Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2008-09

Alberto Parmeggiani

Ipoellitticità con perdita di molte derivate

2 aprile 2009

Abstract

We give here an overview of the hypoellipticity with a big loss of derivatives. In particular, we shall show that the some celebrated examples of sums of squares of complex vector fields which lose many derivatives and yet are C^∞-hypoelliptic, are expressions of the same phenomenon.

1. Introduzione

Lungi dall'essere esaustivo, voglio in questo seminario dare un'idea di come certe problematiche legate all'ipoellitticità possano essere trattate in maniera unificata.

Un operatore differenziale (più in generale, un operatore pseudodifferenziale, propriamente supportato) $P = P(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ $(D = -i\partial)$ di ordine m su un aperto $X \subset \mathbb{R}^n$ si dice essere (C^∞) *ipoellittico* se

$$\operatorname{sing\,supp} u = \operatorname{sing\,supp} Pu, \quad u \in \mathcal{D}'(X), \tag{1}$$

dove $\operatorname{sing\,supp} u$ è l'insieme dei punti di X che non hanno alcun intorno aperto sul quale la restrizione di u è una funzione C^∞.

Più in generale si dice che P è *ipoellittico con perdita di* $r \geq 0$ *derivate* se per ogni $s \in \mathbb{R}$

$$u \in \mathcal{D}'(X), \quad Pu \in H^s_{\mathrm{loc}} \Longrightarrow u \in H^{s+m-r}_{\mathrm{loc}}. \tag{2}$$

Dunque la (2) misura di quanto P differisce dall'essere un operatore ellittico, cioè ipoellittico con perdita di 0 derivate. Si noti che (2) implica (1).

L'importanza dello studio dell'ipoellitticità di un operatore P è ben nota, basti solo menzionare, per esempio, il legame tra l'ipoellitticità di P e la locale risolubilità di P^*. Infatti *se P è ipoellittico allora P^* è localmente risolubile* (cioè per ogni $x_0 \in X$ c'è un intorno aperto $U \subset X$ di x_0 tale che per ogni $f \in C^\infty(X)$ esiste $u \in \mathcal{D}'(X)$ tale che $Pu = f$ in U).

Quando P è ipoellittico con una certa perdita $r \geq 0$ di derivate si ha la seguente stima a priori (della quale ricordo una prova per completezza).

Lemma 1.1. *Supponiamo che per un certo $r \geq 0$ si abbia, per ogni $s \in \mathbb{R}$,*

$$u \in \mathcal{E}'(X), \quad Pu \in H^s \Longrightarrow u \in H^{s+m-r}.$$

Allora per ogni compatto $K \subset X$ esiste $C = C(K, s) > 0$ tale che

$$\|u\|_{s+m-r} \leq C\big(\|Pu\|_s + \|u\|_{s+m-r-1}\big), \quad \forall u \in C_0^\infty(K). \tag{3}$$

Dimostrazione. Sia

$$F := \{u \in H^{s+m-r-1} \cap \mathcal{E}'(K);\ Pu \in H^s\},$$

munito della norma

$$\|u\|_F := \|u\|_{s+m-r-1} + \|Pu\|_s.$$

Allora $(F, \|\cdot\|_F)$ è chiaramente uno spazio di Banach. Si ha che l'immersione $j\colon F \longrightarrow H^{s+m-r} \cap \mathcal{E}'(K)$ è **chiusa**. Infatti sia $\{u_k\}_k \subset F$ tale che $u_k \longrightarrow u$ in F e $u_k \longrightarrow v$ in $H^{s+m-r} \cap \mathcal{E}'(K)$. Allora ovviamente $v = u \in H^{s+m-r-1} \cap \mathcal{E}'(K)$ e dunque $Pu = Pv$. Ora $Pu_k \longrightarrow Pu$ in $\mathcal{E}'(K)$ e dunque anche, essendo $\{Pu_k\}_k$ una successione di Cauchy in H^s, $Pu = Pv \in H^s$. Quindi $v \in F$ e questo prova il lemma. $\square$

In generale, se $r \geq 1$ la stima (3) è solo necessaria per l'ipoellitticità. (Si pensi agli operatori strettamente iperbolici, come l'operatore delle onde, i quali soddisfano la (3) con $r = 1$ ma non sono ipoellittici). Diventa anche sufficiente quando $0 \leq r < 1$.

Consideriamo il simbolo $p(x,\xi)$ di P e scriviamo (distinguendo i gradi di omogeneità)

$$p(x,\xi) \sim p_m(x,\xi) + p_{m-1}(x,\xi) + \ldots, \quad (x,\xi) \in \dot{T}^*X := T^*X \setminus 0,$$

dove $p_{m-j}(x, s\xi) = s^{m-j} p_{m-j}(x,\xi)$, $s > 0$.

Quando $p_m \neq 0$ su $\dot{T}^*X$ l'operatore P è *ellittico* e perciò ipoellittico.

È interessante dunque esplorare cosa succede sulla sottovarietà caratteristica $\Sigma = p_m^{-1}(0) \subset \dot{T}^*X$.

Si sa che se

$$p_m = 0 \Longrightarrow \frac{1}{i}\{p_m, \bar{p}_m\} < 0$$

allora P è ipoellittico con perdita di $1/2$ derivata (cioè è subellittico). In generale, con condizioni scritte solamente in termini del simbolo principale, si ha ipoellitticità con perdita di $\ell/(\ell+1)$ derivate (e.g., se $(H^{\ell}_{\mathrm{Re}\, p_m} \mathrm{Im}\, p_m)(\rho) \neq 0$ per qualche $\rho \in \Sigma$, col segno "giusto" quando ℓ è dispari, si veda Hörmander [8], Vol. IV; sono tutte condizioni significative quando il simbolo principale ha zeri semplici).

Per osservare perdite maggiori di derivate si devono considerare casi di *degenerazione superiore* del simbolo principale, unitamente a *condizioni di annullamento* (di tipo Levi) sui termini di ordine inferiore.

Una classe naturale di simboli p con caratteristiche di ordine k è quella introdotta da Boutet de Monvel in [1] e da Sjöstrand in [14]: data Σ, sottovarietà C^∞ di $\dot{T}^*X$, un simbolo p appartiene a $\mathrm{S}^{m,k}(X,\Sigma)$ se $\Sigma = p_m^{-1}(0)$ e per ogni compatto $K \subset X$ esiste $C_K > 0$ tale che per ogni $(x,\xi) \in K \times \dot{\mathbb{R}}^n$

$$|p_{m-j}(x,\xi)| \leq C_K |\xi|^{m-j} \mathrm{dist}_\Sigma(x,\xi)^{k-2j}, \quad 0 \leq 2j \leq k,$$

dove $\mathrm{dist}_\Sigma(x,\xi) = \inf\limits_{(y,\eta)\in\Sigma} (|x-y| + |\eta - \xi/|\xi||)$ è la distanza di $(x, \xi/|\xi|)$ da Σ.

