Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2008-09

Marco Mughetti

Ipoellitticità per una somma di quadrati complessi[1]

5 marzo 2009

[1]Lavoro in collaborazione con A.Bove e D.Tartakoff

Abstract

We consider a linear partial differential operator representable as a sum of squares $P = \sum_j X_j^* X_j$ of complex vector fields X_j. In a recent paper [8] J.J.Kohn shows that, in general, the Hörmander condition does not ensure the subellipticity of P. Here we present a sum of squares in two variables that fails to be hypoelliptic, although the Hörmander condition is satisfied.

1. Introduzione

Lo scopo di questo seminario è la discussione, attraverso degli esempi, dell'ipoellitticità C^∞ per alcuni operatori differenziali ottenuti come somme di quadrati di campi vettoriali complessi.
Richiamiamo per completezza la definizione di ipoellitticità per un operatore differenziale lineare

$$A(x, D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \qquad D_{x_j} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \partial_j, \quad j = 1, ..., n$$

a coefficienti complessi $a_\alpha(x)$ di classe C^∞ su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Si dice che A è C^∞ ipoellittico (su Ω) se vale l'identità

$$\text{sing supp}(Au) = \text{sing supp}(u), \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1}$$

In virtù della regolarità dei coefficienti di A, la (1) può essere formulata richiedendo che u sia C^∞ dove Au è C^∞.
La nozione di ipoellitticità può essere resa più precisa, mettendo in evidenza quale sia la "perdita di regolarità" prodotta dall'azione dell'operatore $A(x, D_x)$. Precisamente, si dice $A(x, D_x)$ è C^∞-ipoellittico con perdita di γ derivate, se

$$\textbf{(He)}_\gamma \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \,\text{aperto}\, O \subset \Omega : Au \in H^s_{\text{loc}}(O) \Longrightarrow u \in H^{s+m-\gamma}_{\text{loc}}(O). \tag{2}$$

Si prova che $A(x, D_x)$ soddisfa $\textbf{(He)}_0$, ossia è ipoellittico con perdita di 0 derivate (i.e. $Au \in H^s_{\text{loc}} \Longrightarrow u \in H^{m+s}_{\text{loc}}$), se e solo se A è ellittico (i.e., $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha = 0 \Longrightarrow \mathbb{R}^n \ni \xi = 0$).
La quantità γ misura la perdita di regolarità di $A(x, D_x)$ rispetto al caso ellittico ed è questo il motivo per cui ci si riferisce a γ con l'accezione di "perdita di derivate".
Una sottoclasse importante degli operatori ipoellittici è costituito dagli operatori subellittici. Si dirà, per semplicità, che $A(x, D_x)$ è subellittico se è ipoellittico con una perdita di derivate inferiore al suo ordine, i.a. $\gamma < m$ (vedi (2)); in altri termini, $A(x, D_x)$ è subellittico quando u è sempre più regolare di Au (cioè se $Au \in H^t_{\text{loc}}$ e $u \in H^r_{\text{loc}}$ allora $r > t$).
Siano dati $X_0, X_1, ..., X_r$ $r + 1$ campi vettoriali reali C^∞ di $\mathbb{R}^n$. Introduciamo la seguente

notazione per i commutatori: dato $\ell \in \mathbb{N}$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\ell) \in \{0, 1, \dots, r\}^\ell$, scriviamo $X_\alpha = [X_{\alpha_1}, \cdots, [X_{\alpha_{\ell-1}}, X_{\alpha_\ell}]]$. Indichiamo con $|\alpha| := \ell$ la *lunghezza* di X_α. Infine consideriamo l'operatore somma di quadrati:

$$P = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0.$$

È ben noto da Hörmander [6] e da Rothschild-Stein [12] il seguente:

Teorema 1.1. *Se* rango$\big(Lie\{X_0, X_1, ..., X_r\}\big)_x = n$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$, *allora* P *è ipoellittico. Più precisamente, se l'algebra* $Lie\{X_0, X_1, ..., X_r\}$ *genera* $\mathbb{R}^n$ *al passo* q, *cioè* $\langle \{X_\alpha(x) : |\alpha| \leq q\} \rangle = \mathbb{R}^n$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$, *allora per ogni* $s \in \mathbb{R}$ *e* $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ *vale la stima*

$$\|u\|_{s+\frac{2}{q}} \leq C_{K,s}\big(\|Pu\|_s + \|u\|_s\big), \qquad \forall u \in C_0^\infty(K). \tag{3}$$

