Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2006-07

Alberto Parmeggiani

Sulla disuguaglianza di Fefferman-Phong per sistemi

11 aprile 2007

Abstract

We give here an overview of what we know about the Fefferman-Phong inequality for systems of PDEs. In general the Fefferman-Phong inequality for systems **does not** hold. However, it does hold true for certain classes of systems of PDEs, that we will be describing here.

1. Introduzione

La celebre disuguaglianza di Fefferman-Phong (si veda [6]; si veda anche [11]) afferma la cosa seguente (diamo l'enunciato nel caso di ordine 2).

Teorema 1.1. *Dato un simbolo scalare $a \in S^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tale che $a \geq -c$, $c \in \mathbb{R}$, allora esiste $C > 0$ tale che*

$$(a^{\mathrm{w}}(x, D)u, u) \geq -C\|u\|_0^2, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{FP}$$

Si ricordi che $a \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ se $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ esiste $C_{\alpha\beta} > 0$ tale che

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1 + |\xi|)^{m-|\beta|}, \quad \forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{1}$$

L'operatore a^{w} ottenuto tramite quantizzazione di Weyl-Hörmander è definito da

$$a^{\mathrm{w}}(x, D)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle} a(\frac{x+y}{2}, \xi)u(y)dyd\xi, \quad u \in \mathcal{S}.$$

La prova del Teorema 1.1 è fatta per induzione sul numero n di variabili e sfrutta il fatto che se una funzione è non-negativa, allora essa può essere localizzata su opportune palle dello spazio delle fasi $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, in modo che o essa sia "ellittica", oppure sia somma di un quadrato e di un simbolo non-negativo che *non dipende* da una direzione, oppure sia solo limitata (uniformemente) e quest'ultimo fatto può solo avvenire su palle che hanno volume comparabile ad 1 (che quindi risultano al limite della localizzazione, a causa del principio di indeterminazione). Poiché le seminorme non dipendono dalla microlocalizzazione, il caso ellittico e quello indeterminato non danno problemi (si usa il Lemma di Cotlar-Stein, si veda il Lemma 2.2 della Sezione 2, per risommare i vari pezzi), mentre il secondo caso (non-ellittico non-degenere) viene controllato tramite l'induzione sul numero di variabili.

L'approccio di Fefferman e Phong risulta essere naturalmente descritto nel contesto delle *metriche ammissibili* (metriche riemanniane su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$) introdotte da Beals e Fefferman (per lo studio della risolubilità in presenza della *condizione (P)*) ed in seguito sviluppate in generalità da Hörmander, e Bony e Lerner. Richiamerò i fatti principali del calcolo di Weyl-Hörmander nella prossima sezione.

È opportuno richiamare la disuguaglianza di Fefferman-Phong anche nella generalità delle metriche di Hörmander.

Teorema 1.2. *Sia g una metrica ammissibile, e sia $0 \leq a \in S(h^{-2}, g)$. Allora*

$$(a^{\mathrm{w}}(x,D)u,u) \geq -C\|u\|_0^2, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Un passo fondamentale nella prova è la riduzione, tramite microlocalizzazione, al caso di una metrica costante (Lemma 18.6.10 di [11]).

Lemma 1.1. *Sia g una metrica costante su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tale che $g/g^\sigma \leq \lambda^2 \leq 1$. Sia $0 \leq a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tale che si abbia $|a|_k^g(x,\xi) \leq \lambda^{-2}$, per tutti gli $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ ed i $k \leq N_0$. Se N_0 è abbastanza grande allora*

$$(a^{\mathrm{w}}(x,D)u,u) \geq -C\|u\|_0^2, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

dove la costante C **non** *dipende né dalla metrica g né dal simbolo a.*

Un esame della prova del lemma mostra che $N_0 = N_0(n)$. Tuttavia essa non fornisce una espressione semplice per la dipendenza dalla dimensione. In relazione a ciò si veda il lavoro di Lerner e Morimoto [13] (e le referenze al lavoro di Bony ivi contenute), nel quale gli autori mostrano, nel caso della metrica del calcolo pseudodifferenziale standard, che $N_0 = 4+2n+1$ (nel loro enunciato il numero di seminorme da controllare è $N_0 = 4+2n+\epsilon$, ogni dato $\epsilon > 0$; ciò è rilevante nel caso il simbolo abbia una limitata regolarità; si vedano anche i lavori di Herau [8] e Tataru [24]).

Ricordo, come già fatto nel mio seminario dell'anno scorso [20], che la disuguaglianza (FP) vale anche in casi in cui il simbolo tende a $-\infty$ in certe direzioni; si vedano i lavori di Melin [12], Hörmander [9], Mughetti [14], Mughetti-Parenti-Parmeggiani [15], Parenti-Parmeggiani [16] (e comunque i riferimenti bibliografici in [20]).

Cosa si può dire nel caso dei sistemi $N \times N$ (ovviamente con $N \geq 2$)? Nel caso di sistemi classici a caratteristiche doppie con varietà caratteristica Σ (luogo degli zeri del determinante del simbolo principale) a geometria regolare, il cui il simbolo principale ha nucleo di dimensione costante 1 su Σ, Hörmander ha provato in [9] che (FP) vale. Parenti ed io abbiamo poi generalizzato in [16] il suo risultato al caso di caratteristiche doppie simplettiche ma con nucleo di dimensione qualsiasi (tra 1 ed N) su Σ. (Si vedano anche i lavori di Brummelhuis [3] e Brummelhuis e Nourrigat [4] per analoghi vettoriali della disuguaglianza di Melin). Tuttavia le condizioni sufficienti che appaiono in [16] sono di una difficoltà notevole, soprattutto se confrontate con quelle dell'enunciato della disuguaglianza di Fefferman-Phong. Volendo rimanere nella "semplicità" dell'enunciato di Fefferman e Phong (cioè di un sistema a simbolo hermitiano non-negativo) Brummelhuis ha dato un controesempio alla disuguaglianza (FP) (che richiamerò più sotto), che è poi stato da me generalizzato in [18] ad una classe geometricamente caratterizzata di sistemi (si veda la Sezione 3). La ragione d'essere di questi controesempi risiede, come ho mostrato, nell'esempio di Hörmander di sistemi hermitiani non-negativi la cui quantizzazione Weyl *non* è non-negativa.

Tutti i controesempi conosciuti sono in un numero $n \geq 2$ di variabili. Sung ha fatto vedere in [23] che tutti i sistemi $N \times N$ *ordinari* (cioè con $n = 1$) con simbolo *hermitiano* non-negativo soddisfano la disuguaglianza di Fefferman-Phong. La sua prova si basa sulla serie di Fourier. In [20] (si veda anche [21] e la Sezione 4) ho esteso il risultato di Sung a sistemi in n variabili (cioè a sistemi *alle derivate parziali*) tramite una induzione sulla dimensione N del sistema. Richiamerò le idee principali della prova nella Sezione 4, le quali danno luogo (con un po' di lavoro) ad un enunciato abbastanza generale per sistemi 2×2 con *traccia ellittica* (si veda [22]; si noti che un sistema con traccia ellittica può perfettamente avere determinante identicamente nullo).

2. Alcuni richiami del calcolo di Weyl-Hörmander

Voglio richiamare in questa sezione alcuni fatti riguardanti le *metriche ammissibili* e le *funzioni peso* (si veda [11], Sezioni 18.4, 18.5). La 2-forma simplettica canonica di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sarà sempre indicata con $\sigma = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$.

Una *metrica ammissibile* in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ è una funzione $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (x, \xi) \longmapsto g_{x,\xi}$ dove $g_{x,\xi}$ è una forma quadratica definita positiva su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tale che:

- *Lentezza:* esiste una costante $C_0 > 0$ (costante di *lentezza*) tale che per ogni (x, ξ), $(y, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ si ha

$$g_{x,\xi}(y - x, \eta - \xi) \leq C_0^{-1} \Longrightarrow C_0^{-1} g_{y,\eta} \leq g_{x,\xi} \leq C_0 g_{y,\eta};$$

- *Indeterminazione:* per ogni $(x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ si ha
$$g_{x,\xi} \leq g^\sigma_{x,\xi},$$
dove $g^\sigma_{x,\xi}$ è la metrica *duale* definita da
$$g^\sigma_{x,\xi}(y,\eta) = \sup_{(z,\zeta)\neq(0,0)} \frac{\sigma((y,\eta),(z,\zeta))^2}{g_{x,\xi}(z,\zeta)};$$
- *Temperanza:* esistono $C_1 > 0$ e $N_1 \in \mathbb{Z}_+$ tali che per ogni (x,ξ), $(y,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ si ha
$$g_{x,\xi} \leq C_1 g_{y,\eta}\Big(1 + g^\sigma_{x,\xi}(x-y,\xi-\eta)\Big)^{N_1}.$$

La *funzione di Planck* h associata a g è per definizione
$$h(x,\xi) = \Big(\sup_{(z,\zeta)\neq(0,0)} \frac{g_{x,\xi}(z,\zeta)}{g^\sigma_{x,\xi}(z,\zeta)}\Big)^{1/2}.$$
Chiamerò *costanti di struttura di g* le costanti di lentezza e temperanza.