Si dice che p_m è *trasversalmente ellittico* quando per ogni compatto $K \subset X$ esiste $c_K > 0$ tale che

$$|p_m(x,\xi)| \geq c_K |\xi|^m \mathrm{dist}_\Sigma(x,\xi)^k, \quad \forall (x,\xi) \in K \times \dot{\mathbb{R}}^n.$$

Sjöstrand ha mostrato in [14] (Thm. 1.7 e Thm. 5.10), tra altre cose, che per caratteristiche di ordine 2 e quando $p_m(\dot{T}^*X)$ è contenuto in un cono chiuso strettamente convesso di $\mathbb{C}$, allora non si può avere una perdita di derivate strettamente minore di uno. Nel caso a caratteristiche doppie la situazione è chiarita dal seguente teorema, dovuto a Boutet-Grigis-Helffer [2] (costruzione di una parametrice) ed a Hörmander [7] (uso della stima a priori (3), $r = 1$).

Teorema 1.1. *Si supponga che* $p_m(\dot{T}^*X) \subset \Gamma$, *dove* $\Gamma \subset \mathbb{C}$ *è un cono proprio (cioè chiuso e di apertura* $< \pi$*). Sia* $p_m \in \mathrm{S}^{m,2}(X,\Sigma)$ *trasversalmente ellittico, e per ogni* $\rho \in \Sigma$ *sia* Q_ρ *la forma quadratica associata alla matrice hessiana di* $p_m/2$ *in* ρ*. Sia*

$$p^s_{m-1}(x,\xi) = p_{m-1}(x,\xi) + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j \partial \xi_j}(x,\xi),$$

il simbolo sottoprincipale di P*. Allora* P *è ipoellittico con perdita di una derivata se e solo se per ogni* $\rho = (x_0,\xi_0) \in \Sigma$ *con* $|\xi_0| = 1$,

$$p^s_{m-1}(\rho) + Q_\rho(\bar{v}, v) + \sum_{j=1}^{\nu(\rho)} (2\alpha_j + 1)\mu_j \neq 0, \ \forall v \in V_0(\rho), \ \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^{\nu(\rho)}, \tag{4}$$

dove $V_0(\rho)$ *è l'autospazio generalizzato della mappa hamiltoniana* F_ρ *associato all'autovalore* 0 *ed i* μ_j *sono i* $\nu(\rho)$ *autovalori di* F/i*, ripetuti secondo molteplicità, che stanno in* $\Gamma \setminus \{0\}$.

(Per una generalizzazione recente di questo teorema si veda il lavoro di M. Hitrik e K. Pravda-Starov [6]).

Per esempio, usando la (4) si ha che

- $P = |D_{x'}|^2 + |x'|^2|D_{x''}|^2 + \gamma|D_{x''}|$, $x' \in \mathbb{R}^{n'}$, $x'' \in \mathbb{R}^{n''}$, $\gamma \in \mathbb{C}$, è ipoellittico con perdita di una derivata se e solo se $\gamma + 2|\alpha| + n' \neq 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{Z}_+^{n'}$; ricordando il seminario di M. Mughetti [11], se, per esempio, $n' = n'' = 1$, $\alpha = 0$ e $\gamma = -1$, la funzione

$$u(x', x'') = \int_0^{+\infty} e^{ix''\xi''} e^{-x'^2\xi''/2} \frac{1}{(1+\xi''^2)^2} d\xi'' \in C^2 \setminus C^\infty, \quad \text{e} \quad Pu = 0;$$

- $P = |D_x|^2 + \gamma(|D_x|^2 + D_y^2)^{1/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$, è ipoellittico con perdita di una derivata se e solo se $\gamma \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

Per i nostri scopi è fondamentale notare che la condizione (4) è una condizione *spettrale*: lo spettro dell'operatore *localizzato* P_ρ di P in $\rho \in \Sigma$ deve evitare lo 0, cioè P_ρ deve essere *iniettivo* (ciò è già stato usato nel seminario di Mughetti [11]).

Consideriamo d'ora innanzi Σ simplettica (dunque, quando $k = 2$ e $Q_\rho \geq 0$, in (4) si ha $V_0(\rho) = {}^{\mathbb{C}}T_\rho\Sigma$ e $Q_\rho\big|_{V_0(\rho)} = 0$).

L'operatore localizzato P_ρ, $\rho \in \Sigma$, introdotto da Boutet de Monvel in [1], è definito da

$$P_\rho = \sum_{|\alpha|+|\beta|+2j=k} \frac{1}{\alpha!\beta!} \partial_t^\alpha \partial_\tau^\beta p_{m-j}(\rho) t^\alpha D_t^\beta, \ t \in \mathbb{R}^\nu, \ 2\nu = \operatorname{codim}\Sigma,$$

si considera cioè la parte "significativa" (rispetto all'ordine delle caratteristiche) del polinomio di Taylor di $p(x,\xi)$ nel punto caratteristico $\rho \in \Sigma$, nelle direzioni (t,τ) normali a Σ in ρ. Esso è un operatore *a coefficienti polinomiali* di ordine k nelle variabili $t \in \mathbb{R}^\nu$, opera naturalmente su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$ (e su $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^\nu)$), e l'iniettività è richiesta su $\mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu)$. Si vede che lo spettro di P_ρ (quando P_ρ è realizzato come operatore non limitato su $L^2(\mathbb{R}^\nu)$) è un *invariante* di P (nel senso che esso è invariante quando P è coniugato tramite operatori integrali di Fourier associati a trasformazioni simplettiche).

Per caratteristiche k, il Teorema di Boutet-Grigis-Helffer [2] dice la cosa seguente.