Da cui segue, usando un argomento di regolarizzazione (si veda Lemma 22.2.5 [7]*), che per ogni* $v \in \mathcal{D}'$: $Pv \in H^s_{\mathrm{loc}} \Longrightarrow v \in H^{s+\frac{2}{q}}_{\mathrm{loc}} = H^{s+2-\frac{2(q-1)}{q}}_{\mathrm{loc}}$. *Pertanto* P *è ipoellittico con perdita di* $\gamma = \frac{2(q-1)}{q} < 2$ *derivate e dunque risulta essere subellittico.*

Osserviamo che il Teorema 1.1 si può applicare a operatori nella forma

$$P' = \sum_{j=1}^{r} X_j^* X_j + X_0,$$

in quanto per l'aggiunto X_j^* del campo vettoriale X_j vale la relazione

$$X_j^* = -X_j - c_j \qquad \text{dove} \quad c_j \in C^\infty,$$

e dunque

$$P' = -\sum_{j=1}^{r} X_j^2 - (\sum_{j=1}^{r} c_j X_j - X_0).$$

2. Campi vettoriali complessi: l'operatore di Kohn

Siano ora dati $X_1, ..., X_r$ campi vettoriali C^∞ in $\mathbb{R}^n$, a valori complessi:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(x)\partial_j, \qquad a_{i,j} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}), \quad i = 1, ..., r;\ j = 1, ..., n.$$

Supponiamo che soddisfino l'ipotesi di Hörmander in $\mathbb{C}^n$, ossia che la loro algebra di Lie generi $\mathbb{C}^n$ in ogni punto di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo la somma di quadrati complessi:

$$Q = \sum_{j=1}^{r} X_j^* X_j$$

Problema:

1) Q è subellittico?

2) Q è ipoellittico?

In un suo articolo recente [8] J.J.Kohn ha provato che se l'ipotesi di Hörmander è verificata al passo 2 allora Q è subellittico con perdita di 1 derivata, cioè la medesima perdita prevista per il caso reale (cioè $m = 2, \gamma = 1$ in (2), e $q = 2$ in (3)).
Nello stesso lavoro viene però esibito un operatore somma di quadrati, che soddisfa l'ipotesi di Hörmander di passo $q > 2$, ma che non è subellittico. Successivamente in [1] Bove-Derridj-Kohn-Tartakoff hanno studiato l'ipoellitticità C^∞ (e analitica) per un operatore modello più generale (vedi (4) più sotto). In [10] Parenti-Parmeggiani hanno indipendentemente studiato il problema dell'ipoellitticità con grande perdita di derivate (eventualmente non subellittici) per operatori trasversalmente ellittici. In [11] gli stessi autori hanno mostrato come i risultati di [10] consentano di produrre un'ampia classe di esempi basati sul modello di Kohn [8].
Per meglio inquadrare il risultato ottenuto in collaborazione con A.Bove e D.Tartakoff (si veda la Sezione 3), è utile discutere qualitativamente la somma di quadrati esaminata in [1].
Fissiamo un intero pari $q \in \mathbb{N}$ (la ragione di questa scelta sarà chiarita in seguito). In $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t$ consideriamo i campi complessi (per comodità si usa la notazione $D_x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\partial_x, \quad D_t = \frac{1}{\sqrt{-1}}\partial_t$):

$$L^- = D_x - ix^{q-1}D_t, \quad L^+ = D_x + ix^{q-1}D_t \implies \left(L^+\right)^* = L^-, \ \left(L^-\right)^* = L^+.$$

In $x \neq 0$ i campi sono linearmente indipendenti e dunque l'ipotesi di Hörmander deve essere verificata in $x = 0$. Notiamo che

$$[L^-, L^+] = 2(q-1)x^{q-2}D_t;$$

iterando il calcolo, si può facilmente vedere che il campo D_t (necessario per generare $\mathbb{C}^2$ in $x = 0$) si ottiene da un commutatore di lunghezza q. In conclusione i campi complessi $L^{\pm}$ verificano l'ipotesi di Hörmander di passo q.