Si noti che per la proprietà di indeterminazione si ha sempre che $h \leq 1$.

Esempio 2.1. *La metrica del calcolo pseudodifferenziale standard*
$$g_{x,\xi} = |dx|^2 + \frac{|d\xi|^2}{1+|\xi|^2} \tag{4}$$
è ammissibile, con metrica duale $g^\sigma_{x,\xi} = (1+|\xi|^2)|dx|^2+|d\xi|^2$, *e funzione di Planck* $h(x,\xi) = (1+|\xi|^2)^{-1/2}$.

Data una metrica ammissibile g, un *peso g-ammissibile* è una funzione positiva su $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ per la quale esistono costanti $c, C, C' > 0$ e $N' \in \mathbb{Z}_+$ tali che per tutti gli $(x,\xi),(y,\eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,
$$g_{x,\xi}(x-y,\xi-\eta) \leq c \Longrightarrow C^{-1} \leq \frac{m(x,\xi)}{m(y,\eta)} \leq C,$$
e
$$\frac{m(x,\xi)}{m(y,\eta)} \leq C'\Big(1 + g^\sigma_{x,\xi}(y-x,\eta-\xi)\Big)^{N'}.$$

Osservazione 2.1. *In particolare, data una metrica ammissibile g, diminuendo se necessario la costante di lentezza C_0^{-1} di g, si ha sempre che la funzione di Planck h associata a g è un peso g-ammissibile.*

Siano ora g una metrica ammissibile ed m un peso g-ammissibile. Sia $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Denotiamo con $a^{(k)}(x,\xi; v_1, \ldots, v_k)$ il differenziale k-esimo di a in (x,ξ) nelle direzioni $v_1, \ldots, v_k$ di $\mathbb{R}^{2n}$. Definiamo

$$|a|_k^g(x,\xi) := \sup_{0 \neq v_1,\ldots,v_k \in \mathbb{R}^{2n}} \frac{|a^{(k)}(x,\xi; v_1, \ldots, v_k)|}{\prod_{j=1}^k g_{x,\xi}(v_j)^{1/2}}.$$

Diremo che $a \in S(m,g)$ se per ogni intero $k \in \mathbb{Z}_+$ le seminorme seguenti sono finite:

$$\|a\|_{k;S(m,g)} := \sup_{\ell \leq k,\ (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|a|_\ell^g(x,\xi)}{m(x,\xi)} < +\infty. \tag{5}$$

Dato poi $\mu \in \mathbb{R}$, diremo anche che $a \in S^\mu(g)$ se $a \in S(h^{-\mu}, g)$.

Esempio 2.2. *Nel caso della metrica (4), si ha che la classe $S^m(g)$ coincide con la usuale classe di simboli S^m (si veda (1)).*

Osservazione 2.2. *È importante osservare che se g_1 e g_2 sono metriche ammissibili con $g_1 \leq C g_2$, per una certa costante $C > 0$, allora $a \in S(1, g_1) \implies a \in S(1, g_2)$. Questo fatto è utile quando si considerano partizioni dell'unità relative a metriche ammissibili differenti.*

Riguardo alla composizione si ha che dati $a \in S(m_1, g)$ e $b \in S(m_2, g)$ allora

$$a^{\mathrm{w}}(x,D) b^{\mathrm{w}}(x,D) = (a \sharp b)^{\mathrm{w}}(x,D),$$

dove $a \sharp b \in S(m_1 m_2, g)$ è scrivibile per ogni $N \in \mathbb{Z}_+$ come

$$(a \sharp b)(x,\xi) = \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} \Big(\frac{i}{2} \sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta) \Big)^j a(x,\xi) b(y,\eta) \big|_{(x,\xi)=(y,\eta)} + r_{N+1}(x,\xi), \tag{6}$$

con $r_{N+1} \in S(h^{N+1} m_1 m_2, g)$.

Associata ad una metrica ammissibile g si ha una relativa partizione dell'unità.

Lemma 2.1. *Sia g una metrica ammissibile, e sia $r^2 < C_0^{-1}$. Allora esiste una successione di centri $\{(x_\nu, \xi_\nu)\}_{\nu \in \mathbb{Z}_+}$, un ricoprimento di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ costituito da g-palle $B^g_{\nu,r} = \{(x,\xi); g_{x_\nu,\xi_\nu}(x - x_\nu, \xi - \xi_\nu) < r^2\}$ centrate in (x_ν, ξ_ν) e con raggio r, ed una successione di funzioni $\{\varphi_\nu\}$* **uniformemente** *in $S(1,g)$, con $\operatorname{supp} \varphi_\nu \subset B^g_{\nu,r}$, tali che $\sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+} \varphi_\nu^2 = 1$. Inoltre per ogni r_* con $r^2 \leq r_*^2 < C_0^{-1}$, esiste un intero N_* tale che non più di N_* palle B^g_{ν,r_*}*

possono intersecarsi contemporaneamente (in altre parole si ha la proprietà dell'intersezione uniformemente finita dei dilatati di r_*/r delle $B^g_{\nu,r}$, con un numero di palle che si intersecano limitato da N_*). Infine se $\Delta_{\mu,\nu}(r_*) = \max\{1, g^\sigma_{x_\mu,\xi_\mu}(B^g_{\mu,r_*} - B^g_{\nu,r_*}), g^\sigma_{x_\nu,\xi_\nu}(B^g_{\mu,r_*} - B^g_{\nu,r_*})\}^{1/2}$, allora esistono $N_\sharp$ e $C_\sharp$ tali che $\sup_\mu \sum_\nu \Delta_{\mu,\nu}(r_*)^{-N_\sharp} < C_\sharp$.

Qui

$$g^\sigma_{x,\xi}(B - B') = \inf_{(y,\eta)\in B,(y',\eta')\in B'} g^\sigma_{x,\xi}(y - y', \eta - \eta'), \qquad B, B' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

È anche utile sapere che se $\kappa\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ è una mappa affine simplettica (cioè $\kappa^*\sigma = \sigma$), allora esiste un operatore metaplettico U_κ che è unitario in L^2 ed anche automorfismo di $\mathcal{S}$ ed $\mathcal{S}'$, univocamente determinato a meno di un numero complesso di modulo 1, tale che

$$U_\kappa^{-1} a^{\mathrm{w}}(x, D) U_\kappa = (a \circ \kappa)^{\mathrm{w}}(x, D). \tag{7}$$

Si ha che

- quando $\kappa\colon (x, \xi) \longmapsto (x + x_0, \xi)$, allora $(U_\kappa f)(x) = f(x - x_0)$;
- quando $\kappa\colon (x, \xi) \longmapsto (x, \xi + \xi_0)$, allora $(U_\kappa f)(x) = e^{i\langle x,\xi_0\rangle} f(x)$;
- quando χ agisce $(x_j, \xi_j) \longmapsto (\xi_j, -x_j)$ (per un certo j) tenendo fissate le altre variabili, allora U_κ è la trasformata parziale di Fourier nella variabile x_j, cioè $U_\kappa f = \mathcal{F}_{x_j \to \xi_j} f$;
- quando $\chi\colon (x, \xi) \longmapsto (Tx, {}^tT^{-1}\xi)$, dove $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è un isomorfismo lineare, allora $(U_\chi f)(x) = |\det T|^{-1/2} f(T^{-1}x)$;
- quando $\chi\colon (x, \xi) \longmapsto (x, \xi - Ax)$, per qualche $A = {}^tA$, allora si ha $(U_\chi f)(x) = e^{-i\langle Ax,x\rangle/2} f(x)$.

Riguardo alla continuità in L^2 è in primo luogo utile richiamare il Lemma di Cotlar-Stein ([11], Lemma 18.6.5).