Teorema 1.2 (Boutet-Grigis-Helffer). *Sia P trasversalmente ellittico. Allora P è ipoellittico con perdita di $k/2$ derivate se e solo se*

$$\operatorname{Ker}(P_\rho) = \{0\}, \quad \forall \rho \in \Sigma. \tag{5}$$

A noi interessa ora sapere cosa si può dire quando la condizione (5) è violata per qualche $\rho \in \Sigma$. Vedremo che è possibile "unificare" un certo numero di fenomeni "illustri" (per i quali la (5) è violata) tramite una "macchina" che implementa la tecnica degli operatori localizzati di Boutet-Grigis-Helffer, unitamente a quella del "problema di Grushin" di Sjöstrand. In questo modo si permette lo studio di operatori che risultano essere ipoellittici *con una perdita $r \in \mathbb{Z}_+$ di derivate legata all'ordine delle caratteristiche dell'operatore.* In generale non ci sono (ancora) risultati in cui la perdita di derivate sia del tipo $r = \ell + q$, dove $\ell \geq 2$ è intero e $q \in (0, 1)$ è razionale (Mughetti ha dei risultati in questa direzione). L'unico risultato (per ora) disponibile è quello dovuto ad Helffer [5], nel quale si studia la perdita di 3/2 derivate (e, più in generale, con perdita di $r = 1 + \ell/(\ell + 1) < 2$ derivate; si tratta di casi in cui per l'autovalore λ del localizzato che viola la (5) in un punto caratteristico ρ (per il quale, cioè, vale $\lambda(\rho) = 0$), la quantità $(H^\ell_{\operatorname{Re}\lambda} \operatorname{Im}\lambda)(\rho) \neq 0$, col segno "giusto" quando ℓ è dispari).

Per lasciare un po' di flessibilità nello studio dell'ipoellitticità con perdita di molte derivate, è utile dare la seguente definizione, che dipende dal punto $\rho \in \dot{T}^*X$.

Definizione 1.1. *L'operatore P è (C^∞) ipoellittico in $\rho = (x_0, \xi_0) \in \dot{T}^*X$ con perdita di $r \geq 0$ derivate se per ogni $u \in \mathcal{D}'(X)$ ed ogni $s \in \mathbb{R}$*

$$Pu \in H^s(\rho) \Longrightarrow u \in H^{s+m-r}(\rho),$$

dove $v \in \mathcal{D}'(X)$ appartiene ad $H^s(\rho)$ vuol dire che $v = v' + v''$ con $v' \in H^s_{\mathrm{loc}}(X)$ e $\rho \notin \mathrm{WF}(v'')$ (cioè v'' è C^∞ vicino ad x_0 in direzioni "conicamente vicine" alla direzione ξ_0).
Si dirà perciò che P è (C^∞) ipoellittico in $x_0 \in X$ con perdita di r derivate se P è ipoellittico in $(x_0, \xi) \in \dot{T}^*X$ con perdita di r derivate per ogni direzione $\xi \in \dot{T}_{x_0}X$.

2. L'esempio di Stein e l'operatore di Kohn

In questa sezione ricordo gli esempi di E. Stein [15], J. J. Kohn [9], l'esempio "Kohn-piatto" dovuto a M. Christ [3], e la generalizzazione di quest'ultimo dovuta C. Parenti e me [13]. Menzionerò anche un risultato dovuto a B. Street [16] nel caso dell'esempio di Kohn che estende, nello spirito di [12] ma usando un calcolo pseudodifferenziale sviluppato da A. Nagel e Stein, i risultati di ipoellitticità (con la stessa perdita di derivate) in spazi di Sobolev basati su L^p. Nella sezione successiva farò vedere come la tecnica di [12] permetta di ottenere l'ipoellitticità degli esempi di Stein e Christ come conseguenza dell'ellitticità di un certo operatore indotto da P sulla sua varietà caratteristica Σ.

L'esempio di Stein. E. Stein considera, sul gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, il laplaciano di Kohn sulle funzioni $\Box_b^{(0,0)} = -\sum Z_j \bar{Z}_j$, dove

$$Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + i\bar{z}_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad 1 \leq j \leq n, \ \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big), \ z_j = x_j + iy_j,$$

e dove $(z_1, \ldots, z_n, t)$ sono le coordinate in $\mathbb{H}^n$. In generale, su $(0, q)$-forme,

$$\Box_b^{(0,q)} = \Big(-\frac{1}{2}\sum (Z_j\bar{Z}_j + \bar{Z}_j Z_j) - (n-2q)D_t\Big)\mathrm{Id},$$

con varietà caratteristica Σ che è simplettica. Quando $q = 0, n$ si vede che la condizione (4) (equivalentemente (5) è violata. L'operatore non è né ipoellittico né risolubile.

Teorema 2.1 (Stein [15])**.** *Per $q = 0, n$, l'operatore $\Box_b^{(0,q)} + \delta$, dove $\delta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, è C^∞ ipoellittico (e anche analitico-ipoellittico).*

In seguito K. Kwon [10] ha mostrato (col metodo delle "concatenazioni" dovuto a F. Treves) che ciò è vero anche quando la δ è una funzione liscia a valori complessi mai nulla. Successivamente A. Grigis e L. P. Rothschild hanno esteso in [4] il risultato di ipoellitticità C^∞ (e analitica) al caso di operatori del tipo $p(X, Y, [X, Y])$, p polinomio che soddisfa certe proprietà, su gruppi nilpotenti "di passo due". I risultati di [12] permettono di riottenere anche i risultati di [4] nel caso C^∞).

L'esempio di Kohn. J. J. Kohn considera i campi (complessi) seguenti: per $(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ e per un intero $d \geq 1$,

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} + i\bar{z}\frac{\partial}{\partial t}, \ X_1 = \bar{Z}, \ X_{2,d} := \bar{z}^d Z,$$
$$E_d = X_1^* X_1 + X_{2,d}^* X_{2,d} = -Z\bar{Z} - \bar{Z}|z|^{2d} Z.$$

I campi X_1 e $X_{2,d}$ soddisfano l'ipotesi di Hörmander al passo $d+2 > 2$ in un intorno dell'origine di $\mathbb{R}^3$: X_1 e $X_{2,d}$, assieme ai loro commutatori di ordine $d+1$, generano il complessificato del piano tangente all'origine. Vale il seguente teorema.

Teorema 2.2 (Kohn [9]). *L'operatore E_d* **non** *è subellittico vicino a 0 e tuttavia è ipoellittico con perdita di $d+1$ derivate.*

In [16], B. Street considera una funzione liscia $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(0) = 0$ *esattamente* all'ordine d. Vale allora il seguente teorema.

Teorema 2.3 (Street [16]). *Sia $P = Z\bar{Z} + \bar{Z}f(|z|^2)Z$. Sia $1 < p < +\infty$ e sia u una distribuzione. Se $Pu \in H^{s,p}$ in (z,t) allora $u \in H^{s+1-d,p}$ in (z,t), l'operatore perde cioè $d+1$ derivate in L^p.*

L'esempio "Kohn-piatto" di Christ. Per un intero $d \geq 1$, M. Christ considera i campi

$$L = \frac{\partial}{\partial x} - ix\frac{\partial}{\partial t}, \quad X_1 = \bar{L}, \ X_{2,d} = x^d L.$$

Teorema 2.4 (Christ [3]). *L'operatore $E_d' = X_1^* X_1 + X_{2,d}^* X_{2,d}$ è ipoellittico, con perdita di $d+1$ derivate.*

Al pari dell'esempio di Stein, anche il risultato precedente è ottenibile, come vedremo, tramite la tecnica di [12], la quale, in effetti, permette di trattare la seguente generalizzazione dell'esempio di Christ.