Dato $k \in \mathbb{Z}_+$, l'operatore di Kohn (studiato in [1]) è la somma dei quadrati dei campi complessi L^- e $x^k L^+$, cioè

$$P_k = \big(L^-\big)^* L^- + \big(x^k L^+\big)^* x^k L^+ = L^+ L^- + L^- x^{2k} L^+. \tag{4}$$

Analogamente a prima, in $x \neq 0$ i campi L^- e $x^k L^+$ sono linearmente indipendenti, mentre ora è necessario un commutatore di lunghezza $k + q$ per ottenere il campo D_t in $x = 0$. Dunque i campi L^- e $x^k L^+$ verificano l'ipotesi di Hörmander di passo $k + q$.

Preliminarmente esaminiamo il caso $k = 0$. In tale ipotesi l'operatore (4) assume la forma

$$P_0 = L^+ L^- + L^- L^+ = -2\Big(\partial_x^2 + \big(x^{q-1}\partial_t\big)^2\Big)$$

ed è immediato riconoscere la somma dei due quadrati <u>reali</u> ∂_x e $x^{q-1}\partial_t$. Questi ultimi soddisfano l'ipotesi di Hörmander di passo q, dunque dal Teorema 1.1 P_0 è subellittico con perdita di $\frac{2}{q}$ derivate.

Le cose cambiano drasticamente se $k > 1$. Infatti, la presenza del fattore x^k determina un "maggior" annullamento vicino a $x = 0$ del secondo campo $x^k L^+$ rispetto al primo L^-. Questo fatto ha una conseguenza immediata: per quanto concerne la subellitticità il contributo del secondo campo $x^k L^+$ diventa trascurabile rispetto al primo L^-. In altre parole:

P_k è subellittico se e solo se lo è $L^+ L^-$.

Purtroppo, non solo $L^+ L^-$ non è subellittico ma non è neppure ipoellittico.

Il motivo per cui questo accade è la ragione della scelta dei campi L^-, L^+. Infatti, $L^+ L^-$ è il ben noto operatore di Grushin (a meno del segno)

$$L^+ L^- = -\Big(\partial_x^2 + \big(x^{q-1}\partial_t\big)^2 + i(q-1)x^{q-2}\partial_t\Big);$$

notiamo che il termine del prim'ordine $i(q-1)x^{q-2}\partial_t$ è un campo genuinamente complesso e quindi il Teorema 1.1 non può essere applicato.

Mostriamo che L^+L^- non è ipoellittico. L'idea è quella di costruire una soluzione $u(x,t)$ non regolare del problema omogeneo

$$L^+L^-u(x,t) = 0 \tag{5}$$

e da questo discenderà immediatamente che L^+L^- non è ipoellittico. A tale scopo consideriamo gli operatori differenziali ordinari dipendenti dal parametro τ

$$L^{\pm}_{\tau} = D_x \pm ix^{q-1}\tau.$$

Formalmente, applicando la trasformata di Fourier rispetto alla variabile t in (5), si ottiene

$$L^+_{\tau}L^-_{\tau}\hat{u}(x,\tau) = 0, \qquad \text{dove} \quad \hat{u}(x,\tau) = \mathcal{F}_{t\to\tau}\big(u(x,\cdot)\big). \tag{6}$$

Siccome $\operatorname{Ker} L^-_{\tau} = \operatorname{Ker} L^+_{\tau}L^-_{\tau}$, la relazione sopra suggerisce di scegliere u come l'anti-trasformata di una funzione ϕ nel nucleo di L^-_{τ}. Calcoliamo ϕ:

$$L^-\phi = 0 \Longrightarrow \partial_x\phi = -x^{(q-1)}\tau\phi \Longrightarrow \phi = ce^{-\frac{x^q}{q}\tau} \in L^2(\mathbb{R}_x) \quad \text{se } \tau > 0. \tag{7}$$

È cruciale che q sia un intero pari, altrimenti se q fosse dispari $\operatorname{Ker} L^-_{\tau} \cap L^2(\mathbb{R}_x) =< 0 >$ (si può provare che in tal caso L^+L^- è subellittico).