Lemma 2.2. *Sia $\{A_j\}_{j\in\mathbb{Z}_+}$ una successione di operatori limitati da uno spazio di Hilbert H_1 ad un altro H_2. Si supponga che $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \|A_j^* A_k\|^{1/2}_{H_1\to H_2} \le C$ e $\sum_{j\in\mathbb{Z}_+} \|A_j A_k^*\|^{1/2}_{H_1\to H_2} \le C$. Allora $Au := \sum_{j\in\mathbb{Z}_+} A_j u$ esiste per ogni $u \in H_1$ con convergenza forte in H_2, e vale $\|A\|_{H_1\to H_2} \le C$.*

Usando il Lemma di Cotlar-Stein si prova che *se* $a \in S(1,g) = S^0(g)$ *allora* $a^{\mathrm{w}}(x,D)$ *è continuo in* L^2 (e la norma come operatore limitato è una seminorma continua dello spazio dei simboli). Si ha inoltre il seguente utilissimo lemma, dovuto a Bony e Lerner [1].

Lemma 2.3. *Sia g una metrica ammissibile, m un g-peso ammissibile. Sia B_ν una g-palla come nel Lemma 2.1, sia $g_\nu = g_{x_\nu,\xi_\nu}$ e sia $m_\nu = m(x_\nu,\xi_\nu)$. Sia $\{r_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}_+}$ una successione di simboli con $r_\nu \in S(m_\nu, g_\nu)$ tali che per ogni intero $k \in \mathbb{Z}_+$*

$$\sup_{\nu\in\mathbb{Z}_+}\ \sup_{\ell\le k;\,(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2n}}\ \sup_{0\neq v\in\mathbb{R}^{2n}} \frac{|r_\nu^{(\ell)}(x,\xi;v,v,\dots,v)|}{m_\nu g_\nu(v)^{\ell/2}}\Big(1+g_\nu^\sigma((x,\xi)-B_\nu)\Big)^{k/2} < +\infty,$$

dove $g_\nu^\sigma((x,\xi)-B_\nu) = \inf\limits_{(y,\eta)\in B_\nu} g_\nu^\sigma(x-y,\xi-\eta)$. Allora $r := \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+} r_\nu$ è un simbolo appartenente ad $S(m,g)$. La successione $\{r_\nu\}_\nu$ si dice essere **uniformemente confinata** *in $S(m,g)$. Quando $m=1$ si ha dal Lemma di Cotlar-Stein che $r^{\mathrm{w}} = \sum_\nu r_\nu^{\mathrm{w}}$ è continuo in L^2.*

Nel caso di simboli a valori matrici o vettoriali, vale ancora tutto, facendo attenzione all'ordine dei fattori nel caso della composizione. Se M_N indica l'insieme delle matrici $N\times N$, denoterò $S(m,g;\mathsf{M}_N) = S(m,g)\otimes \mathsf{M}_N$. In generale, se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, denoterò $S(m,g;\mathsf{V}) = S(m,g)\otimes\mathsf{V}$.

Nel seguito, se $A,B>0$, scriverò $A\lesssim B$ quando esiste una costante assoluta $C>0$ tale che $A\le CB$, e $A\sim B$ quando contemporaneamente $A\lesssim B$ e $B\lesssim A$.

3. Controesempi

Per prima cosa definisco la disuguaglianza (I_s) per $s\in[0,1/2]$. Dico che per un sistema A in S^2 (per fissare le idee) vale la disuguaglianza (I_s) se per ogni compatto $K\subset\mathbb{R}^n$ esiste $C = C_{K,s} > 0$ tale che

$$(I_s) \qquad (A^{\mathrm{w}}(x,D)u,u) \ge -C\|u\|_s^2, \quad \forall u\in C_0^\infty(K;\mathbb{C}^N).$$

Si noti che per $s=1/2$ la (I_s) è la disuguaglianza Sharp-Gårding (dovuta ad Hörmander, si veda [11]) che si sa valere anche per quantizzazioni Weyl di simboli a valori negli operatori limitati autoaggiunti non-negativi su uno spazio di Hilbert, mentre per $s=0$ è la disuguaglianza di Fefferman-Phong.

Brummelhuis ha fatto vedere in [2], usando particolari funzioni-test, che per la quantizzazioni di Weyl di

$$A_B(x,\xi)=\begin{bmatrix} x_1^2\xi_2^2 & ix_1\xi_1\xi_2 \\ -ix_1\xi_1\xi_2 & \xi_1^2 \end{bmatrix},$$

la disuguaglianza (FP) non vale. Si noti che qui il numero di variabili è $n=2$, che $A_B(x,\xi)=A_B(x,\xi)^*\geq 0$ e che $\det A_B(x,\xi)=0$ sempre. Inoltre, come vedremo, per $A_B^{\rm w}(x,D)$ non può valere alcuna delle (I_s) per $s\in[0,1/2)$.

Osservazione 3.1. *In realtà in* [2] *Brummelhuis dimostra che la* (FP) *non può valere per l'operatore* $(A_B(x,D)+A_B(x,D)^*)/2$*, cioè nella quantizzazione "a destra" ("prima si fanno le derivate e poi si moltiplica per i coefficienti"). D'altra parte, dal calcolo simbolico si sa che* $A_B^{\rm w}(x,D)=\tilde{A}_B(x,D)$ *dove (come usuale,* $D=-i\partial$*)*

$$\tilde{A}(x,\xi)=e^{i\langle D_x,D_\xi\rangle/2}A_B(x,\xi)=A_B(x,\xi)-\frac{1}{2}\xi_2\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

per cui

$$A_B^{\rm w}(x,D)=A_B(x,D)-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}D_{x_2},$$

e siccome $A_B^{\rm w}(x,D)=A_B^{\rm w}(x,D)^*$ *(essendo* $A_B(x,\xi)$ *una matrice hermitiana) e*

$$\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}D_{x_2}\right)^*=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}D_{x_2},$$

se ne deduce che

$$\frac{1}{2}(A_B(x,D)+A_B(x,D)^*)=A_B^{\rm w}(x,D).$$

Quindi l'enunciato per $(A_B(x,D)+A_B(x,D)^*)/2$ *e per* $A_B^{\rm w}(x,D)$ *coincidono.*

Qual è la ragione per la quale A_B ha un simile comportamento? Una risposta (almeno ad un certo livello di profondità) è data dall'esistenza di sistemi la cui quantizzazione di Weyl non può essere non-negativa. Questo fatto fu osservato da Hörmander in [10]: il sistema

$$A_H(t,\tau)=\begin{bmatrix} t^2 & t\tau \\ t\tau & \tau^2 \end{bmatrix},\quad (t,\tau)\in\mathbb{R}^2,$$

ha quantizzazione di Weyl A_H^{w} per la quale **non** vale

$$(A_H^{\mathrm{w}}(t,D_t)u,u)\geq 0,\quad \forall u\in \mathcal{S}(\mathbb{R};\mathbb{C}^2).$$

I sistemi A_B ed A_H sono profondamente legati! Per farlo vedere richiamo (in modo molto semplificato e per operatori di ordine 2) il concetto di *sistema localizzato*, dovuto a L. Boutet de Monvel, implementato da Sjöstrand, L.Boutet de Monvel, A.Grigis e B.Helffer nel loro studio dell'ipoellitticità, ed usato da Parenti e da me in [17] (ed in altri lavori) nel caso delle stime dal basso.

Consideriamo un simbolo $A(x,\xi)=A_2(x,\xi)+A_1(x,\xi)$, di ordine 2 ($A_1$ si chiama parte sottoprincipale nella quantizzazione di Weyl; si vede che i termini di ordine zero sono totalmente ininfluenti in (I_s), $s\in[0,1/2]$), $N\times N$ hermitiano, con $A_2\geq 0$ e $A_{2-j}(x,t\xi)=t^{2-j}A_{2-j}(x,\xi)$, $j=0,1$, $t>0$, $\xi\neq 0$. Consideriamo $\rho_0\in T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$ tale che $\det A_2(\rho_0)=0$ e che sia (per semplicità) $\operatorname{Ker} A_2(\rho_0)=\mathbb{C}^N$. Per $w,w'\in\mathbb{C}^N$ consideriamo il simbolo *scalare*

$$a^{w',w}(x,\xi)=a_2^{w',w}(x,\xi)+a_1^{w',w}(x,\xi)=\langle A_2(x,\xi)w,w'\rangle_{\mathbb{C}^N}+\langle A_1(x,\xi)w,w'\rangle_{\mathbb{C}^N}.$$

Quando $w=w'$ si ha allora che $a_2^{w,w}\geq 0$, con zero del secondo ordine in ρ_0 (quindi, per polarizzazione, $a_2^{w',w}$ ha uno zero del secondo ordine in ρ_0 anche quando $w\neq w'$). Ne segue, con $(t,\tau)\in T_{\rho_0}T^*\mathbb{R}^n$, che ha senso considerare la forma quadratica a valori matrici

$$(t,\tau)\longmapsto Q_2(\rho_0;t,\tau)=\langle \operatorname{Hess}(A_2/2)(\rho_0)(t,\tau),(t,\tau)\rangle_{T_{\rho_0}T^*\mathbb{R}^n},$$

ed il sistema (formalmente autoaggiunto, quantizzato secondo Weyl nelle variabili tangenti (t,τ))

$$L_A^{\mathrm{w}}(\rho_0)=Q_2^{\mathrm{w}}(\rho_0;t,D_t)+A_1(\rho_0).$$

Il sistema $L_A^{\mathrm{w}}(\rho_0)$ è un sistema $N\times N$ formalmente autoaggiunto di operatori a coefficienti polinomiali (di ordine 2 dando peso 1 ad entrambe le x e le ξ). È importante ricordare che i sistemi localizzati forniscono degli "invarianti": le loro proprietà spettrali sono degli invarianti dell'equazione considerata.

