Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2008-09

Daniele Morbidelli

Campi di Hörmander non regolari e distanze di controllo[1]

12 febbraio 2009

[1]Lavoro in collaborazione con Annamaria Montanari

Abstract

We prove a ball-box theorem for nonsmooth Hörmander vector fields of step $s \geq 2$. Our proof uses only elementary analysis techniques. In particular we de not rest on algebraic tools, like formal series and the Campbell–Hausdorff formula. Moreover our arguments work in low regularity situations (roughly speaking, we need that the commutators involved in the Hörmander condition are Lipschitz continuous).

1. Introduzione

Sono dati dei campi vettoriali $X_1, \dots, X_m$ in $\mathbb{R}^n$. Ci interessiamo al problema di trovare risultati di struttura per le palle $B(x,r)$ della distanza di controllo associata ai campi.

La nozione di distanza di controllo appare per la prima volta nei lavori di Fefferman e Phong [FP], per il caso di operatori subellittici in forma di divergenza, e di Franchi e Lanconelli [FL1], per il caso di campi di tipo diagonale nonregolari. Il punto di partenza del nostro lavoro è un notevole articolo di Nagel Stein e Wainger [NSW], nel quale gli autori provano (tra l'altro) un risultato di "rappresentazione approssimata" per le palle di controllo associate a dei campi di Hörmander X_j, in forma di immagini esponenziali di opportune scatole. Come conseguenza gli autori provano tra le altre cose la proprietà di doubling per la misura delle palle.

Lo scopo del lavoro che viene presentato qui, ultimo della serie [M, LM, MM1], è quello di provare un teorema di struttura per le palle di controllo di campi di Hörmander che abbia le seguenti caratteristiche:

1. valga in condizioni di regolarità minime (regolarità $C^{s-1,1}$ per campi di passo s);
2. non richieda la conoscenza di strumenti algebrici troppo sofisticati (in particolare la formula di Campbell–Hausdorff);
3. utilizzi delle mappe esponenziali adatte per provare la disuguaglianza di Poincaré.

Preliminari. Innanzitutto, dato un campo X, usiamo la notazione $e^{tX}x$, oppure $e^{tX}(x)$ o $\exp(tX)(x)$, per indicare la soluzione della ode $\frac{d}{dt}e^{tX}x = X(e^{tX}x)$ con valore x al tempo $t = 0$. [2]

Consideriamo m campi vettoriali $X_1, \dots, X_m$ in $\mathbb{R}^n$. Introduciamo la seguente notazione per i commutatori: dato $\ell \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \in \{1, \dots, m\}^\ell$, scriviamo $X_\alpha = [X_{\alpha_1}, \cdots, [X_{\alpha_{\ell-1}}, X_{\alpha_\ell}]]$. Indichiamo con $|\alpha| = \ell$ la *lunghezza* di X_α.

Assumiamo che i campi X_j siano di classe $C^{s-1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ [3] e supponiamo che valga la condizione di Hörmander di passo s, cioè $\{X_\alpha(x) : |\alpha| \le s\}$ genera $\mathbb{R}^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

---

[2] Con un piccolo abuso di notazione confondiamo il campo vettoriale X in $\mathbb{R}^n$ con la funzione vettoriale delle sue componenti in $\mathbb{R}^n$.

[3] In [MM2] c'è un'ipotesi un po' meno restrittiva, ma un po' più difficile da scrivere.

Distanza di controllo. Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con $d(x,y)$ la distanza di controllo, cioè l'estremo inferiore degli $r > 0$ tali che esiste un cammino lipschitziano $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ che soddisfi $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ e $\dot\gamma = \sum_{j=1}^m b_j X_j(\gamma)$, per quasi ogni $t \in [0,1]$. Qui le funzioni misurabili b_j devono soddisfare $|b_j(t)| \le r$ per quasi ogni t. Indicheremo le palle corrispondenti con $B(x,r)$.

