cui direzione caratteristica unitaria T è geodetica. Denotando con h la seconda forma fondamentale di M e con $h_{TT} := h(T, T)$, il principale risultato è:

Teorema 1.1. *Sia M una ipersuperficie regolare non Levi piatta in $\mathbb{C}^{n+1}$. Se la direzione caratteristica T è geodetica per M, allora h_{TT} è costante.*

Il Teorema 1.1 non può essere invertito. Infatti, nella sezione 4 mostreremo un'ipersuperficie non Levi piatta la cui direzione caratteristica T non è geodetica, ma h_{TT} è costante. Come applicazione del Teorema 1.1 otteniamo un risultato di caratterizzazione delle sfere, di tipo Alexandrov:

Corollario 1.1. *Sia M un'ipersuperficie reale compatta in $\mathbb{C}^{n+1}$ con curvatura media di Levi costante positiva. Se la direzione caratteristica T è geodetica per M, allora M è una sfera.*

Il problema di caratterizzare ipersuperfici compatte con curvatura media di Levi costante positiva ha recentemente ricevuto attenzione da diversi autori. Klingenberg in [4] mostra che se la direzione caratteristica di un'ipersuperficie compatta è geodetica e la forma di Levi è diagonale (reale) e definita positiva, allora M è una sfera. Hounie e Lanconelli in [3] dimostrano che il bordo di un dominio di Reinhardt compatto in $\mathbb{C}^2$ con curvatura di Levi costante è una sfera. Monti e Morbidelli in [9] provano che ogni ipersuperficie Levi ombelicale, per $n \geq 2$, è contenuta in una sfera o in un insieme di tipo cilindro.
Il seminario è organizzato nel seguente modo. Nella sezione 2 introduciamo le notazioni e mostriamo che la direzione caratteristica T è geodetica se e solo se è una direzione principale per M. Nella sezione 3 ricordiamo le equazioni di Codazzi per la connessione di Levi-Civita. Infine nella sezione 4 dimostriamo il Teorema 1.1 e il Corollario 1.1.

2. Linee di curvatura e geodetiche

Ricordiamo alcuni fatti elementari per fissare le notazioni.

Sia $n \geq 1$ e consideriamo $\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$ con coordinate locali $x_1, y_1 \dots, x_{n+1}, y_{n+1}$ con l'usuale identificazione $z_k = x_k + iy_k$ per $k = 1, \dots, n+1$.

Definizione 2.1. *(Metrica)*
La metrica standard di $\mathbb{R}^{2n+2}$ è l'applicazione bilineare e simmetrica definita da

$$g : T(\mathbb{R}^{2n+2}) \times T(\mathbb{R}^{2n+2}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$g(\partial_{x_k}, \partial_{x_j}) = g(\partial_{y_k}, \partial_{y_j}) = \delta_{kj},$$

$$g(\partial_{x_k}, \partial_{y_j}) = 0, \ k, j = 1, \dots, n+1$$

Osservazione 2.1. *L'estensione per $\mathbb{C}$-linearità di g è una metrica hermitiana su $\mathbb{C}^{n+1}$ che soddisfa*

$$g(\partial_{z_k}, \partial_{z_j}) = g(\partial_{\bar{z}_k}, \partial_{\bar{z}_j}) = 0,$$
$$g(\partial_{z_k}, \partial_{\bar{z}_j}) = g(\partial_{\bar{z}_k}, \partial_{z_j}) = \frac{1}{2}\delta_{kj}, \ k, j = 1, \dots, n+1$$

Definizione 2.2. *(Struttura complessa)*
La struttura complessa canonica J definita su $T(\mathbb{R}^{2n+2})$ è l'endomorfismo reale, che soddisfa $J^2 = -Id$, definito da:

$$J : T(\mathbb{R}^{2n+2}) \longrightarrow T(\mathbb{R}^{2n+2})$$

$$J(\partial_{x_k}) = \partial_{y_k}, \quad J(\partial_{y_k}) = -\partial_{x_k}, \ k = 1, \dots, n+1$$

Osservazione 2.2. *Si noti che la struttura complessa J è compatibile con la metrica g, cioè: per ogni coppia di campi X, Y in $T(\mathbb{R}^{2n+2})$ vale*

$$g(X, Y) = g(J(X), J(Y))$$

Da questo si deduce quindi che l'endomorfismo J è un'isometria ortogonale, cioè

$$|X|^2 = g(X, X) = g(J(X), J(X)) = |J(X)|^2$$

e

$$g(X, J(X)) = 0$$

per ogni $X \in T(\mathbb{R}^{2n+2})$.