Si ha allora il fatto seguente, che costituisce una condizione necessaria per stime dal basso.

Lemma 3.1. *Sia $s \in [0, 1/2)$ e ρ_0 come sopra. Supponiamo la disuguaglianza (I_s) valga. Allora in ρ_0 si ha*

$$(L_A^{\mathrm{w}}(\rho_0)f, f) \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N).$$

Tornando ai sistemi A_B ed A_H, se $\rho_0 = (x_1 = 0, x_2 = 0, \xi_1 = 0, \xi_2 = 1)$ allora si vede che

$$L_{A_B}^{\mathrm{w}}(\rho_0) = A_B^{\mathrm{w}}(t, 0, D_t, 1).$$

Ma si nota anche che

$$A_H(t, \tau) = U^* A_B(t, 0, \tau, 1) U, \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \tag{9}$$

relazione che quindi vale anche per le rispettive quantizzazioni di Weyl, dove U è pensato come operatore unitario $U \colon L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}; \mathbb{C}^2)$. Quindi se una qualsiasi delle (I_s) valesse con $s \in [0, 1/2)$ si dovrebbe avere $L_{A_B}^{\mathrm{w}}(\rho_0) \geq 0$, che è impossibile a causa di (9).

Questa osservazione mi ha permesso di trovare una famiglia di controesempi, caratterizzati geometricamente, per i quali nessuna delle disuguaglianze (I_s) può valere con $s \in [0, 1/2)$, e ciò accade in maniera "stabile" per certe perturbazioni del primo ordine.

Si considerino i simboli reali, classici di ordine 1

$$p_1, \ldots, p_\nu, \quad q_1, \ldots, q_\nu, \quad p(x, \xi) = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j(x, \xi) p_j(x, \xi), \quad q(x, \xi) = \sum_{j=1}^{\nu} \beta_j(x, \xi) q_j(x, \xi)$$

(α_j, β_j classici di ordine 0), si ponga

$$\Sigma_1 = \{p_1 = \ldots = p_\nu = 0\}, \quad \Sigma_2 = \{q_1 = \ldots = q_\nu = 0\},$$

e si assuma che $\operatorname{codim} \Sigma_j = \nu$, $j = 1, 2$, con intersezione $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ trasversa e simplettica. Si supponga inoltre che

- i differenziali $\{dp_j(\rho)\}$, rispettivamente i differenziali $\{dq_j(\rho)\}$, siano linearmente indipendenti su Σ_1, rispettivamente su Σ_2;
- che $\{p_j, p_k\}\big|_{\Sigma_1} = \{q_j, q_k\}\big|_{\Sigma_2} = 0$;
- che la matrice $(\{p_j, q_k\}\big|_{\Sigma})_{j,k=1,\ldots,\nu}$, sia invertibile.

Consideriamo la base ortonormale $\{v_j\}_{j=1,\dots,N}$ di $\mathbb{C}^N$, e poniamo

$$L(x,\xi) = p(x,\xi)v_1 + q(x,\xi)v_2 \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^N.$$

Ricordando che $(v_2^* \otimes v_1)w = \langle w, v_2\rangle v_1$, cioè $v_2^* \otimes v_1 \simeq v_1 \, {}^t\overline{v_2}$ (colonne-per-righe), poniamo

$$A_2(x,\xi) = L(x,\xi)^* \otimes L(x,\xi) \geq 0,$$

e consideriamo $A(x,\xi) = A_2(x,\xi) + A_1(x,\xi) = A(x,\xi)^*$ e la sua quantizzazione Weyl $A^{\mathrm{w}}(x,D)$. Si ha il seguente teorema ([18]).

Teorema 3.1. *Supponiamo esista $\rho_0 = (x_0,\xi_0) \in \Sigma$ (con $|\xi_0| = 1$) tale che $\{p,q\}(\rho_0) \neq 0$ (dove $\{p,q\}$ è la parentesi di Poisson tra p e q), e che esista $\delta \in [0,1)$ tale che*

$$\langle A_1(\rho_0)w, w\rangle \leq \delta\{p,q\}(\rho_0)\langle \mathrm{Im}(v_2^* \otimes v_1)w, w\rangle, \forall w \in \mathbb{C}^N.$$

Allora $A^{\mathrm{w}}(x,D_x)$ non soddisfa la disuguaglianza (FP), e nessuna delle disuguaglianze (I_s) con $s \in [0,1/2)$.

Si ha anche un analogo "anisotropo" del Teorema 3.1 (si veda [18]).

Il Teorema 3.1 dice, per esempio, che se $h \in \mathbb{Z}_+$ e $\delta \in [0,1)$ allora il sistema A^{w} con $A = A_2 + A_1$,

$$A_2(x,\xi) = \begin{bmatrix} (\xi_1 - x_2\xi_3)^2 & (\xi_1 - x_2\xi_3)(\xi_2 + x_1^{2h+1}\xi_3) \\ (\xi_1 - x_2\xi_3)(\xi_2 + x_1^{2h+1}\xi_3) & (\xi_2 + x_1^{2h+1}\xi_3)^2 \end{bmatrix},$$

$$A_1(x,\xi) = \frac{\delta}{2}(1 + (2h+1)x_1^{2h})\xi_3 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

non soddisfa nessuna delle (I_s) con $s \in [0,1/2)$. Un altro esempio (questa volta anisotropo) è dato dal sistema A_2^{w} (che generalizza l'esempio di Brummelhuis) con

$$A_2(x,\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1^2 & -ix_1^k\xi_1\xi_2 \\ ix_1^k\xi_1\xi_2 & x_1^{2k}\xi_2^2 \end{bmatrix}, \ k \geq 1,$$

per il quale nessuna delle (I_s) vale con $s \in [0,1/(k+1))$. Voglio qui far notare che quest'ultimo esempio suggerisce che in casi anisotropi una disuguaglianza naturale potrebbe essere una Sharp-Gårding "anisotropa" di tipo $(I_{1/(k+1)})$ (si veda, per il caso scalare, il lavoro di Mughetti [14]).

In tutti questi casi l'operatore localizzato non può essere non-negativo (perché unitariamente equivalente ad un sistema dello stesso tipo di A_H).

Quando la varietà Σ che interviene sopra non ha tipo simplettico costante (cioè il rango di $\sigma\big|_\Sigma$ non è costante), allora si hanno situazioni ancora più "ingarbugliate". Per esempio si può avere un sistema localizzato ancora non-negativo in un punto caratteristico ρ_0, ma che per punti ρ immediatamente vicini non può più esserlo. Un esempio è dato da

$$A_2(x,\xi) = \begin{bmatrix} \xi_1^2 & -i(x_1^2 - x_2)\xi_1\xi_2 \\ i(x_1^2 - x_2)\xi_1\xi_2 & (x_1^2 - x_2)^2\xi_2^2 \end{bmatrix}.$$

Per $\rho_0 = (x_1^0, (x_1^0)^2, 0, 1) \in \Sigma = \{\xi_1 = x_1^2 - x_2 = 0,\ \xi_2 \neq 0\}$ si ha che

$$(L_A^{\mathrm{w}}(\rho_0)f, f) = \|D_{t_1}f_1 - i(2x_1^0 t_1 - t_2)f_2\|_0^2 + 4x_1^0 \mathrm{Re}\,(f_2, f_1), \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2;\mathbb{C}^2).$$

Si vede che quando $x_1^0 = 0$ il sistema localizzato è non-negativo, mentre quando $x_1^0 \neq 0$ non può esserlo. Quando $x_1^0 \to 0$ il rango di $\sigma\big|_\Sigma$ passa da 2 a 0.