Mappe esponenziali di Nagel Stein e Wainger. Indichiamo con $Y_1, \dots, Y_q$ tutti i commutatori X_α con lunghezza $|\alpha| \le s$ e scriviamo ℓ_i o $\ell(Y_i)$ per indicare la lunghezza di Y_i . Dato $\mathcal{I} = (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, q\}^n$, poniamo

$$\Phi_{\mathcal{I}}(x,h) = \exp(h_1 Y_{i_1} + \cdots + h_n Y_{i_n})(x),$$

$$\lambda_{\mathcal{I}}(x) = \det(Y_{i_1}(x), \cdots, Y_{i_n}(x)) = \det \frac{\partial \Phi_{\mathcal{I}}}{\partial h}(x,0),$$

$$\|h\|_{\mathcal{I}} = \max_{j=1,\dots,n} |h_j|^{1/\ell_{i_j}}, \qquad \mathrm{Box}_{\mathcal{I}}(r) = \{h \in \mathbb{R}^n : \|h\|_{\mathcal{I}} < r\}$$

dove $\ell(\mathcal{K}) = \ell_{k_1} + \cdots + \ell_{k_n}$.

Definizione 1.1 (terna quasi-massimale)**.** *Sia* $\mathcal{I} \in \{1, \dots, q\}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $r > 0$. *Diciamo che* $(\mathcal{I}, x, r)$ *è quasi massimale se*

$$|\lambda_{\mathcal{I}}(x)| r^{\ell(\mathcal{I})} > \frac{1}{2} \max_{\mathcal{K} \in \{1,\dots,q\}^n} |\lambda_{\mathcal{K}}(x)| r^{\ell(\mathcal{K})}. \tag{1}$$

La condizione (1) è cruciale e appare per la prima volta in [NSW]. [4]

Il risultato principale in [NSW] può essere enunciato cosí:

Teorema 1.1 (NSW)**.** *Se* X_j *sono dei campi di classe* C^∞ *che soddisfano la condizione di Hörmander di passo* s*, allora, preso un compatto* K*, esistono* $\varepsilon_0, \varepsilon_1, r_0 < 1$ *e* $C_0 > 1$ *tali che, data una terna quasi-massimale* $(\mathcal{I}, x, r)$, $x \in K$, $r < r_0$, *la mappa* $h \mapsto \Phi(h) := \Phi_{\mathcal{I}}(x,h)$ *ha le seguenti proprietà.*

(A) *Valgono le stime*

$$\frac{1}{4}|\lambda_{\mathcal{I}}(x)| \le \left| \det\left(\frac{\partial}{\partial h}\Phi(h)\right)\right| \le 4|\lambda_{\mathcal{I}}(x)|,$$

per ogni $h \in \mathrm{Box}_{\mathcal{I}}(\varepsilon_0 r)$.

[4] Essa permette di rendere rigorose alcune dimostrazioni poco corrette presenti in letteratura. Si veda l'osservazione in [St] per un interessante commento.

(B) *Vale l'inclusione* $B(x, \varepsilon_1 r) \supset \Phi(\mathrm{Box}_{\mathcal{I}}(\varepsilon_0 r)) \supset B_\rho(x, C_0^{-1} r)$. [5]

(C) *La mappa* $\Phi_{\mathcal{I}}(x, \cdot)$ *è iniettiva su* $\Phi_{\mathcal{I}}(\varepsilon_0 r)$.

Dal teorema precedente si deduce subito che la misura della palla ha un comportamento polinomiale.

Corollario 1.1. *Vale, con* $x \in K, r < r_0$,

$$|B(x,r)| \simeq \sum_{\mathcal{I}} |\lambda_{\mathcal{I}}(x)|\, r^{\ell(\mathcal{I})}.$$

In particolare vale la proprietà di doubling $|B(x,2r)| \le C|B(x,r)|$, *per ogni* $x \in K, r < r_0$.