Teorema 2.5 (Parenti-Parmeggiani [13]). *Sia $\nu \geq 1$, e siano dati i numeri $\mu_1, \dots, \mu_\nu > 0$, supposti (per semplicità)* **razionalmente indipendenti**. *Sia $\gamma \in \mathbb{R}$ e, per un intero $d \geq 1$, si consideri il polinomio reale omogeneo*

$$Q(x) = \sum_{|\alpha|=d} c_\alpha x^{2\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}^\nu,$$

dove $c_\alpha \geq 0$ *e*

$$\sum_{|\alpha|=d} c_\alpha > 0.$$

In $\mathbb{R}^\nu_x \times \mathbb{R}_t$ *si considerino i campi* $X_j = D_{x_j} - i\mu_j x_j D_t$, $j = 1, \ldots, \nu$, *e l'operatore*

$$P = \sum_{j=1}^{\nu} X_j^* X_j + \sum_{j=1}^{\nu} X_j Q(x) X_j^* + (\gamma + |\mu|) D_t,$$

dove $|\mu| = \mu_1 + \ldots + \mu_\nu$. *Supponiamo si abbia*

$$\gamma = -2\langle \ell, \mu\rangle - |\mu|, \ \textit{ovvero}\ \gamma = 2\langle \ell, \mu\rangle + |\mu| \quad (\langle \ell, \mu\rangle = \ell_1\mu_1 + \ldots + \ell_\nu\mu_\nu),$$

per un certo $\ell \in \mathbb{Z}^\nu_+$ *(cioè la condizione di Boutet-Grigis-Helffer sia violata), necessariamente unico a causa della razionale indipendenza dei* μ_j. *Allora* P *è ipoellittico con perdita di* $d+1$ *derivate in ogni punto* $(0, t) \in \mathbb{R}^{\nu+1}$ *e non può essere ipoellittico con una perdita minore di derivate.*

Si noti che i numeri $\pm\gamma + 2\langle \ell, \mu\rangle + |\mu|$ sono gli autovalori dei localizzati $P_{\rho_\pm}$ in $\rho_\pm = (x = 0, t, \xi = 0, \tau = \pm 1)$.

3. La "macchina"

Considero in questa sezione un operatore pseudodifferenziale (propriamente supportato) $P = p(x, D_x, D_t)$, con simbolo $p \in \mathrm{S}^{m,k}(\mathbb{R}^\nu_x \times \mathbb{R}^{n-\nu}_t, \Sigma)$ indipendente (per semplicità) da t, dove $1 \leq \nu < n$, $k \geq 2$ *è pari*, e $\Sigma = \{(x, t, \xi, \tau);\ x = \xi = 0,\ \tau \neq 0\} \simeq \dot{T}^*\mathbb{R}^{n-\nu}_t$ (e dunque Σ è simplettica). Supponiamo che

$$p \sim \sum_{j\geq 0} p_{m-j/2}, \quad \text{dove}\ \ p_{m-j/2}(x, s\xi, s\tau) = s^{m-j/2} p_{m-j/2}(x, \xi, \tau),\ \ s > 0,$$

sia *trasversalmente ellittico*, cioè (lo ricordiamo) $|p_m|$ si annulli *esattamente* all'ordine k su Σ. (In questo caso $\mathrm{dist}_\Sigma(x, t, \xi, \tau) = |x| + \dfrac{|\xi|}{\sqrt{|\xi|^2 + |\tau|^2}}$).
La scalatura "semi-intera" considerata è dovuta all'omogeneità naturale dell'oscillatore armonico.

Poiché p non dipende da t, scriviamo il localizzato in un punto $(0, t, 0, \tau \neq 0)$ della varietà simplettica Σ come

$$P_\tau^{(k)} = \sum_{|\alpha|+|\beta|+j=k} \frac{1}{\alpha!\beta!}(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_{m-j/2})(0,0,\tau) x^\alpha D_x^\beta.$$

Avremo bisogno anche di considerare i localizzati di ordine superiore: per $p \geq 1$ il *localizzato di ordine $k+p$ in $\rho = (0,t,0,\tau \neq 0)$* è l'operatore

$$P_\tau^{(k+p)} := \sum_{|\alpha|+|\beta|+j=k+p} \frac{1}{\alpha!\beta!}(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_{m-j/2})(0,0,\tau) x^\alpha D_x^\beta.$$

Facciamo ora la seguente ipotesi nei punti $\tau_0 \neq 0$ nei quali $P_{\tau_0}^{(k)}$ *non* è iniettivo.

Ipotesi. *Diciamo che P soddisfa l'ipotesi (H) in τ_0 se*

- $\operatorname{Ker} P_{\tau_0}^{(k)} \neq \{0\}$*;*
- $[P_\tau^{(k)}, (P_\tau^{(k)})^*] = 0$*, per ogni $\tau \neq 0$ vicino a τ_0;*
- *esistono funzioni $h_0(\tau; x) = h_0 \in C^\infty(\dot{\mathbb{R}}_\tau^{n-\nu}; \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^\nu))$ e $\lambda(\tau) = \lambda \in C^\infty(\dot{\mathbb{R}}_\tau^{n-\nu}; \mathbb{C})$ tali che*

$$h_0(s\tau; s^{-1/2}x) = s^{\nu/4} h_0(\tau; x),\ s > 0,\ \|h_0(\tau; \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^\nu)} = 1,\ \forall \tau \neq 0,$$

$$\lambda(s\tau) = s^{m-k/2}\lambda(\tau),\ s > 0,\ \lambda(\tau_0) = 0;$$

- *c'è un intorno (conico) $V \subset \dot{\mathbb{R}}_\tau^{n-\nu}$ di τ_0 tale che*

$$(P_\tau^{(k)} h_0)(\tau; x) = \lambda(\tau) h_0(\tau; x),\ \forall \tau \in V.$$

Occorre ora introdurre gli operatori di Hermite e co-Hermite (che sono la "quantizzazione" della proiezione sul nucleo del localizzato e della sua aggiunta). Consideriamo dei simboli C^∞

$$\phi(\tau; x) \sim \sum_{j \geq 0} \phi_{-j/2}(\tau; x),$$

tali che

$$\begin{cases} \phi_{-j/2} \in C^\infty(\dot{\mathbb{R}}_\tau^{n-\nu}; \mathcal{S}(\mathbb{R}_x^\nu)), \\ \phi_{-j/2}(s\tau; s^{-1/2}x) = s^{\nu/4 - j/2}\phi(\tau; x),\ s > 0, \\ \phi_0(\tau; x) = h_0(\tau; x). \end{cases} \tag{6}$$