4. Alcuni sistemi per i quali la disuguaglianza vale

Tutti i controesempi conosciuti sono scritti con un numero $n \geq 2$ di variabili. Cosa succede per $n = 1$? Si ha il seguente teorema dovuto a Sung [23].

Teorema 4.1. *Se* $p(x,\xi) = A(x)\xi^2 + B(x)\xi + C(x) = p(x,\xi)^* \geq 0$ *è un* **sistema** $N \times N$ **di equazioni ordinarie** *allora la disuguaglianza* (FP) *nel caso vettoriale vale.*

Sung dà una prova del teorema tramite l'uso della serie di Fourier. In [20] (si veda anche [21]) ho dato una dimostrazione per induzione sulla dimensione N del sistema, che permette di estendere il risultato a sistemi in n variabili.

Teorema 4.2. *Si consideri* **il sistema** $N \times N$ **alle derivate parziali** *in* $\mathbb{R}^n$

$$p(x,\xi) = p(x,\xi)^* = A(x)e(\xi) + B(x,\xi) + C(x), \qquad B(x,\xi) = \sum_{\ell=1}^{n} B_\ell(x)\xi_\ell,$$

dove $e \in S^2$ *è una* **forma quadratica definita positiva***,* $A, B_\ell, C \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathsf{M}_N)$ $(1 \le \ell \le n)$ *tali che per tutti gli* $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\|\partial_x^\alpha A\|_{L^\infty} + \sum_{\ell=1}^{n} \|\partial_x^\alpha B_\ell\|_{L^\infty} + \|\partial_x^\alpha C\|_{L^\infty} < +\infty,$$

dove $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathsf{M}_N)$*. Si supponga che per una qualche costante* $c \ge 0$ *si abbia*

$$p(x,\xi) = p(x,\xi)^* \ge -cI, \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Allora la disuguaglianza di Fefferman-Phong (FP) *vale: esiste una costante* $C > 0$ *tale che*

$$(p^{\mathrm{w}}(x,D)u, u) \ge -C\|u\|_0^2, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^N). \tag{11}$$

Osservazione 4.1. *È opportuno ricordare che in* [2] *Brummelhuis prova (in modo semplicissimo, usando soltanto l'integrazione per parti) che se* $p(x,\xi) = \sum_{j,k=1}^n A_{jk}(x)\xi_j\xi_k = p(x,\xi)^*$*, con* $A_{jk} = A_{kj} = A_{jk}^* \in \mathsf{M}_N$ *di classe* C^2 *e* $\|\partial^\alpha A_{jk}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n;\mathsf{M}_N)} \le C$ *per* $|\alpha| \le 2$*, e*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \langle A_{jk}(x)v_j, v_k\rangle_{\mathbb{C}^N} \ge 0, \qquad \forall v_1, \ldots, , v_n \in \mathbb{C}^N, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \tag{12}$$

allora (11) per $p^{\mathrm{w}}(x,D)$ *vale. Si noti che nel controesempio di Brummelhuis, scrivendo*

$$A_B(x,\xi) = A_{11}(x)\xi_1^2 + A_{22}(x)\xi_2^2 + \big(A_{12}(x) + A_{21}(x)\big)\xi_1\xi_2,$$

si ha che

$$A_{12}(x) = A_{21}(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & ix_1 \\ -ix_1 & 0 \end{bmatrix} \ \textbf{non è} \ \ \ge 0, \quad se \ \ x_1 \ne 0, \tag{13}$$

per cui la (12) non vale. È nuovamente utile ricordare che Brummelhuis dimostra che $(p(x,D)+p(x,D)^*)/2$ *soddisfa (11). D'altra parte, come prima, si ha dal calcolo simbolico che* $p^{\mathrm{w}}(x,D) = \tilde{p}(x,D)$*, dove*

$$\tilde{p}(x,\xi) = e^{i\langle D_x, D_\xi\rangle/2}p(x,\xi) = p(x,\xi) - \frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\big(\partial_{x_j}A_{jk}(x) + \partial_{x_j}A_{kj}(x)\big)\xi_k - \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{n}\partial^2_{x_jx_k}A_{jk}(x),$$

da cui, essendo $p^{\mathrm{w}}(x,D) = p^{\mathrm{w}}(x,D)^*$*, segue*

$$p^{\mathrm{w}}(x,D) = \frac{1}{2}\big(p(x,D) + p(x,D)^*\big) + \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{n}\partial^2_{x_jx_k}A_{jk}(x).$$

Perciò $p^{\mathrm{w}}(x,D)$ soddisfa (11) se e solo se $(p(x,D)+p(x,D)^*)/2$ soddisfa (11).

Il sistema considerato nel Teorema 4.2 soddisfa la condizione di Brummelhuis quando $B=0$. Ma è proprio quando $B\neq 0$ che le cose sono delicate, e riassorbire il contributo dei termini del primo ordine dovuti alla presenza di B necessita in generale di argomenti altamente non banali.

Ricordo infine che è un fatto generale (conseguenza del calcolo simbolico come sopra) che per un simbolo $A(x,\xi)$, matrice hermitiana $N\times N$, di ordine m, gli operatori $A^{\mathrm{w}}(x,D)$ e $(A(x,D)+A(x,D)^*)/2$ differiscono per un operatore di ordine $m-2$.

Idea della prova del Teorema 4.2. Possiamo naturalmente supporre che $e(\xi)=|\xi|^2$ (ciò in virtù della (7)). Usiamo la partizione dell'unità fornita dal Lemma 2.1, $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{Z}_+}$ uniformemente in $S^0(g)$, con $\varphi_\nu\in C_0^\infty(B^g_{\nu,r})$ e $\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+}\varphi_\nu^2=1$, dove la metrica "iniziale" g è

$$g_{x,\xi}=|dx|^2+\frac{|d\xi|^2}{1+|\xi|^2}.$$

Allora si scrive

$$p=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+}\varphi_\nu\chi_\nu p\varphi_\nu,\quad \text{dove } \chi_\nu\varphi_\nu=\varphi_\nu,\ \operatorname{supp}\chi_\nu\subset B^g_{\nu,r},$$

e $\chi_\nu\in S^0(g)$ uniformemente in ν. Usando (6) ed il Lemma di Cotlar-Stein si ha allora che, essendo le φ_ν e le χ_ν *scalari*, e ponendo $p_\nu=\chi_\nu p$,

$$(p^{\mathrm{w}}u,u)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+}(\varphi_\nu^{\mathrm{w}}p_\nu^{\mathrm{w}}\varphi_\nu^{\mathrm{w}}u,u)+O(\|u\|_0^2),$$

dove ciascun p_ν è *uniformemente* in $S^2(g;\mathsf{M}_N)$, $\nu\in\mathbb{Z}_+$. Se poniamo $M_\nu=(1+|\xi_\nu|^2)^{1/2}\geq 1$ (notare che quando $|\xi_\nu|\geq 1$, che sono gli ξ_ν "interessanti", è $M_\nu\sim|\xi_\nu|$), allora le stime sono microlocalizzate considerando la metrica "semiclassica"

$$G_{x,\xi}=|dx|^2+\frac{|d\xi|^2}{M^2},\quad M\geq 1,$$

per cui possiamo supporre che $p=\chi p_{\text{iniziale}}\in S^2(G)$, con stime *uniformi* sulle seminorme di ogni ordine. Si vuole mostrare la (FP) (cioè la (11)) con costanti *indipendenti* da M. Possiamo perciò supporre di stare considerando

$$p(x,\xi)=\chi(x,\xi)\Big(A(x)|\xi|^2+B(x,\xi)+C(x)\Big)\geq 0,$$

con $\chi \in C_0^\infty(B^G)$ e con un controllo uniforme sulle sue seminorme di ogni ordine in $S^0(G)$. Inoltre, senza perdita di generalità, possiamo supporre che $A(x)$ insieme alle sue derivate fino al secondo ordine siano in norma ≤ 1. In una matrice hermitiana semidefinita positiva le entrate diagonali controllano tutte le altre, e quindi la traccia controlla tutte le entrate della matrice. L'ipotesi (10) garantisce che la traccia di $A(x)$ controlli tutte le entrate di $A(x)$ e $B_\ell(x)$: ponendo

$$t(x) = \operatorname{Tr} A(x) \sim \max_{1 \leq j \leq N} a_{jj}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

allora

$$|a_{jk}(x)| \lesssim t(x), \quad |b_{\ell,jk}(x)|^2 \lesssim t(x), \quad \forall j,k = 1,\dots,N, \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ 1 \leq \ell \leq n.$$