Siamo ora in grado di costruire una soluzione del problema omogeneo (5). Fissiamo un intero $r \geq 2$ e definiamo

$$u(x,t) = \int_0^{+\infty} e^{it\tau}e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\frac{1}{(1+\tau^2)^r}d\tau. \tag{8}$$

L'integrazione su $[0,+\infty[$ garantisce che $\phi = e^{-\frac{x^q}{q}\tau}$ $(c = 1)$ sia limitata, mentre il fattore $\dfrac{1}{(1+\tau^2)^r}$ garantisce che $u \in C^2$. È facile verificare che

$$L^+L^-u = \int_0^{+\infty} e^{it\tau}\underbrace{\left(L^+_{\tau}L^-_{\tau}e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\right)}_{=0}\frac{1}{(1+\tau^2)^r}d\tau = 0;$$

Inoltre, essendo r un intero fissato, $u \notin C^{\infty}$, come si voleva dimostrare.

Constatato che L^+L^-, e dunque P_k $(k > 1)$, non è subellittico, ci si domanda se sia almeno ipoellittico. La risposta questa volta è positiva (si veda [1] per la prova originale). Vogliamo qui dare solo un'idea del perchè questo avviene (nello spirito di [5]). La non-ipoellitticità di L^+L^- dipende dal fatto che $\mathrm{Ker}\, L^+_\tau L^-_\tau \neq< 0 >$; ora, l'operatore naturalmente associato a P_k (via la trasformata di Fourier rispetto alla sola variabile t) è

$$P_{k,\tau} = L^+_\tau L^-_\tau + L^-_\tau x^{2k} L^+_\tau \tag{9}$$

che è la somma dei quadrati di $L^-_\tau, x^k L^+_\tau$. Si nota che

$$P_{k,\tau} v = 0 \Longrightarrow 0 = \langle \big(L^+_\tau L^-_\tau + L^-_\tau x^{2k} L^+_\tau\big) v, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}_x)} = \|L^-_\tau v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_x)} + \|x^k L^+_\tau v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_x)},$$

perciò

$$\mathrm{Ker}\, P_{k,\tau} = \mathrm{Ker}\, L^-_\tau \cap \mathrm{Ker}\, \big(x^k L^+_\tau\big) =< 0 > .$$

Infatti si ha che $< e^{-\frac{x^q}{q}\tau} >= \mathrm{Ker}\, L^-_\tau$ e $x^k L^+_\tau \big(e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big) \neq 0$. Per questo motivo l'operatore P_k è ipoellittico. La presenza del quadrato $L^- x^{2k} L^+$ è essenziale.

Dato che P_k è ipoellittico ma non subellittico, verifica una stima a priori più debole della (3); proponiamo qui un ragionamento qualitativo che consentirà di stabilire esattamente quale sia questa disuguaglianza.

Come già osservato sopra, P_k è ipoellittico poiché $P_{k,\tau}\big(e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big) \neq 0$; vogliamo stimare tale quantità. Iniziamo col notare che se q è pari e $\tau \geq 0$, si ha $x^q \tau \geq 0$, per cui il contributo della "Gaussiana" $e^{-\frac{x^q}{q}\tau}$ in (8) è significativo nella regione $\mathcal{I} = \{x^q \tau \leq 1\}$, cioè dove $|x| = O(\tau^{-\frac{1}{q}})$. Quindi, in tale regione, si ha:

$$P_{k,\tau}\big(e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big) = \underbrace{L^+_\tau L^-_\tau \big(e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big)}_{=0} + L^-_\tau x^{2k} L^+_\tau \big(e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big) = 2i\tau L^-_\tau \big(x^{2k+q-1} e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big)$$

$$= 2(2k+q-1) x^{2k+q-2} \tau e^{-\frac{x^q}{q}\tau} = O(\tau^{-\frac{2k+q-2}{q}+1}) = O(\tau^{\frac{2-2k}{q}}).$$

Questa osservazione mostra che P_k si comporta in realtà come un operatore con simbolo $|(\xi,\tau)|^{\frac{2-2k}{q}}$, ossia come $D^{\frac{2-2k}{q}}$; se ne deduce che P_k soddisfa la stima:

$$\|u\|_{\frac{2-2k}{q}} = \|D^{\frac{2-2k}{q}} u\|_0 \leq C_K\big(\|P_k u\|_0 + \|u\|_0\big), \qquad \forall u \in C^\infty_0(K). \tag{10}$$

Quindi dal fatto che $P_k v \in L^2_{\mathrm{loc}}$ segue solo che $v \in H^{\frac{2-2k}{q}}_{\mathrm{loc}}$; pertanto, v sarà in generale meno regolare di $P_k v$ (come è lecito aspettarsi, visto che P_k non è subellittico).