Osservazione 2.3. *Un calcolo diretto mostra che l'estensione per* $\mathbb{C}$*-linearità di* J *ammette allora come autovalori* $\pm i$, *e come autospazi relativi il fibrato olomorfo e quello antiolomorfo, cioè:*

$$J : T(\mathbb{C}^{n+1}) \longrightarrow T(\mathbb{C}^{n+1})$$

$$J(\partial_{z_k}) = i\partial_{z_k}, \quad J(\partial_{\bar{z}_k}) = -i\partial_{\bar{z}_k},\ k = 1, \dots, n+1$$

Definizione 2.3. *(Connessione)*
Siano $X, Y \in T(\mathbb{R}^{2n+2})$ *con*

$$Y = a^k \partial_{x_k} + b^k \partial_{y_k}$$

dove si è usata la convenzione di sommare gli indici uguali in alto e in basso. La connessione di Levi-Civita ∇ *associata a* g *agisce nel seguente modo:*

$$\nabla_X Y = X(a^k)\partial_{x_k} + X(b^k)\partial_{y_k}$$

In altre parole, essendo in $\mathbb{R}^{2n+2}$, *la derivata covariante è semplicemente la derivata direzionale. Anche l'estensione per* $\mathbb{C}$*-linearità di* ∇ *agisce come derivata direzionale.*

Osservazione 2.4. *Anche la connessione* ∇ *e l'estensione per* $\mathbb{C}$*-linearità, hanno la ulteriore proprietà di essere compatibili con la struttura complessa* J, *cioè per ogni coppia di campi* X, Y *in* $T(\mathbb{R}^{2n+2})$ *vale*

$$J(\nabla_X Y) = \nabla_X J(Y)$$

o equivalentemente per ogni Z, W *in* $T(\mathbb{C}^{n+1})$ *si ha*

$$J(\nabla_Z W) = \nabla_Z J(W)$$

Sia allora M un'ipersuperficie in $\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$ e sia TM lo spazio tangente a M. Quindi $dim(M) = dim(TM) = 2n+1$. Denotiamo con N la normale unitaria, e definiamo la direzione caratteristica $T \in TM$ come:

$$T = J(N) \tag{1}$$

La distribuzione complessa massimale o distribuzione di Levi HM è il più grande sottospazio di TM invariante per l'azione di J

$$HM = TM \cap J(TM) \tag{2}$$

cioè, un campo $X \in TM$ appartiene ad HM se e solo se anche $J(X) \in HM$. Allora ogni elemento in TM si può scrivere come somma diretta di un elemento di HM e uno dello spazio generato da T, in formule

$$TM = HM \oplus \mathbb{R}T \tag{3}$$

dove $dim(HM) = 2n$ e la somma è g-ortogonale:

$$\forall X \in HM \quad g(T, X) = 0 \tag{4}$$

Nel seguito useremo la seguente notazione: useremo una tilde per gli oggetti in $\mathbb{C}^{n+1}$ che inducono su M i relativi oggetti indotti. Ad esempio, con $\tilde{g}$ ci riferiremo alla metrica su $\mathbb{C}^{n+1}$ e con g alla metrica su M indotta da $\tilde{g}$.
La seconda forma fondamentale h è definita nel seguente modo:

$$h(V, W) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_V W, N) = g(A(V), W), \quad \forall\, V, W \in TM \tag{5}$$

dove A è l'operatore di Weingarten, definito da

$$A(V) = -\tilde{\nabla}_V N,\ \forall\, V \in TM \tag{6}$$

La forma di Levi l è l'operatore hermitiano su HM definito come segue:
$\forall\, X_1, X_2 \in HM$, se $Z_1 = X_1 - iJ(X_1)$ e $Z_2 = X_2 - iJ(X_2)$, allora

$$l(X_1, X_2) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{Z_1} \bar{Z}_2, N) \tag{7}$$