In corrispondenza abbiamo gli operatori di Hermite H_ϕ^-

$$(7)\qquad \begin{cases} H_\phi^- : C_0^\infty(\mathbb{R}_t^{n-\nu}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}_{x,t}^n) \\ (H_\phi^- f)(x,t) = (2\pi)^{-(n-\nu)} \displaystyle\int e^{i\langle t,\tau\rangle}\phi(\tau;x)\hat{f}(\tau)d\tau, \end{cases}$$

e quelli co-Hermite H_ϕ^+

$$(8)\qquad \begin{cases} H_\phi^+ : C_0^\infty(\mathbb{R}_{x,t}^n) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}_t^{n-\nu}) \\ (H_\phi^+ g)(t) = (2\pi)^{-(n-\nu)} \displaystyle\iint e^{i\langle t,\tau\rangle}\overline{\phi(\tau;x)}\hat{g}(x,\tau)d\tau. \end{cases}$$

Gli operatori $H_\phi^\pm$ hanno "ordine" 0, e dunque gli H_ϕ^+ sono continui dagli H^s su $\mathbb{R}^n$ agli H^s (stesso s) su $\mathbb{R}^{n-\nu}$, mentre gli H_ϕ^- sono continui dagli H^s su $\mathbb{R}^{n-\nu}$ negli H^s (stesso s) su $\mathbb{R}^n$.

Ora, per ϕ fissata come sopra, si considera il sistema

$$\mathsf{P}_\phi = \begin{bmatrix} P & H_\phi^- \\ H_\phi^+ & 0 \end{bmatrix} : \begin{matrix} C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \times \\ C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-\nu}) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \times \\ C^\infty(\mathbb{R}^{n-\nu}) \end{matrix}.$$

In [12] è provato il seguente teorema.

Teorema 3.1. *Dato P_ϕ come sopra, esistono*

- *un simbolo $\psi(\tau;x) \sim \sum_{j\geq 0}\psi_{-j/2}(\tau;x)$ soddisfacente (6);*
- *un operatore pseudodifferenziale $E \in \mathrm{OPS}_{1/2,1/2}^{-m+k/2}(\mathbb{R}^n)$ che è microlocale (cioè $\mathrm{WF}(Ev) \subset \mathrm{WF}(v)$ per ogni $v \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$);*
- *un operatore pseudodifferenziale (classico) $\Lambda \in \mathrm{OPS}^{m-k/2}(\mathbb{R}_t^{n-\nu})$ con simbolo $\Lambda = \Lambda(\tau)$ indipendente da t e simbolo principale $\Lambda_{m-k/2}(\tau) = \lambda(\tau)$,*

tali che il sistema

$$\mathsf{E}_\psi = \begin{bmatrix} E & H_\psi^- \\ H_\psi^+ & -\Lambda \end{bmatrix}$$

è una parametrice microlocale bilatera di P_ϕ in un intorno conico aperto Γ_ϵ, $\epsilon > 0$, della forma

$$\Gamma_\epsilon = \{(x,t,\xi,\tau);\ \tau \neq 0,\ |x| + \frac{|\xi|}{|\tau|} < \epsilon,\ \left|\frac{\tau}{|\tau|} - \frac{\tau_0}{|\tau_0|}\right| < \epsilon\}.$$

La prova è basata su una costruzione dovuta a Grushin, poi implementata da Sjöstrand in [14] ed in seguito da Helffer in [5].

L'idea di Grushin è la seguente. Sia E uno spazio di Hilbert e sia $A\colon E \longrightarrow E$ un operatore di Fredholm (cioè con nucleo di dimensione finita ed immagine (chiusa) di codimensione finita) con indice 0 (cioè $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Ker} A^*$). Sia allora $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Span}\{w_1, \dots, w_m\}$ e $\operatorname{Im} A^\perp = \operatorname{Ker} A^* = \operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$, dove i w_j, risp. i v_j, sono ortonormali. Se $V \subset E$ ha dimensione m, e se $e_1, \dots, e_m$ è una base ortonormale di V, si definiscono gli operatori

$$h_V^-\colon \mathbb{C}^m \ni \zeta \longmapsto \sum_{j=1}^m \zeta_j e_j \in E, \qquad h_V^+\colon E \ni x \longmapsto \begin{bmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_m \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^m.$$

Allora l'operatore

$$\begin{bmatrix} A & h^-_{\operatorname{Ker} A^*} \\ h^+_{\operatorname{Ker} A} & 0 \end{bmatrix} : \begin{matrix} E \\ \times \\ \mathbb{C}^m \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} E \\ \times \\ \mathbb{C}^m \end{matrix}$$

è *invertibile*, con inverso dato da

$$\begin{bmatrix} B & h^-_{\operatorname{Ker} A} \\ h^+_{\operatorname{Ker} A^*} & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{dove} \quad By = \begin{cases} 0, & y \in \operatorname{Ker} A^*, \\ \\ \tilde{A}y := (A\big|_{\operatorname{Ker} A^\perp})^{-1} y, & y \in \operatorname{Im} A. \end{cases}$$

Infatti, da $Ax + h^-_{\operatorname{Ker} A^*}\zeta = 0$ segue che $Ax = h^-_{\operatorname{Ker} A^*}\zeta = 0$, i.e. $x \in \operatorname{Ker} A$ e $\zeta = 0$, e da $h^+_{\operatorname{Ker} A} x = 0$ segue che $x \in \operatorname{Ker} A^\perp$. Dunque $x = 0$ e $\zeta = 0$, ciò che prova l'iniettività. Per vedere la suriettività, sia

$$\begin{cases} Ax + h^-_{\operatorname{Ker} A^*}\zeta = y, \\ h^+_{\operatorname{Ker} A} x = \eta, \end{cases} \qquad (y, \eta) \in E \times \mathbb{C}^m.$$

Allora $x = \sum_{j=1}^m \eta_j w_j + x'$, con $x' \in \operatorname{Ker} A^\perp$. Scrivendo $y = y' + y'' \in \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Ker} A^*$, da $h^-_{\operatorname{Ker} A^*}\zeta = y''$ si ha che $\zeta = \begin{bmatrix} \langle y'', v_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle y'', v_m \rangle \end{bmatrix}$, e quindi, finalmente, si prende $x' = \tilde{A}^{-1} y'$. □