Esempio 1.1. *Un esempio interessante per capire il risultato in* [NSW] *è dato dai campi* $X_1 = \partial_1$ *e* $X_2 = x_1\partial_2$ *in* $\mathbb{R}^2$. *Qui*

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 = \partial_1, && \ell_1 = 1 \\ Y_2 &= X_2 = x_1\partial_2, && \ell_2 = 1 \\ Y_3 &= [X_1, X_2] = \partial_3, && \ell_3 = 2. \end{aligned}$$

Quindi $\lambda_{(1,2)}(x) = |x_1|$, $\lambda_{(1,3)}(x) = 1$ *e pertanto, come provato anche da* [FL1],

$$|B(x,r)| \simeq |x| r^2 + r^3.$$

La prova del Teorema 1.1 richiede un calcolo molto preciso delle derivate $\partial\Phi_{\mathcal{I}}/\partial h_j$. Vista la forma delle $\Phi_{\mathcal{I}}$, esso coinvolge inevitabilmente la formula di Campbell–Hausdorff. Questo significa che il risultato può essere difficilmente generalizzato al caso di campi non regolari.

Un altro aspetto migliorabile delle mappe $\Phi_{\mathcal{I}}$ è che esse non suggeriscono un modo di connettere il punto x con il punto $\Phi_{\mathcal{I}}(x,h)$ attraverso curve orizzontali. Quindi non si prestano direttamente per essere usate nella prova di disuguaglianze integrali come la disuguaglianza di Poincaré (per la quale è necessario un ulteriore lavoro, cfr. [J]).

[5] Qui B_ϱ indica la palla rispetto alla distanza

$$\varrho(x,y) = \inf\{r > 0 : \exists \gamma \in \mathrm{Lip}([0,1], \mathbb{R}^n), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \text{ con } \dot\gamma = \sum_{j=1}^{q} b_j Y_j(\gamma) \quad \text{a.e. e } |b_j| \le r^{\ell_j}\}.$$

Nei lavoro [M], sempre nel contesto dei campi C^∞, si sostituiscono le mappe $\Phi_{\mathcal{I}}$ con delle mappe $E_{\mathcal{I}}$ che hanno la forma

$$E_{\mathcal{I}}(x,h) = \exp_*(h_1 Y_{i_1}) \circ \cdots \circ \exp_*(h_1 Y_{i_n})(x).$$

Le mappe $\exp_*$ sono degli "esponenziali approssimati" di commutatori (definiti sotto). Si comportano in prima approssimazione come gli esponenziali dei commutatori, ma hanno la proprietà di essere fattorizzabili come prodotti di esponenziali di campi di lunghezza 1. Questo risultato fornisce un'altra dimostrazione delle disuguaglianza di Poincaré (Jerison [J]), secondo lo schema individuato in [LM].

Un primo risultato nel caso nonregolare è stato ottenuto in [MM1], dove si prova la disuguaglianza di Poincaré per campi vettoriali di passo 2 sostanzialmente di classe $C^{1,1}$.

Infine, in un recente preprint [BBP], Bramanti, Brandolini e Pedroni hanno ottenuto una prova della proprietà di doubling e della disuguaglianza di Poincaré per campi di passo s, in condizioni di regolarità sono analoghe alle nostre. Il lavoro [BBP] utilizza i risultati in [NSW, M, LM], mentre il risultato che presentiamo qui richiede solo strumenti elementari e un po' di pazienza.

2. Enunciati dei risultati principali in [MM2].

Lavoriamo con campi di Hörmander di passo s e di classe $C^{s-1,1}$.

2.1. Esponenziali approssimati di commutatori. Dati $Z_1, \dots, Z_\ell$ e $\tau > 0$, definiamo, come in [NSW], [M] e [MM1],

$$\begin{aligned} C_\tau(Z_1) &= \exp(\tau Z_1), \\ C_\tau(Z_1, Z_2) &= \exp(-\tau Z_2)\exp(-\tau Z_1)\exp(\tau Z_2)\exp(\tau Z_1), \\ &\vdots \\ C_\tau(Z_1, \dots, Z_\ell) &= C_\tau(Z_2, \dots, Z_\ell)^{-1}\exp(-\tau Z_1) C_\tau(Z_2, \dots, Z_\ell)\exp(\tau Z_1). \end{aligned}$$