Vogliamo ora implementare la decomposizione di Calderón-Zygmund nelle variabili x usata da Fefferman e Phong in [7] per lo studio degli operatori subellittici. Più precisamente, si localizzano le x in palle di raggio δ_ν sulle quali almeno una tra le entrate a_{jj} è ellittica, fermando la procedura quando il diametro del cubo è "troppo" piccolo rispetto ad M^{-1} (la relativa palla nelle x, ξ ha dimensioni $M^{-1} \times M$ e quindi volume ~ 1, per cui il principio di indeterminazione ci impone di interrompere la localizzazione). Nel linguaggio delle metriche ammissibile ciò equivale a considerare

$$H(x)^{-1} := \max\{\frac{1}{M}, t(x)^{1/2}\}$$

e definire la *metrica di Fefferman-Phong* (che si vede essere ammissibile)

$$g_{x,\xi} = H(x)^2|dx|^2 + \frac{|d\xi|^2}{M^2}.$$

Il Lemma 2.1 applicato alla g dà l'esistenza di un ricoprimento di g-palle B_ν, $\nu \in \mathbb{Z}_+$, di $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tale che, ponendo

$$H(x_\nu)^{-1} = \delta_\nu,$$

(*i*) o $(x,\xi) \in B_\nu$ implica $a_{j_0 j_0}(x) \gtrsim \delta_\nu^2$, per un qualche j_0 (cioè $a_{j_0 j_0}$ è *ellittico*);

(*ii*) oppure $(x,\xi) \in B_\nu$ implica $M\delta_\nu \lesssim 1$.

Per i ν per i quali (*i*) vale si ha

$$(x,\xi) \in B_\nu \Longrightarrow a_{j_0 j_0} \sim \delta_\nu^2, \quad \text{e} \quad |\partial_x^\alpha a_{j_0 j_0}(x)| \lesssim \delta_\nu^{2-|\alpha|}, \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n,$$

con costanti *indipendenti* da ν, da cui, in virtù della semidefinitezza del sistema, si ha anche

$$|\partial_x^\alpha a_{jk}(x)| \lesssim \delta_\nu^{2-|\alpha|},\ \text{e } |\partial_x^\alpha b_{\ell,jk}(x)| \lesssim \delta_\nu^{1-|\alpha|}, \forall j,k=1,\dots,N,\ \forall \ell=1,\dots,n,\ \forall \alpha\in\mathbb{Z}_+^n,$$

con costanti *indipendenti* da ν (le c_{jk} sono sempre sotto controllo).
Per i ν per i quali (ii) vale si ha, ancora in virtù della semidefinitezza,

$$\Big| a_{jk}(x)|\xi|^2 + b_{jk}(x,\xi) + c_{jk}(x)\Big| \lesssim 1,\ (x,\xi)\in B_\nu,\ \forall j,k=1,\dots,N,$$

con costanti *indipendenti* da ν.

La funzione di Planck associata alla metrica di Fefferman-Phong g è data da $h(x,\xi) = H(x)/M \sim 1/(\delta_\nu M)$, quando $(x,\xi)\in B_\nu$.

Usando la nuova partizione dell'unità $\{\varphi_\nu\}_\nu$ uniformemente in $S^0(g)$, ed essendo $\chi \in S^0(G)\subset S^0(g)$ in quanto $G\le g$, si ha che

$$\chi_\nu\chi a_{jk}|\xi|^2 \in S^2(g),\ \chi_\nu\chi b_{jk}\in S^1(g),\ \chi_\nu\chi c_{jk}\in S^0(g),\ \forall j,k=1,\dots,N,$$

uniformemente in $\nu\in\mathbb{Z}_+$, e

$$p^{\mathrm{w}} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+} \varphi_\nu^{\mathrm{w}}(\chi_\nu p)^{\mathrm{w}}\varphi_\nu^{\mathrm{w}} + r^{\mathrm{w}},\quad \text{con}\ \ (r^{\mathrm{w}}u,u) = O(\|u\|_0^2),$$

dove le costanti in $O(\cdot)$ sono *assolute*. Possiamo inoltre supporre che la somma venga fatta sui ν per i quali (i) vale, in quanto per i ν per i quali (ii) vale si ha $\chi_\nu\chi p_{jk}\in S^0(g)$, per ogni j,k, uniformemente in ν, e quindi essi forniscono, tramite il Lemma di Cotlar-Stein, un errore $O(\|u\|_0^2)$.

Sia allora $a_{11}(x)\sim\delta_\nu^2$ per $(x,\xi)\in B_\nu$ (per fissare le idee) e scriviamo

$$A(x) = \left[\begin{array}{c|c} a_{11}(x) & a_1(x)^* \\ \hline a_1(x) & A'(x)\end{array}\right],\quad \text{con } A' = (A')^* \in \mathsf{M}_{N-1}.$$

Su B_ν possiamo considerare l'isomorfismo

$$E_\nu(x) = \left[\begin{array}{c|c} 1 & -a_1(x)^*/a_{11}(x) \\ \hline 0 & I_{N-1}\end{array}\right] : \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{N-1}.$$

Allora $\alpha_\nu := E_\nu^{-1}\varphi_\nu \in S^0(g;\mathsf{M}_N)$, e $p_\nu := E_\nu^*\chi_\nu p E_\nu \in S^2(g;\mathsf{M}_N)$, con stime uniformi sulle seminorme di qualsiasi ordine. Quindi, scrivendo

$$p_\nu = \chi_\nu \chi \left[\begin{array}{c|c} p_{11} & p_1^* \\ \hline p_1 & p' \end{array}\right], \quad (x,\xi) \in B_\nu,$$

si ha $p_{11} = a_{11}|\xi|^2 + \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell,11}\xi_\ell + c_{11}$,

$$p' = (p')^* = \tilde{A}|\xi|^2 + \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{B}_\ell \xi_\ell + \tilde{C}, \tag{14}$$

e, cosa massimamente importante, *uniformemente* in ν si ha

$$0 \le \chi_\nu\chi p_{11} \in S^2(g), \quad \chi_\nu\chi p_1 \in S^1(g;\mathbb{C}^{N-1}), \quad 0 \le \chi_\nu\chi p' \in S^2(g;\mathsf{M}_{N-1}).$$

Dal Lemma di Cotlar-Stein (si veda anche il Lemma 2.3) si ha

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+} \|\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u\|_0^2 \lesssim \|u\|_0^2, \quad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^N). \tag{15}$$

Perciò $p = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+} \alpha_\nu^* p_\nu \alpha_\nu$. Ora si ha che

$$\alpha_\nu^* \sharp p_\nu \sharp \alpha_\nu = \alpha_\nu^* p_\nu \alpha_\nu + \beta_\nu + r_\nu,$$

dove, in virtù del Lemma 2.3, $\sum_\nu r_\nu^{\mathrm{w}}$ è un operatore continuo in L^2 con stime uniformi, e nel termine β_ν si hanno somme di termini del tipo (parte hermitiana di)

$$\alpha_\nu^* \sharp q_{\ell,\nu} \sharp \Big(\frac{\partial E_\nu^{-1}}{\partial x_\ell}\varphi_\nu\Big), \quad \alpha_\nu^* \sharp q_{\ell',\nu} \sharp \Big(\frac{\partial E_\nu^{-1}}{\partial x_\ell}\xi_{\ell'}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial \xi_\ell}\Big),$$

dove

$$q_{\ell,\nu} = \chi_\nu\chi\xi_\ell E_\nu^* A E_\nu = \chi_\nu\chi\xi_\ell \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & 0 \\ \hline 0 & A' - \frac{a_1^*\otimes a_1}{a_{11}} \end{array}\right].$$

Si ha $q_{\ell,\nu} \in S^1(g;\mathsf{M}_N)$ e $\xi_{\ell'}\partial_{\xi_\ell}\varphi \in S^0(g)$ uniformemente in ν, per cui anche $\beta_\nu \in S^1(g;\mathsf{M}_N)$, uniformemente in ν. Quindi

$$(p^{\mathrm{w}}u,u) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+} \Big((p_\nu^{\mathrm{w}}\alpha_\nu^{\mathrm{w}}u, \alpha_\nu^{\mathrm{w}}u) - (\beta_\nu^{\mathrm{w}}u,u) \Big) + O(\|u\|_0^2).$$

Notiamo ora che

$$\frac{\partial E_\nu^{-1}}{\partial x_\ell} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \partial_{x_\ell}(a_1(x)^*/a_{11}(x)) \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \ (x,\xi)\in B_\nu \tag{16}$$