In conclusione: per una somma di quadrati complessi, l'ipotesi di Hörmander non è sufficiente a garantire la subellitticità. Cosa si può invece dire dell'ipoellitticità?

Purtroppo anche in questo caso la risposta è negativa. In [4] M.Christ ha studiato la seguente somma di quadrati complessi in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y$:

$$D_y^2 + P_k = D_y^2 + L^+L^- + L^-x^{2k}L^+, \qquad q = 2. \tag{11}$$

Si noti che l'algebra di Lie associata ai campi D_y, L^-, x^kL^+ genera $\mathbb{C}^3$ in ogni punto di $\mathbb{R}^3$; tuttavia Christ ha provato che l'operatore (11) non è mai ipoellittico se $k > 0$, in quanto l'introduzione del campo D_y produce un fenomeno di propagazione delle singolarità.

3. Una variante dell'operatore di Kohn

In questa sezione discuteremo il risultato presentato in [2], ottenuto in collaborazione con A.Bove e D.Tartakoff.

Si consideri la seguente perturbazione dell'operatore P_k di Kohn (cfr. (4)), costruita sommando i quadrati dei campi $L^-, x^kL^+, t^\ell L^+$ $(k, \ell \in \mathbb{N})$:

$$Q = \left(t^\ell L^+\right)^* t^\ell L^+ + P_k = L^-t^{2\ell}L^+ + L^+L^- + L^-x^{2k}L^+ \qquad \text{in } \mathbb{R}^2_{(x,t)}.$$

I campi $L^-, x^kL^+, t^\ell L^+$ sono linearmente indipendenti per ogni $(x,t) \neq (0,0)$, e un opportuno commutatore di lunghezza $k+q$ fra i campi L^-, x^kL^+ permette di generare D_t e dunque $\mathbb{C}^2$ in $(x,t) = (0,0)$. Notiamo che l'ipotesi di Hörmander è verificata al passo $k+q$ grazie ai campi L^-, x^kL^+, mentre a questo scopo $t^\ell L^+$ risulta essere del tutto ininfluente. L'aspetto interessante è che il suddetto campo gioca un ruolo fondamentale nell'ipoellitticità di Q.

Precisamente in [2] e in [3] si è dimostrato che:

Teorema 3.1. (I) *Se $\ell > \frac{k}{q}$ allora Q è C^∞ ipoellittico (in un intorno dell'origine) con una perdita di $2\frac{q-1+k}{q}$ derivate (la stessa attesa per l'operatore di Kohn). Quindi Q soddisfa la stima* (10).

(II) Se, altrimenti, $\ell \leq \frac{k}{q}$ allora P non è C^∞ ipoellittico.

In altri termini, se ℓ è sufficientemente grande, il campo $t^\ell L^+$ si annulla troppo velocemente nell'origine per influenzare gli altri due campi L^-, x^kL^+; pertanto Q si comporta come se il quadrato di $t^\ell L^+$ non comparisse, riducendosi così all'operatore di Kohn che è ipoellittico. Se invece ℓ è piccolo, il contributo di $t^\ell L^+$ non è più trascurabile ed è tale da "distruggere" l'ipoellitticità degli altri due campi.

Ne concludiamo che non è necessario essere in $\mathbb{R}^3$ per mostrare che l'ipotesi di Hörmander non garantisce l'ipoellitticità. Già in $\mathbb{R}^2$ questo accade. Inoltre per l'operatore Q, a differenza dell'esempio di Christ (11), l'ipoellitticità è violata a causa di un campo del tutto trascurabile per l'ipotesi di generazione.

La dimostrazione del Teorema 3.1 è troppo lunga e tecnica per essere riportata in questa nota. Preferiamo limitarci, come già fatto in precedenza, ad un argomento qualitativo.