Possiamo confrontare la forma di Levi con la seconda forma fondamentale usando l'identità (si veda [2], Chap.10, Theorem 2):

$$\forall\, X \in HM, \quad l(X, X) = h(X, X) + h(J(X), J(X)) \tag{8}$$

Diciamo che M è *nonLevipiatta* se in ogni punto di M la forma di Levi non è identicamente zero.

La curvatura media classica H e la curvatura media di Levi L sono rispettivamente:

$$H = \frac{1}{2n+1} tr(h), \quad L = \frac{1}{n} tr(l) \tag{9}$$

dove tr è il canonico operatore di traccia. Un calcolo diretto porta alla relazione tra H e L [7]:

$$H = \frac{1}{2n+1}(2nL + h_{TT}) \tag{10}$$

Definizione 2.4. *Sia $V \in TM$. V è un (campo) autovettore per A (o per h) se esiste una funzione (autovalore) $\lambda : M \to \mathbb{R}$ tale che $A(V) = \lambda V$ su M. V si dice direzione principale.*

Sia γ la curva integrale di V, cioè $\gamma \subseteq M$ è una curva tale che $\dot{\gamma} = V$. Se V è una direzione principale allora diremo che γ è una linea di curvatura. Inltre, se V è unitario, allora il valore di λ è $\lambda = h(V,V)$ poichè

$$h(V,V) = g(A(V),V) = g(\lambda V, V) = \lambda g(V,V) = \lambda$$

Definizione 2.5. *Sia $V \in TM$. V è geodetico se $\nabla_V V = 0$ o equivalentemente se $\tilde{\nabla}_V V \in \mathbb{R}N$, cioè se il campo $\tilde{\nabla}_V V$ è normale a M. La curva integrale di V si chiama geodetica.*

Notiamo che localmente questa definizione coincide con quella di curva minimizzante il funzionale distanza $d_{p,q}(\gamma)$, indotto dalla metrica $\tilde{g}$ di $\mathbb{C}^{n+1}$, cioè:

siano $p, q \in M$, abbastanza vicini, per tutte le curve $\gamma : [t_1, t_2] \to M$ tali che $\gamma(t_1) = p$ e $\gamma(t_2) = q$, il funzionale distanza è

$$d_{p,q}(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}dt$$

e la geodetica è la curva che realizza $min\big(d_{p,q}(\gamma)\big)$

Lemma 2.1. *Sia T la direzione caratteristica di M. T è una direzione principale se e solo se è geodetica.*

Dimostrazione. Se T è una direzione principale, vale

$$A(T) = \lambda T, \quad \lambda = h_{TT} \tag{11}$$

Per ogni $X \in HM$, usando (4), si ha che

$$g(\tilde{\nabla}_T N, X) = g(-A(T), X) = -h_{TT} g(T, X) = 0 \tag{12}$$

Allora per la compatibilità della struttura complessa J con la connessione $\tilde{\nabla}$ e con la metrica $\tilde{g}$, per ogni $X \in HM$ abbiamo

$$0 = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_T N, X) = \tilde{g}(J(\tilde{\nabla}_T N), J(X)) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_T T, J(X)) \tag{13}$$

Inoltre T è unitario ($g(T, T) = 1$), e derivando lungo T si ha

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_T T, T) = 0 \tag{14}$$

Quindi, usando (13) e (14) si ottiene

$$\tilde{\nabla}_T T \in \mathbb{R}N, \quad \nabla_T T = 0 \tag{15}$$

Il viceversa si dimostra allo stesso modo. $\square$

3. Un'equazione di Codazzi

In questa sezione scriveremo una particolare equazione di Codazzi usando le notazioni della precedente sezione. Ricordiamo le equazioni di Codazzi (si veda ad esempio [5]) come segue: per ogni $V, W, Z \in T(M)$

$$(\nabla_V h)(W, Z) = (\nabla_W h)(V, Z) \tag{16}$$

dove

$$(\nabla_V h)(W, Z) = V(h(W, Z)) - h(\nabla_V W, Z) - h(W, \nabla_V Z) \tag{17}$$