La dimostrazione del Teorema 3.1 dà, di più, un modo per calcolare i termini che compaiono nel simbolo di Λ. Infatti, scegliendo $\phi_{-j/2} = 0$ per $j \geq 1$, si ha la seguente descrizione del simbolo $\Lambda(\tau)$ per $|\tau/|\tau| - \tau_0/|\tau_0|| < \epsilon$:

$$
(9) \qquad \begin{cases} \Lambda_{m-k/2}(\tau) = \lambda(\tau), \\ \\ \Lambda_{m-k/2-j/2}(\tau) = \displaystyle\sum_{\substack{p+q=j \\ 0\le q<j}} \Big(P_\tau^{(k+p)} \psi_{-q/2}(\tau;\cdot), \phi_0(\tau;\cdot) \Big)_{L^2(\mathbb{R}^\nu)}, \; j \ge 1, \end{cases}
$$

dove

(10)

$$
\begin{cases} \psi_0 = \phi_0 = h_0, \\ \psi_{-q/2}(\tau;x) = (P_\tau^{(k)})^{-1} \Big[\Lambda_{m-k/2-q/2}(\tau)\phi_0(\tau;\cdot) + \displaystyle\sum_{\substack{p'+q'=q \\ 0\le q'<q}} P_\tau^{(k+p')} \psi_{-q'/2}(\tau;\cdot) \Big], \; q \ge 1, \end{cases}
$$

dove $(P_\tau^{(k)})^{-1}$ è l'inverso della restrizione di $P_\tau^{(k)}$ a $\big(\mathrm{Ker}(P_\tau^{(k)} - \lambda(\tau))\big)^\perp$.

La conseguenza che ci interessa è ora la seguente.

Corollario 3.1. *Nelle ipotesi precedenti, l'operatore P è ipoellittico in $\rho_0 = (0, t_0, 0, \tau_0)$ con perdita di $k/2 + r$ derivate ($r > 0$) se e solo se l'operatore Λ è ipoellittico in (t_0, τ_0) con perdita di r derivate.*

L'idea della prova del corollario è la seguente. Porrò nel seguito $H_\phi^\pm = H^\pm$ e $H_\psi^\pm = K^\pm$. Per provare $\Leftarrow$ usiamo

$$
(11) \qquad \begin{bmatrix} E & K^- \\ K^+ & -\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & H^- \\ H^+ & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EP + K^-H^+ & EH^- \\ K^+P - \Lambda H^+ & K^+H^- \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-\nu} \end{bmatrix}.
$$

Infatti se $u \in \mathcal{D}'$ è tale che $Pu \in H^s(\rho_0)$ (si ricordi che $\rho_0 = (0, t_0, 0, \tau_0)$) allora (per il teorema di continuità di Calderón-Vaillancourt per operatori nelle classi $S^m_{1/2,1/2}$) $EPu \in H^{s+m-k/2}(\rho_0)$, e dunque, per la (11), anche $u - K^-H^+u \in H^{s+m-k/2}(\rho_0)$. D'altro canto, da $K^+Pu \in H^s(t_0, \tau_0)$ segue, sempre usando la (11), che $\Lambda H^+u \in H^s(t_0, \tau_0)$ e dunque, per l'ipotesi che Λ (il cui ordine è $m - k/2$) sia ipoellittico con perdita di r derivate, $H^+u \in H^{s+m-k/2-r}(t_0, \tau_0)$. Quindi $K^-H^+u \in H^{s+m-k/2-r}(\rho_0)$, e finalmente, usando di nuovo $u - K^-H^+u \in H^{s+m-k/2}(\rho_0)$, si conclude che $u \in H^{s+m-k/2-r}(\rho_0)$.

Per la prova di $\Rightarrow$ si usa invece

$$\begin{bmatrix} P & H^- \\ H^+ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & K^- \\ K^+ & -\Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PE + H^-K^+ & PK^- - H^-\Lambda \\ H^+E & H^+K^- \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_{n-\nu} \end{bmatrix}.$$

Infatti se $v \in \mathcal{D}'$ e $\Lambda v \in H^s(t_0, \tau_0)$, allora $H^-\Lambda v \in H^s(\rho_0)$ e dunque $PK^-v \in H^s(\rho_0)$. L'ipoellitticità di P dà allora $K^-v \in H^{s+m-k/2-r}(\rho_0)$, ed essendo $v - H^+K^-v \in C^\infty$ (in dimensione $n-\nu$) e $H^+K^-v \in H^{s+m-k/2-r}(t_0, \tau_0)$, si ottiene $v \in H^{s+m-k/2-r}(t_0, \tau_0)$. Poiché l'ordine di Λ è $m - k/2$, ciò conclude la "prova". $\square$

Dunque corollario e teorema, combinati con lo sviluppo del simbolo dell'operatore indotto Λ, permettono di ridurre il problema dell'ipoellitticità di P a quello di Λ. C'è da osservare (si veda [12]) che in generale Λ è un *sistema* di operatori. Fortunatamente negli esempi che ci interessano esso si riduce ad un operatore scalare, del quale è immediato dedurre l'ipoellitticità.

In generale si ha che molte delle informazioni contenute in Λ sono trasferibili a P (si veda [12]).

Si osservi che, per le ipotesi fatte, il teorema dice che sia P che P^* sono ipoellittici (e dunque entrambi risolubili).

4. Applicazione agli esempi

L'esempio di Stein. Consideriamo i campi vettoriali (puramente immaginari) su $\mathbb{R}^\nu_t \times \mathbb{R}^\nu_s \times \mathbb{R}_{y'}$

$$X_j = \frac{1}{i}\Big(\frac{\partial}{\partial t_j} + 2s_j \frac{\partial}{\partial y'}\Big),\ Y_j = \frac{1}{i}\Big(\frac{\partial}{\partial s_j} - 2t_j \frac{\partial}{\partial y'}\Big),\ 1 \le j \le \nu,\ T = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Allora

$$X_j = X_j^*,\ Y_j = Y_j^*,\quad [X_j, Y_k] = 4i\delta_{jk}T,\ 1 \le j, k \le \nu.$$

I campi X_j, Y_j e T sono i ben noti campi invarianti a sinistra associati al gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^\nu$.