(per cui, in particolare, è anche $E_\nu^{\pm}\partial_{x_\ell}E_\nu^{-1} = \partial_{x_\ell}E_\nu^{-1} = \partial_{x_\ell}E_\nu^{-1}E_\nu^{\pm}$). Si calcola quindi, scrivendo $\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u = \begin{bmatrix} (\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1 \\ (\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)' \end{bmatrix} \in L^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}^{N-1})$ (analogamente per u) ed usando la (16), che

$$\sum_{\ell=1}^n \Big(q_{\ell,\nu}^{\mathrm{w}}(\frac{\partial E_\nu^{-1}}{\partial x_\ell}\varphi_\nu)^{\mathrm{w}} u, \alpha_\nu^{\mathrm{w}} u\Big) = \sum_{\ell=1}^n \Big((a_{11}^{1/2}\varphi_\nu\partial_{x_\ell}(\frac{a_1^*}{a_{11}}))^{\mathrm{w}} u', (\chi_\nu\chi a_{11}^{1/2}\xi_\ell)^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1\Big) + r_\nu,$$

dove (dal Lemma 2.3) $\sum_\nu r_\nu^{\mathrm{w}}$ è limitato in L^2 con stime uniformi. Analogamente

$$2\mathrm{Re}\Big((\chi_\nu\chi p_1)^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1, (\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)'\Big) = 2\mathrm{Re}\sum_{\ell=1}^n \Big((\chi_\nu\chi a_{11}^{1/2}\xi_\ell)^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1, \tilde{\gamma}_{\ell,\nu}^{\mathrm{w}} u'\Big) + r_\nu,$$

dove $\sum_\nu r_\nu^{\mathrm{w}}$ e $\sum_\nu \tilde{\gamma}_{\ell,\nu}^{\mathrm{w}}$ $(1\le \ell\le n)$ sono limitati in L^2 con stime uniformi. Quindi

$$(p^{\mathrm{w}} u, u) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+}\Bigg[\Big((\chi_\nu\chi p_{11})^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1, (\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1\Big) + \Big((\chi_\nu\chi p')^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)', (\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)'\Big) +$$
$$+\mathrm{Re}\sum_{\ell=1}^n \Big((\chi_\nu\chi a_{11}^{1/2}\xi_\ell)^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1, \gamma_{\ell,\nu}^{\mathrm{w}} u'\Big)\Bigg] + O(\|u\|_0^2),$$

dove $\sum_\nu \gamma_{\ell,\nu}^{\mathrm{w}}$, $\ell = 1,\dots,n$, sono limitati in L^2 con stime uniformi. Siccome dal calcolo simbolico per un simbolo scalare $a\in S^2(g)$ si ha che $a^{\mathrm{w}} a^{\mathrm{w}} = (a^2)^{\mathrm{w}} + r$, con $r\in S^0(g)$, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz applicata al terzo addendo del membro di destra dà (con $0<\varepsilon\le 1$ da fissare)

$$\Big((\chi_\nu\chi p_{11})^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1, (\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1\Big) + \Big((\chi_\nu\chi p')^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)', (\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)'\Big) +$$
$$+\mathrm{Re}\sum_{\ell=1}^n \Big((\chi_\nu\chi a_{11}^{1/2}\xi_\ell)^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1, \gamma_{\ell,\nu}^{\mathrm{w}} u'\Big) \ge \Big((\chi_\nu\chi p_{11} - \varepsilon\chi_\nu^2\chi^2 a_{11}|\xi|^2)^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1, (\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)_1\Big) +$$
$$+\Big((\chi_\nu\chi p')^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)', (\alpha_\nu^{\mathrm{w}} u)'\Big) - \varepsilon(r_\nu^{(1)} u_1, u_1) - C_\varepsilon(r_\nu^{(2)} u', u'),$$

dove $\sum_\nu \mathrm{diag}(r_\nu^{(1)}, r_\nu^{(2)})$ è limitato in L^2 con stime uniformi. Scegliamo $\varepsilon = 1/2$ (quindi in modo *uniforme* in ν e M). Si vede che c'è una costante assoluta $c>0$ per la quale

$$\chi_\nu\chi p_{11} - \varepsilon\chi_\nu^2\chi^2 a_{11}|\xi|^2 \ge -c,$$

da cui segue, in virtù della disuguaglianza *scalare* (FP) (e più precisamente tramite il Lemma 1.1, in quanto $N_0 = N_0(n)$ ed i simboli sono localizzati alle B_ν, quindi si possono usare le metriche *costanti* g_{x_ν,ξ_ν}, le quali hanno tutte le stesse costanti di struttura), che

$$\Big((\chi_\nu\chi p_{11} - \varepsilon\chi_\nu^2\chi^2 a_{11}|\xi|^2)^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}}u)_1, (\alpha_\nu^{\mathrm{w}}u)_1\Big) \geq -C\|(\alpha_\nu^{\mathrm{w}}u)_1\|_0^2,$$

dove C è *assoluta*, da cui sommando in ν ed usando la (15) si ottiene

$$\sum_{\nu\in\mathbb{Z}_+}\Big((\chi_\nu\chi p_{11} - \varepsilon\chi_\nu^2\chi^2 a_{11}|\xi|^2)^{\mathrm{w}}(\alpha_\nu^{\mathrm{w}}u)_1, (\alpha_\nu^{\mathrm{w}}u)_1\Big) \geq -C'\|u\|_0^2.$$

Ora si applica la stessa procedura a p' (si fa cioè l'induzione su N), in quanto p' ha la forma (14) e $0 \leq \chi_\nu\chi p' \in S^2(g; \mathsf{M}_{N-1})$, *uniformemente* in $\nu \in \mathbb{Z}_+$, usando al passo iniziale ancora una volta la disuguglianza di Fefferman-Phong scalare.

Per illustrare un po' di più l'induzione si osservi che se $N = 2$ allora questo passo conclude la prova, in quanto si usa ancora il Lemma 1.1 per metriche costanti per controllare uniformemente (dal basso) i termini $\chi_\nu\chi p'$.

Nel caso $N > 2$, faccio vedere come si costruisce la successiva metrica di Fefferman-Phong $g^{(1)}$. Come nel caso della $g = g^{(0)}$ si considera la traccia del coefficiente della parte di ordine 2 di $\chi_\nu\chi p'$, che "vive" in B_ν^g. Poniamo $g_\nu = g_{x_\nu,\xi_\nu}$. Si considera il cambio di variabili simplettico $\kappa_\nu \colon (y,\eta) \longmapsto (x,\xi) = (\delta_\nu y + x_\nu, \delta_\nu^{-1}\eta)$, per cui la metrica diviene

$$\kappa_\nu^* g_\nu = |dy|^2 + \frac{|d\eta|^2}{M^2\delta_\nu^2}.$$

Questa è la "nuova" metrica semiclassica. Il passo è analogo a quello fatto inizialmente per ridursi alla metrica semiclassica G e si vogliono ottenere stime indipendenti da ν. L'operatore si trasforma in maniera unitaria

$$U_{\kappa_\nu}^*(\chi_\nu\chi p')^{\mathrm{w}} U_{\kappa_\nu} = ((\chi_\nu\chi p') \circ \kappa_\nu)^{\mathrm{w}}.$$

In particolare si ha che $\tilde{A}(x)|\xi|^2$ diventa (sul supporto di $\chi_\nu\chi$ ovviamente)

$$\tilde{A}(\delta_\nu y + x_\nu)\delta_\nu^{-2}|\eta|^2 =: \hat{A}(y)|\eta|^2,$$

e siccome era $|\xi| \lesssim M$ sul supporto di $\chi_\nu\chi$, ora si ha $|\eta| \lesssim M\delta_\nu$. È possibile allora prendere una funzione $\tilde{\chi}_\nu \in C_0^\infty(|x - x_\nu| < r\delta_\nu)$ (cioè della sola variabile x) e uniformemente in

$S^0(g)$, tale che $\tilde{\chi}_\nu(x)\chi_\nu(x,\xi) = \chi_\nu(x,\xi)$. Si pone

$$\tilde{t}(y) = \mathrm{Tr}\Big(\tilde{\chi}_\nu(\delta_\nu y)\tilde{A}(\delta_\nu y + x_\nu)\delta_\nu^{-2}\Big).$$

Siccome le seminorme di $\hat{A}$ e $\tilde{t}$ sono ora limitate da costanti assolute (in virtù delle stime su $\tilde{A}$ e $\tilde{\chi}_\nu$, possiamo come prima normalizzare le costanti in modo da avere $\|\partial_y^\alpha \tilde{t}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq 1$ per $|\alpha| \leq 2$. Si considera allora

$$H^{(1)}(y)^{-1} = \max\{\frac{1}{M\delta_\nu}, \tilde{t}(y)^{1/2}\},$$

e costruisce perciò la metrica di Fefferman-Phong di *seconda generazione*

$$g^{(1)}_{y,\eta} = H^{(1)}(y)^2|dy|^2 + \frac{|d\eta|^2}{M^2\delta_\nu^2}.$$

Come g, anche $g^{(1)}$ è una metrica ammissibile, con le *stesse* costanti di struttura di g. Si noti inoltre che $g_\nu \leq g^{(1)}$, da cui segue che automaticamente le funzioni a supporto compatto in B_ν^g in $S^0(g)$ sono anche in $S^0(g^{(1)})$. Ciò mostra come iterare la procedura e conclude l'idea della prova. □

Osservazione 4.2. *La stessa dimostrazione fornisce una disuguaglianza di Fefferman-Phong nell'ambito semiclassico, cioè per simboli $A(x, h\xi)$, $h \in (0,1]$, quantizzati secondo Weyl (si veda per esempio* [5] *per il calcolo pseudodifferenziale semiclassico).*

In [22] ho mostrato il seguente teorema per sistemi 2×2.