Riscrivendo le equazioni (16) con $V = X$ e $W = Z = T$, dove T è la direzione caratteristica, otteniamo

$$(\nabla_X h)(T, T) = (\nabla_T h)(X, T) \tag{18}$$

Sia

$$B = \{T, X_1, \ldots, X_n, J(X_1), \ldots, J(X_n)\} = \{T, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{2n}\}$$

una base ortonormale di TM. Per $k = 1, \ldots, 2n$, denotiamo

$$\Gamma^k_{XT} = g(\nabla_X T, X_k), \quad \Gamma^k_{TX} = g(\nabla_T X, X_k), \quad \Gamma^T_{TX} = g(\nabla_T X, T)$$

In particolare si ha

$$\Gamma^T_{TX} = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_T X, T) = -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_T T, X) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_T N, J(X))$$
$$= -g(A(T), J(X)) = -h(T, J(X)).$$

Quindi, con l'usuale convenzione di sommare gli indici uguali in alto e in basso, (18) diventa:

$$X(h_{TT}) = T(h(T,X)) + \Big(2\Gamma^k_{XT} - \Gamma^k_{TX}\Big)h(X_k, T) - h_{TT}h(T, J(X)) - h(X, \nabla_T T) \tag{19}$$

4. Dimostrazione del Teorema 1.1 e del Corollario 1.1

In questa sezione proveremo prima il Teorema 1.1 usando (19) e il Teorema di Chow. Poi, usando il classico Teorema di Alexandrov per le ipersuperfici compatte, dimostreremo il risultato di simmetria, Corollario 1.1. Premettiamo un lemma:

Lemma 4.1. *Se M è non Levi piatta, allora M ha la seguente proprietà di H-connettività: per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste una curva $\gamma : [0,1] \to M$, tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e $\dot{\gamma}(t) \in HM$ per ogni $t \in [0,1]$.*

Dimostrazione. Se M è non Levi piatta, allora in ogni punto di M esiste almeno un campo $X \in HM$ tale che $l(X,X) \neq 0$. Con $Y = J(X)$ e $Z = X - iY$, si ha

$$l(X,X) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_Z \bar{Z}, N) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_{X-iY} X + iY, N) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X X + \tilde{\nabla}_Y Y, N) =$$

$$= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X, T) = \tilde{g}([X,Y], T) \neq 0$$

Questo significa che per ogni base $\{X_j, j = 1, \dots, 2n\}$ di HM vale la condizione di rango di Hörmander

$$\dim\Big(span\big\{X_j, [X_\ell, X_k], \quad j,k,\ell = 1,\dots,2n\big\}\Big) = 2n+1 \tag{20}$$

Dal teorema di Chow otteniamo la proprietà di H-connettività desiderata. $\square$

Dimostrazione del Teorema 1.1. Dal Lemma 2.1 la direzione caratteristica T è una direzione principale, allora per ogni $V \in HM$ vale

$$h(T,V) = g(A(T),V) = h_{TT}g(T,V) = 0$$

Inoltre, poichè T è geodetico, allora $\nabla_T T = 0$ su M. Sia ora $X \in HM$, l'equazione (19) diventa

$$\begin{aligned} X(h_{TT}) =& T(h(T,X)) + \left(2\Gamma^k_{XT} - \Gamma^k_{TX}\right)h(X_k,T)+ \\ & - h_{TT}h(T,J(X)) - h(X,\nabla_T T) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

quindi h_{TT} è costante su HM.