Si sa ([4]) che *microlocalmente* vicino ad una direzione $\eta' \neq 0$ (duale ad y') esiste un operatore integrale di Fourier F unitario di ordine 0 tale che

$$X_jF = FD_{x_j},\ Y_jF = Fx_jD_y,\ TF = F(-\frac{1}{4}D_y).$$

(L'operatore è quello associato ad una trasformazione simplettica che rende "piatta" la varietà caratteristica intersezione delle varietà caratteristiche degli X_j ed Y_k. La trasformazione canonica omogenea è quella ottenuta completando la trasformazione $\xi_j = \tau_j + 2s_j\eta'$, $x_j = -\frac{1}{4}\frac{\sigma_j - 2t_j\eta'}{\eta'}$, $\eta = -4\eta'$, dove τ_j e σ_j sono le variabili duali a t_j e s_j). Considero ora il polinomio differenziale (invariante a sinistra)

$$p(X,Y,T) = \sum_{j=1}^{\nu}(X_j^2 + \mu_j^2 Y_j^2) + \sum_{j=1}^{\nu}(\alpha_j X_j + \beta_j Y_j) + \gamma T + \delta,$$

dove $\mu_j > 0$ e $\alpha_j, \beta_j, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, $1 \le j \le \nu$. Allora, microlocalmente,

$$p(X,Y,T)F = FP,\ \ P = \sum_{j=1}^{\nu}(D_{x_j}^2 + \mu_j^2 x_j^2 D_y^2) + \sum_{j=1}^{\nu}(\alpha_j D_{x_j} + \beta_j x_j D_y) - \frac{\gamma}{4}D_y + \delta.$$

Si calcola che per $\rho = (x = 0, y, \xi = 0, \eta \neq 0) \in \Sigma$ il localizzato è

$$P^{(2)}_{(y,\eta)} = P^{(2)}_\eta = \sum_{j=1}^{\nu}(D_{x_j}^2 + \mu_j^2 x_j^2 \eta^2) - \frac{\gamma}{4}\eta,$$

il cui spettro è

$$\mathrm{Spec}(P^{(2)}_\eta) = \{\sum_{j=1}^{\nu}(2k_j + 1)\mu_j|\eta| - \frac{\gamma}{4}\eta;\ k \in \mathbb{Z}_+^\nu\}.$$

Dunque, il teorema di Boutet-Grigis-Helffer dice che P (e dunque $p(X,Y,T)$) è ipoellittico con perdita di una derivata se e solo se

$$\frac{\gamma}{4} \notin \{\pm\sum_{j=1}^{\nu}(2k_j + 1)\mu_j;\ k \in \mathbb{Z}_+^\nu\}.$$

Supponiamo ora ci siano $\ell \ge 1$ multi-indici $k^{(1)}, \ldots, k^{(\ell)} \in \mathbb{Z}_+^\nu$ tali che

$$\frac{\gamma}{4} = \sum_{j=1}^{\nu}(2k_j^{(j')} + 1)\mu_j,\ 1 \le j' \le \ell,$$

ovvero

$$\frac{\gamma}{4} = -\sum_{j=1}^{\nu}(2k_j^{(j')} + 1)\mu_j,\ 1 \le j' \le \ell.$$

Supponiamo, per definitezza, di essere nel primo caso, e consideriamo dunque $\rho = (x = 0, y, \xi = 0, \eta > 0)$. Si calcola che

$$P^{(3)}_\eta = \sum_{j=1}^{\nu}(\alpha_j D_{x_j} + \beta_j x_j \eta),\quad P^{(4)}_\eta = \delta,$$

e che, dunque, per il simbolo di $\Lambda(y, D_y)$ (che ha a priori ordine $m - k/2 = 1$) vale, con $\eta > 0$,

$$\Lambda_1(y, \eta) = 0, \quad \Lambda_{1/2}(y, \eta) = 0,$$

$$\Lambda_0(y, \eta) = \delta I_\ell - \Big(\text{termine calcolato usando } P_\eta^{(3)} \text{ e le autofunzioni di } P_\eta^{(2)}\Big).$$

Dunque dal Corollario 3.1 (nel caso $\ell = 1$; in realtà nel caso $\ell > 1$ occorre la versione più generale contenuta in [12]) P è ipoellittico con perdita di 2 derivate in $(0, y, 0, \eta > 0)$ (e dunque ovunque, essendo γ una costante) se e solo se la matrice complessa $\ell \times \ell$

$$\Lambda_0(y, \eta) \quad \textit{è invertibile.}$$

L'esempio di Stein ricade in questa forma quando $\nu = n$, $\alpha = \beta = 0$ (in tal caso $\ell = 1$): per $q = 0, n$, l'operatore $\Box_b^{(0,q)} + \delta$ è ipoellittico con perdita di 2 derivate se e solo se $\delta \neq 0$.

L'esempio "Kohn-piatto" di M. Christ. Mostriamo che l'operatore $E_d' = P$ è ipoellittico con perdita di $d+1$ derivate. Per fissare le idee prendiamo $d = 2$. L'operatore

$$P = (1 + x^{2d})(D_x^2 + x^2 D_t^2) - 2idx^{2d-1} D_x - (1 - (2d+1)x^{2d}) D_t$$

ha caratteristiche doppie, dunque $m = k = 2$ e $m - k/2 = 2 - 1 = 1$. Prendiamo $\rho = (x = 0, t, \xi = 0, \tau \neq 0)$. Allora

- il localizzato $P_\rho^{(2)} = D_x^2 + x^2\tau^2 - \tau$;
- la funzione ϕ_0 di (6) è data da $\phi_0(\tau; x) = |\tau|^{1/4} h_0(x\sqrt{|\tau|})$, dove $h_0(s) = \pi^{-1/4} e^{-s^2/2}$ è la prima funzione di Hermite;
- $P_\rho^{(j)} = 0$, $j = 3, 4, 5$;
- $P_\rho^{(6)} = P_\rho^{(2+2d)} = x^4(D_x^2 + x^2\tau^2) - 4ix^3 D_x + 5x^4\tau$;
- $\Lambda_{m-k/2}(t, \tau) = \Lambda_1(t, \tau) = \lambda(\tau) = |\tau| - \tau$;
- $\Lambda_{1/2}(t, \tau) = \Lambda_0(t, \tau) = \Lambda_{-1/2}(t, \tau) = 0$;
- $\Lambda_{1-d}(t, \tau) = \Lambda_{-1}(t, \tau) = (P_\rho^{(6)} \phi_0, \phi_0)_{L^2(\mathbb{R})} = \dfrac{27}{4|\tau|} \neq 0.$

Dunque $\Lambda(t, D_t)$ è caratteristico (con parte significativa di ordine -1) nei punti (t, τ) nei quali $\tau > 0$, e

$$\Lambda(t, D_t) v \in H^s(t, \tau) \Longrightarrow v \in H^{s-1}(t, \tau),$$

quindi $s+m-k/2-r=s+1-r=s-1$, i.e. $r=2$. Ne segue quindi che la perdita di derivate $k/2+r$ è $1+2=3$ e che dunque E_2' è ipoellittico con perdita di 3 derivate. Più in generale, per $d\geq 1$ qualsiasi E_d' è ipoellittico con perdita di $d+1$ derivate, valendo, in tal caso,

$$\Lambda(t,D_t)v\in H^s(t,\tau)\Longrightarrow v\in H^{s+(1-d)}(t,\tau),$$

cioè $s+m-k/2-r=s+1-d$, i.e. $k/2+r=2-(1-d)=d+1$.