Teorema 4.3. *Sia g una metrica ammissibile. Sia*

$$p(x,\xi) = \begin{bmatrix} a(x,\xi) & \overline{c(x,\xi)} \\ c(x,\xi) & b(x,\xi) \end{bmatrix} = p(x,\xi)^* \geq 0,$$

dove $a, b, c \in S(h^{-2}, g)$. Si supponga che

$$a\{c,\bar{c}\} - 2i\,\mathrm{Im}(c\{a,\bar{c}\}) \quad e \quad b\{c,\bar{c}\} - 2i\,\mathrm{Im}(c\{b,\bar{c}\}) \in S(h^{-4}, g), \tag{17}$$

e che la traccia di p sia ellittica positiva, cioè che

$$t(x,\xi) := a(x,\xi) + b(x,\xi) \gtrsim h(x,\xi)^{-2}, \quad \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{18}$$

Allora la disuguaglianza di Fefferman-Phong (11) vale.

È opportuno osservare che l'ipotesi (17) è soddisfatta nei seguenti casi importanti:

- quando $\operatorname{Im} c \in S(h^{-1}, g)$;
- quando $\operatorname{Re} c \in S(h^{-1}, g)$;
- quando $p = p(\xi)$ (cioè quando p ha "coefficienti costanti", condizione, quest'ultima, che però non è invariante; si noti anche che in questo caso l'uso della trasformata di Fourier dà immediatamente il risultato sotto la sola condizione $p(\xi) = p(\xi)^* \geq 0$, il che mostra che (18) è una condizione solo sufficiente per la validità della disuguaglianza di Fefferman-Phong (11)).

Si osservi inoltre che la traccia di p può essere ellittica anche quando il determinante può annullarsi.

Di più, per la classe di sistemi considerata nel Teorema 4.3 la condizione (12) può non essere soddisfatta: per il sistema

$$\begin{bmatrix} \xi_1^2 & -ix_1\xi_1\xi_2 \\ ix_1\xi_1\xi_2 & (1+x_1^2)\xi_2^2 \end{bmatrix},$$

che ha determinante $\xi_1^2\xi_2^2$ il quale si può annullare per $(\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$, le condizioni (17) e (18) valgono (per la metrica standard), mentre la (12) non vale (si veda (13)).

È infine importante notare che pure i precedenti controesempi soddisfano l'ipotesi (17), la quale, dunque, non risulta essere una sostanziale restrizione discriminante la validità o l'impossibilità della stima di Fefferman e Phong nel caso dei sistemi.

La ragione per la quale si prende $N = 2$ risiede nel fatto seguente. Se $N \geq 3$ e

$$p(x,\xi) = \left[\begin{array}{c|c} a(x,\xi) & c(x,\xi)^* \\ \hline c(x,\xi) & b(x,\xi) \end{array}\right] \in \mathsf{M}_N,$$

con a scalare e $b = b^*$ di dimensione $(N-1) \times (N-1)$, nella procedura di riduzione si ha (per fissare le idee supponiamo di essere in una regione in cui a è ellittico) che

$$b'(x,\xi) = b(x,\xi) - \frac{c(x,\xi)^* \otimes c(x,\xi)}{a(x,\xi)} \geq 0,$$

e

$$\operatorname{Tr}(b'(x,\xi)) = \operatorname{Tr}(b(x,\xi)) - \frac{|c(x,\xi)|^2}{a(x,\xi)} \geq 0,$$

ma non si può concludere che $\mathrm{Tr}(b'(x,\xi))$ sia ancora ellittica. Quando invece $N = 2$, $0 \le b'$ è scalare e la disuguaglianza di Fefferman-Phong ci permette di concludere.

Riferimenti bibliografici

[1] J.-M. Bony e N. Lerner. *Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur.I.* Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **22** (1989), 377–433.

[2] R. Brummelhuis. *A counterexample to the Fefferman-Phong inequality for systems.* C.R.Acad.Sci. Paris, Série I, Math. **310** (1990), 95–98.

[3] R. Brummelhuis. *On Melin's inequality for systems.* Comm. Partial Differential Equations **26** (2001), 1559–1606.

[4] R. Brummelhuis e J. Nourrigat. *A necessary and sufficient condition for Melin's inequality for a class of systems.* J. Anal. Math. **85** (2001), 195–211.

[5] M. Dimassi e J. Sjöstrand. Spectral asymptotics and the semi-classical limit. London Math. Soc. Lect. Note Series **268**, Cambridge University Press, 1999, Cambridge.

[6] C.L. Fefferman e D.H. Phong. *On positivity of pseudo-differential operators.* Proceeding of the National Academy of Sciences U.S.A. **75** (1978), 4673–4674.

[7] C.L. Fefferman e D.H. Phong. *Subelliptic eigenvalue problems.* Conference on harmonic analysis in honor of Antoni Zygmund, Vol. I (Chicago, Ill., 1981), 590–606, Wadsworth Math. Ser., Wadsworth, Belmont, CA, 1983.

[8] H. Herau. *Melin-Hörmander inequality in a Wiener type pseudo-differential algebra.* Ark. Mat. **39** (2001), 311–338.

[9] L. Hörmander. *The Cauchy problem for differential equations with double characteristics.* J. Anal. Math. **32** (1977), 118–196.

[10] L. Hörmander. *The Weyl Calculus of Pseudodifferential Operators.* Comm. Pure and Applied Mathematics **32** (1979), 359–443.

[11] L. Hörmander. The Analysis of Linear Partial Differential Operators - Vol. III. Grundlehren der Math. Wiss. vol. 274, Springer-Verlag, New York (1985).

[12] A. Melin. *Lower bounds for pseudo-differential operators.* Ark. Mat. **9** (1971), 117–140.

[13] L. Lerner e Y. Morimoto. *On the Fefferman-Phong inequality and a Wiener-type algebra of pseudodifferential operators.* In corso di stampa su Publications of the R.I.M.S. (Kyoto).

[14] M. Mughetti. *A problem of transversal anisotropic ellipticity.* Rendiconti Seminario Matematico Univ. Padova **106** (2001), 111–142.

[15] M. Mughetti, C. Parenti e A. Parmeggiani. *Lower Bound Estimates Without Transversal Ellipticity.* In corso di stampa sui Comm. Partial Differential Equations.

[16] C. Parenti e A. Parmeggiani. *Lower bounds for systems with double characteristics.* J. Anal. Math. **86** (2002), 49–91.

[17] C. Parenti e A. Parmeggiani. *A Remark on the Hörmander Inequality.* Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), 1071–1084.

[18] A. Parmeggiani.*A class of counterexamples to the Fefferman-Phong inequality for systems.* Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), 1281–1303.

[19] A. Parmeggiani. *Positività e geometria dell'insieme caratteristico.* Seminario di Analisi Matematica dell'Università di Bologna, A.A.2005/06, Tecnoprint Bologna (2007), 87–105.

[20] A. Parmeggiani. *On the Fefferman-Phong inequality for systems of PDEs. Phase Space Analysis of Partial Differential Equations* (A.Bove, F. Colombini, D. Del Santo Editors). Birkhäuser Verlag (Boston), Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **69** (2006), 247–266.

[21] A. Parmeggiani. *On positivity of certain systems of partial differential equations.* Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A. **104**, No.3 (2007), 723–726.

[22] A. Parmeggiani. *A Remark on the Fefferman-Phong inequality for* 2×2 *systems.* (Preprint).

[23] L.-Y. Sung. *Semi-boundedness of Systems of Differential Operators.* J. Differential Eq. **65** (1986), 427–434.

[24] D. Tataru. *On the Fefferman-Phong inequality and related problems.* Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), 2101–2138.