Poichè M è non Levi piatta, dal Lemma 4.1, per ogni coppia di punti $p,q \in M$ esiste una curva $\gamma : [0,1] \to M$, tale che $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e $\dot\gamma(t) \in HM$ per ogni $t \in [0,1]$. Allora usando un'arbitraria base $\{X_1,\dots,X_{2n}\}$ di HM,si ottiene:

$$\dot\gamma(h_{TT}) = \alpha^k X_k(h_{TT}) = 0$$

Così h_{TT} è costante lungo γ e quindi su M. $\square$

In generale il viceversa del Teorema 1.1 non vale, cioè se il coefficiente della seconda forma fondamentale h_{TT} è costante, non si può concludere che la direzione caratteristica T è geodetica (o direzione principale), come mostra il seguente esempio.

Esempio 4.1. *In $\mathbb{C}^2$ con coordinate $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1,2$, consideriamo il dominio*

$$\Omega = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : f(x_1,y_1,x_2,y_2) = x_1^2 + (ay_1 + bx_2)^2 - 1 < 0\}$$

con a,b costanti tali che $a^2 + b^2 = 1$. Sia M l'ipersuperficie reale $M := \partial\Omega$. Vogliamo mostrare che se $0 < a < 1$ allora M è non Levi piatta e $h_{TT} = a^2$, ma T non è geodetica. Infatti, sia $r = ay_1 + bx_2$, allora su M si ha

$$Df = 2(x_1, ar, br, 0), \quad |Df| = 2$$

dove D è il gradiente euclideo in $\mathbb{R}^4$. Così:

$$N = -(x_1\partial_{x_1} + ar\partial_{y_1} + br\partial_{x_2}), \quad T = J(N) = ar\partial_{x_1} - x_1\partial_{y_1} - br\partial_{y_2}$$

Allora, poichè $T(r) = -ax_1$, si ha

$$h_{TT} = h(T,T) = \tilde g(\tilde\nabla_T T, N) = -T(ar)x_1 - T(x_1)ar = a^2x_1^2 + a^2r^2 = a^2$$

Notiamo adesso che M è isometrica al cilindro $S^1 \times \mathbb{R}^2$ le cui tre curvature principali sono 1,0,0; quindi la curvatura media classica di M è $H = \frac{1}{3}$. Da (10) segue che $2L = b^2$, e visto che $b \neq 0$ allora M è non Levi piatta. Inoltre, poichè

$$\tilde{\nabla}_T T = T(ar)\partial_{x_1} - T(x_1)\partial_{y_1} - T(br)\partial_{y_2} \notin \mathbb{R}N$$

allora T non è geodetica.

Come conseguenza del Teorema 1.1 otteniamo subito il Corollario 1.1.

Dimostrazione del Corollario 1.1. Se M ha curvatura media di Levi costante positiva, allora M è non Levi piatta; inoltre se T è geodetica, si ha che h_{TT} è costante su M. Usando la compattezza di M, da (10) e dal classico teorema di Alexandrov [1] otteniamo che M è una sfera. □

Riferimenti bibliografici

[1] A.D. Alexandrov, *A characteristic property of spheres* , Ann. Mat. Pura Appl. 58 (1962), no. 4, 303-315

[2] A. Bogges, *CR Manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex*, Studies in Advanced Mathematics, (1991)

[3] J. Hounie, E. Lanconelli, *An Alexandrov type theorem for Reinhardt domains of* $\mathbb{C}^2$, *Recent progress on some problems in several complex variables and partial differential equations*, Contemporary Math, 400 (2006), 129-146

[4] W.Klingenberg, *Real hypersurfaces in Kahler manifolds*, Asian J. Math. 5 (2001), no. 1, 1-17

[5] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Wiley, (1969)

[6] A. Montanari, E. Lanconelli, *Pseudoconvex Fully Nonlinear Partial Differential Operators. Strong Comparison Theorems.* J. Differential Equations 202 (2004), no. 2, 306-331

[7] V. Martino, *La forma di Levi per ipersuperfici in* $\mathbb{C}^{N+1}$ *e l'equazione di pseudocurvatura media per grafici reali*, Tesi di Dottorato

[8] V. Martino, A. Montanari, *On the characteristic direction of real hypersurfaces in* $\mathbb{C}^{N+1}$ *and a symmetry result*, preprint

[9] R. Monti and D. Morbidelli, *Levi umbilical surfaces in complex space*, J. Reine Angew. Math., 603 (2007), 113-131.