Così come $L_\tau^+ L_\tau^-$ e $L_\tau^+ L_\tau^- + L_\tau^- x^{2k} L_\tau^+$ sono gli operatori che sono stati "naturalmente" associati, rispettivamente, alle somme L^+L^- e $L^+L^- + L^- x^{2k} L^+$ (si veda (6) e (9)), a Q si associa l'operatore

$$Q_\tau = L_\tau^- t^{2\ell} L_\tau^+ + L_\tau^+ L_\tau^- + L_\tau^- x^{2k} L_\tau^+ = t^{2\ell} L_\tau^- L_\tau^+ + L_\tau^+ L_\tau^- + L_\tau^- x^{2k} L_\tau^+ .$$

Si noti però che, a differenza dei casi precedenti, la suddetta associazione non avviene via la trasformata di Fourier rispetto alla variabile t; la questione è più delicata e rinviamo a [2] per una trattazione precisa.

In analogia a quanto si è fatto nella sezione precedente, il tutto si riduce a studiare $Q_\tau\big(e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big)$ nella regione $\mathcal{I} = \{x^q\tau \leq 1\}$ dove $|x| = O(\tau^{-\frac{1}{q}})$. Dunque:

$$Q_\tau\big(e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big) = t^{2\ell} L_\tau^- L_\tau^+ \big(e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big) + \underbrace{L_\tau^+ L_\tau^- \big(e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big)}_{=0} + L_\tau^- x^{2k} L_\tau^+ \big(e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big)$$

$$= \Big(2(q-1)t^{2\ell} x^{q-2}\tau + 2(2k+q-1)x^{2k+q-2}\tau\Big) e^{-\frac{x^q}{q}\tau} = t^{2\ell} O(\tau^{\frac{2}{q}}) + O(\tau^{\frac{2-2k}{q}}).$$

Pertanto $Q_\tau\big(e^{-\frac{x^q}{q}\tau}\big)$ è sostanzialmente equivalente al seguente simbolo in (t,τ)

$$t^{2\ell}\tau^{\frac{2}{q}} + c\tau^{\frac{2-2k}{q}}, \qquad \mathbb{R} \ni c \neq 0, \quad (\tau > 0).$$

Si può dimostrare che Q è C^∞ ipoellittico se e solo se

$$Op\big(t^{2\ell}\tau^{\frac{2}{q}} + c\tau^{\frac{2-2k}{q}}\big) = t^{2\ell} D_t^{\frac{2}{q}} + c D_t^{\frac{2-2k}{q}} = \big(t^{2\ell} D_t^{\frac{2k}{q}} + c\big) D_t^{\frac{2-2k}{q}}$$

è C^∞ ipoellittico in $\mathbb{R}$. Poiché $D_t^{\frac{2-2k}{q}}$ è un fattore ellittico, possiamo trascurarlo e ridurci all'operatore pseudodifferenziale ordinario di tipo Fuchs

$$q(t, D_t) = t^{2\ell} D_t^{\frac{2k}{q}} + c \qquad \text{in} \quad \mathbb{R}.$$

Ovviamente si tratta di studiare $q(t, D_t)$ vicino a $t = 0$, essendo $q(t, D_t)$ a sua volta un operatore ellittico (e quindi ipoellittico) per $t \neq 0$.

A questo punto per provare il Teorema 3.1 si dovrebbe dimostrare che $q(t, D_t)$ è C^∞ ipoellittico se $2\ell > \frac{2k}{q}$ (*Caso I*), altrimenti, i.e. $2\ell \leq \frac{2k}{q}$ (*Caso II*), non lo è. In questo seminario ci limiteremo a discutere due modelli che esemplificano le due situazioni sopracitate.

Caso I. Consideriamo l'operatore differenziale ordinario

$$t^2\partial_t - 1. \tag{12}$$

In questa situazione la parte principale $t^2\partial_t$ risulta essere trascurabile rispetto al fattore ellittico -1, poiché il suo effetto sul termine di ordine zero è un $O(t^{2-1}) = O(t)$.

La presenza del fattore ellittico è determinante; infatti, se indichiamo con δ la delta di Dirac nell'origine, si ha

$$t^2\partial_t\delta = 0,$$

e $t^2\partial_t$ non è ipoellittico.