È interessante notare che se $\delta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, allora $E_d'+\delta$ è *sempre* ipoellittico con perdita di 2 derivate, comunque sia scelto $d\geq 1$. (Si ha quindi un fenomeno analogo a quello dell'esempio di Stein).

Osserviamo che l'esempio di Kohn dato dall'operatore E_d è un esempio "difficile" da studiare con la tecnica di [12], in quanto per trasformare l'operatore nel suo rispettivo piatto, occorrerebbe conoscere esplicitamente la trasformazione canonica usata sopra per l'operatore $p(X,Y,T)$. Questo è un limite della tecnica sviluppata in [12]. Ciò che occorre è rendere l'approccio invariante. D'altra parte è presumibile che la stessa tecnica sviluppata in casi piatti, ma "anisotropi", cioè quando l'operatore di riferimento è un oscillatore anarmonico del tipo $D_x^2+x^{2k}|\tau|^2$ (nel caso di [12] è l'oscillatore armonico $D_x^2+x^2|\tau|^2$), possa ancora dar luogo a risultati di ipoellitticità con perdita di r derivate. Qui la maggiore difficoltà risiede nel fatto che le autofunzioni di $D_x^2+x^{2k}|\tau|^2$ non sono esplicitamente note.

Concludo dando un altro esempio (tratto dai molti costruiti in [12]) nel quale l'approccio può essere iterato, considerando i localizzati dell'operatore Λ sulla sua varietà caratteristica. Si consideri infatti in $\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_y^{n-1}$, $n\geq 3$, l'operatore

$$P=(D_x^2+\mu^2x^2|D_y|^2)^2+(1-\mu^2)D_{y_1}^2+(\sigma^2y_1^2-\mu^2)|D_{y'}|^2+aD_x^2+\gamma,$$

dove $a,\gamma\in\mathbb{C}$, $\mu,\sigma\in\mathbb{R}_+$, e $y=(y_1,y')$. Allora

- P è ipoellittico con perdita di 2 derivate in ogni punto $(x=0,y_1,y',\xi=0,\eta_1,\eta')$ nel quale $(y_1,\eta_1)\neq(0,0)$;
- in ogni punto di $\Sigma'=\{x=\xi=0,\ y_1=\eta_1=0,\ \eta'\neq 0\}\subset\Sigma=\{x=\xi=0,\ \eta\neq 0\}$, P può essere ipoellittico solamente con una perdita di derivate ≥ 3, ed infatti è

ipoellittico con perdita di 3 derivate se e solo se

$$a \neq -\frac{2\sigma}{\mu}(2j+1), \quad \forall j \in \mathbb{Z}_+;$$

- se $a = -2(\sigma/\mu)(2j+1)$ per un certo $j \in \mathbb{Z}_+$, P può essere ipoellittico nei punti di Σ' solo con una perdita di derivate ≥ 4, ed infatti è ipoellittico con perdita di 4 derivate se e solo se

$$\gamma \neq \frac{\sigma^2(2j+1)^2}{4}\Big(1+\frac{1}{3\mu^2}\Big);$$

- se

$$a = -\frac{2\sigma}{\mu}(2j+1), \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{\sigma^2(2j+1)^2}{4}\Big(1+\frac{1}{3\mu^2}\Big)$$

per qualche $j \in \mathbb{Z}_+$, P può essere ipoellittico solo con una perdita di derivate ≥ 5, ed infatti è ipoellittico con perdita di 5 derivate se e solo se

$$\mu^2 \neq \frac{2}{9}\frac{(2j+1)^2}{j^2+j+2}.$$

(In questo caso l'operatore $\Lambda(y, D_y)$ indotto da P sulla sua varietà caratteristica Σ ha simbolo principale $\Lambda_2(y,\eta) = \eta_1^2 + \sigma^2 y_1^2 |\eta'|^2$, e le condizioni precedenti sono desunte considerando il localizzato di $\Lambda(y, D_y)$).

Riferimenti bibliografici

[1] L. Boutet de Monvel. *Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo-differential operators.* Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 585–639.

[2] L. Boutet de Monvel, A. Grigis e B. Helffer. *Paramétrixes D'Opérateurs Pseudo-Différentiels à Caractéristiques Multiples.* Astérisque **34-35** (1976), 93–121.

[3] M. Christ. *A remark on sums of squares of complex vector fields.* (2005). ArXiv:math.CV/0503506. Si veda anche http://www.math.berkeley.edu/~mchrist/preprints.html

[4] A. Grigis e L. P. Rothschild. *A criterion for analytic hypoellipticity of a class of differential operators with polynomial coefficients.* Annals of Math. **118** (1983), 443–460.

[5] B. Helffer. *Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifferentiels à caractéristiques multiples (perte de 3/2 dérivées).* Bull. Soc. Math. France Suppl. Mém. No. 51-52 (1977), 13–61.

[6] M. Hitrik e K. Pravda-Starov. *Semiclassical hypoelliptic estimates for non-selfadjoint operators with double characteristics.* Preprint (2009).

[7] L. Hörmander. *A class of hypoelliptic pseudodifferential operators with double characteristics.* Math. Ann. **217** (2) (1975), 165-188.

[8] L. Hörmander. The Analysis of Linear Partial Differential Operators, Vol. I-IV. Springer-Verlag (1983/85).

[9] J. J. Kohn. *Hypoellipticity and loss of derivatives.* Annals of Math. **162** (2) (2005), 943–986.

[10] K. H. Kwon. *Concatenations Applied to Analytic Hypoellipticity of Operators with Double characteristics.* Trans. American Mathematical Society **283** (2) (1984), 753–763.

[11] M. Mughetti. *Ipoellitticità per una somma di quadrati complessi.* Seminario di Analisi Matematica B. Pini, A.A. 2008-2009 (5 marzo 2009).

[12] C. Parenti e A. Parmeggiani. *On the hypoellipticity with a big loss of derivatives.* Kyushu J. Math. **59** (1) (2005), 155–230

[13] C. Parenti e A. Parmeggiani. *A Note on Kohn's and Christ's Examples. Hyperbolic problems and regularity questions* (M. Padula and L. Zanghirati Editors). Trends in Mathematics, Birkhäuser Verlag (Basel) (2006), 151–158.

[14] J. Sjöstrand. *Parametrices for Pseudodifferential Operators with Multiple Characteristics.* Arkiv för Matematik **12** (1974), 85–130.

[15] E. M. Stein. *An Example on the Heisenberg Group Related to the Levy Operator.* Inventiones Mathematicae **69**, 209–216.

[16] B. Street. *L^p regularity for Kohn's operator.* Math. Re. Lett. **13** (5) (2006), 703–711.