Poi, preso $X_\alpha = [X_{\alpha_1}, \dots, [X_{\alpha_{\ell-1}}, X_{\alpha_\ell}] \dots]$

$$\exp_*(tX_I) = \begin{cases} C_{t^{1/\ell}}(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_\ell}), & \text{se } t > 0, \\ C_{|t|^{1/\ell}}(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_\ell})^{-1}, & \text{se } t < 0. \end{cases} \tag{2}$$

Poi, dato $\mathcal{I} = (i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, q\}^n$, per $x \in K$ e $h \in \mathbb{R}^n$, $|h| \le C^{-1}$

$$E_{\mathcal{I}}(x, h) = \exp_*(h_1 Y_{i_1}) \cdots \exp_*(h_n Y_{i_n})(x), \tag{3}$$

Teorema 2.1 ([MM2]). *Per ogni commutatore X_α di lunghezza $|\alpha| = \ell \le s$, vale per $x \in K$ e $t > 0$ piccolo*

$$\frac{d}{dt}\exp_*(tX_\alpha)x = X_\alpha(\exp_*(tX_\alpha)x) + \sum_{|\beta|=\ell+1}^{s} c_\beta t^{(|\beta|-\ell)/\ell} X_\beta\big(\exp_*(tX_J)x\big) + O_{s+1}\big(|t|^{(s+1-\ell)/\ell}\big),$$

dove la somma è vuota se $\ell = s$, le c_β sono delle costanti. Il resto $O_{s+1}\big(|t|^{(s+1-\ell)/\ell}\big)$ ha una forma integrale *e ammette una stima del tipo*

$$\Big|O_{s+1}\big(|t|^{(s+1-\ell)/\ell}\big)\Big| \le C\Big(\sum_{|I|\le s} \|\nabla X_I\|_{L^\infty}\Big)|t|^{(s+1-\ell)/\ell}$$

Ora enunciamo il risultato principale in [MM2]. Se una $n-$upla $\mathcal{I}$ è fissata e x è fissato, scriviamo $E(x, h)$ o $E(h)$ invece di $E_{\mathcal{I}}(x, h)$.

Teorema 2.2. *Per ogni compatto K, esistono $r_0, \varepsilon_0 < 1$ e $C_0 > 1$ tali che, se $(\mathcal{I}, x, r)$ è una tripla quasi-massimale, con $x \in K, r < r_0$, allora*

(A) *La mappa $E \equiv E_{\mathcal{I}}(x, \cdot) : \mathrm{Box}_{\mathcal{I}}(\varepsilon_0 r) \to E(\mathrm{Box}_{\mathcal{I}}(\varepsilon_0 r))$ è un omeomorfismo locale lipschitziano che soddisfa quasi dappertutto*

$$\frac{\partial}{\partial h_j}E(h) = Y_{i_j}(E(h)) + \sum_{|\beta|=\ell_j+1}^{s} a_j^\beta(h) X_\beta(E(h)) + \omega_j(x, h).$$

Inoltre, per quasi ogni $h \in \mathrm{Box}_{\mathcal{I}}(\varepsilon_0 r)$ valgono le stime

$$|a_j^\beta(h)| \le C_0 \|h\|_{\mathcal{I}}^{|\beta|-\ell_{i_j}}, \qquad |\omega_j(x, h)| \le C_0 \|h\|_{\mathcal{I}}^{s+1-\ell_{i_j}}$$

e

$$\frac{1}{4}|\lambda_{\mathcal{I}}(x)| \le \left|\det\Big(\frac{\partial}{\partial h}E_{\mathcal{I}}(x, h)\Big)\right| \le 4|\lambda_{\mathcal{I}}(x)|.$$

(B) *Vale l'inclusione $E(\mathrm{Box}_{\mathcal{I}}(\varepsilon_0 r)) \supset B_\rho(x, C_0^{-1} r)$.*

(C) *La mappa $E \equiv E_{\mathcal{I}}(x, \cdot)$ è iniettiva sulla scatola $\mathrm{Box}_{\mathcal{I}}(\varepsilon_0 r)$.*

2.2. **Conseguenze.** Dati $X_1, \dots, X_m$ campi di passo s e di classe $C^{s-1,1}_{loc}$, introduciamo la notazione $|Xf|^2 = \sum_j (X_j f)^2$.