Caso II. Consideriamo l'operatore differenziale ordinario

$$t^2\partial_t^2 - 2. \tag{13}$$

Sarà sufficiente mostrare che la delta δ soddisfa l'equazione omogenea associata. Infatti

$$\langle t^2\partial_t^2\delta, \phi\rangle = \langle \delta, \partial_t^2\big(t^2\phi\big)\rangle = 2\langle \delta, \phi\rangle.$$

Dunque l'operatore (13) non è C^∞ ipoellittico.

Notiamo che in questo caso l'influenza del termine principale $t^2\partial_t^2$ sulla parte di ordine zero è un $O(t^{2-2}) = O(1)$, quindi non è trascurabile rispetto alla costante -2, ed in realtà è tale da distruggere l'ipoellitticità.

Concludiamo questa nota con un'osservazione riguardo l'ipoellitticità analitica di Q. Ricordiamo che un operatore si dice analitico ipoellittico (C^w *h.e.*) se conserva il supporto singolare analitico.

Si può provare che Q è C^w *h.e.* se e solo se lo è $q(t, D_t)$. Come anticipazione di un work in progress congetturiamo che $q(t, D_t)$ non sia mai C^w *h.e.*. Per maggiori dettagli rinviamo al lavoro [3], qui ci limiteremo a osservare, a titolo esemplificativo, che l'operatore (13) non è C^w *h.e.*, poiché banalmente la δ è ben lungi dall'essere analitica. Più sottile è il Caso I. L'operatore (12) infatti non può ammettere soluzioni troppo irregolari essendo C^∞ ipoellittico; tuttavia se definiamo

$$u(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t \leq 0 \end{cases},$$

otteniamo una soluzione C^∞ di (13), ma che non è analitica.

In conclusione l'operatore Q sembra non essere mai C^w *h.e.*. Inoltre Q, secondo la classificazione di Treves , è un operatore dotato di un singolo strato di Poisson-Treves (si veda [13]) coincidente con la sua varietà caratteristica simplettica (i.e., $\{x = 0 = \xi\}$). Il nostro risultato mostrerebbe che la congettura di Treves per la C^w *h.e.* di una somma di quadrati reali, non può essere estesa al caso di campi genuinamente complessi.

Riferimenti bibliografici

[1] A. Bove, M. Derridj, J.J. Kohn, D. Tartakoff, Sums of squares of complex vector fields and (analytic-) hypoellipticity, *Math. Res. Lett.* 13 (2006), no. 5-6, 683-701.

[2] A. Bove, M. Mughetti, D. S. Tartakoff, Gevrey Hypoellipticity for an interesting variant of Kohn's operator, preprint (2009).

[3] A. Bove, M. Mughetti, D. S. Tartakoff, Articolo in preparazione.

[4] M. Christ, A remark on sums of squares of complex vector fields, preprint, arXiv:math.CV/0503506.

[5] B. Helffer, Sur l'hypoellipticité des opérateurs à caractéristiques multiples (perte de 3/2 dérivées), *Mémoires de la S. M. F.*, **51-52**(1977), 13–61

[6] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.* (1967) 119, 147-171.

[7] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol.I-III, Springer-Verlag (1983/85).

[8] J.J. Kohn, Hypoellipticity and loss of derivatives. With an appendix by Makhlouf Derridj and David S. Tartakoff. *Ann. of Math.* (2) 162 (2005), n. 2, 943–986.

[9] C. Parenti, Il problema dell'ipoellitticità, *Bollettino U.M.I.*, (5) 15-A (1978), 300-326.

[10] C. Parenti, A. Parmeggiani, On the hypoellipticity with a big loss of derivatives, *Kyushu J. Math.* 59 (2005), 155-230.

[11] C. Parenti, A. Parmeggiani, A note on Kohn's and Christ's Examples, *Hyperbolic Problems and Regularity Questions*, Trends in Mathematics (2006), 151-158.

[12] L.P. Rothschild - E.M. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups, *Acta Math.* 137 (1976), 247-320.

[13] F. Treves, On the analyticity of solutions of sums of squares of vector fields. *Phase space analysis of partial differential equations*, 315329, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 69, Birkhauser Boston, Boston, MA, 2006.