Corollario 2.1. *Consideriamo una coppia di aperti limitati $\Omega' \subset\subset \Omega$. Allora*

$$|B(x,r)| \sim \sum_{\mathcal{I}} |\lambda_{\mathcal{I}}(x)|\, r^{\ell(\mathcal{I})} \tag{4}$$

$$B(x,r) \supset B_{\mathrm{Eucl}}(x, C^{-1} r^s), \tag{5}$$

dove $x \in \Omega'$ e $r < r_0$. In particolare la misura è doubling. Inoltre vale

$$\int_{B(x,r)} |f(x) - f_B| dx \le Cr \int_{B(x,r)} |Xf(x)| dx, \tag{6}$$

per ogni $f \in C^1(\Omega)$ $x \in \Omega$ e $r \le r_0$ piccolo a sufficienza. Infine, per ogni $\varepsilon < 1/s$ esiste $C_\varepsilon < \infty$ tale che, per ogni $f \in C^1(\Omega)$,

$$[f]^2_\varepsilon := \int\limits_{\substack{\Omega' \times \Omega', \\ d(x,y) \le r_0}} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+2\varepsilon}} dx dy \le C_\varepsilon \int_\Omega |Xf(y)|^2 dy. \tag{7}$$

Commento: tutti i risultati dei due corollari sono già noti nel caso smooth. Qui li generalizziamo a campi nonregolari. Precisamente, la formula (4) è provata da Nagel Stein e Wainger [NSW]. Fefferman e Phong [FP] provano (anche per operatori non somma di quadrati), che l'inclusione (5) è equivalente alla stima (7), però con $\varepsilon = 1/s$. La disuguaglianza di Poincaré (6) è dovuta a Jerison. Infine la stima subellittica (7) è un classico risultato di Hörmander [H]. Lo schema della prova di (7) a partire dal Teorema 2.2 è dovuto a E. Lanconelli.

Riferimenti bibliografici

[BBP] M. Bramanti, L. Brandolini, M. Pedroni, Basic properties of nonsmooth Hörmander's vector fields and Poincaré's inequality, preprint arXiv:0809.2872.

[FP] C. Fefferman, D. H. Phong, Subelliptic eigenvalue problems. Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I, II (Chicago, Ill., 1981), 590–606, Wadsworth Math. Ser., Wadsworth, Belmont, CA, 1983.

[FL1] B. Franchi, E. Lanconelli, Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. (French) [A metric associated with a class of degenerate elliptic operators] Conference on linear partial and pseudodifferential operators (Torino, 1982). Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 1983, Special Issue, 105–114 (1984).

[H] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math. **119** (1967), 147–171.

[J] D. Jerison, The Poincaré inequality for vector fields satisfying the Hörmander condition, Duke Math. J. **53** (1986), No. 2, 503–523.

[LM] E. Lanconelli, D. Morbidelli, On the Poincaré inequality for vector fields. Ark. Mat. **38** (2000), 327–342.

[MM1] A. Montanari, D. Morbidelli, Balls defined by nonsmooth vector fields and the Poincaré inequality. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **54** (2004), 431–452.

[MM2] A. Montanari, D. Morbidelli, Nonsmooth Hörmander vector fields and their control balls, preprint, http://www.dm.unibo.it/~morbidel/steps_2.pdf.

[M] D. Morbidelli, Fractional Sobolev norms and structure of Carnot–Carathéodory balls for Hörmander vector fields. Studia Math. **139** (2000), 213–244.

[NSW] A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger, Balls and metrics defined by vector fields I: basic properties, Acta Math. **155** (1985), 103–147.

[RaS] F. Rampazzo, H. J. Sussmann, Set–valued differential and a nonsmooth version of Chow's theorem, Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control; Orlando, Florida, 2001.

[St] E. M. Stein, Some geometrical concepts arising in harmonic analysis. GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999). Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part I, 434–453.