Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2006-07

Francescopaolo Montefalcone

Ipersuperfici e formule variazionali in gruppi di Carnot sub-Riemanniani

26 aprile 2007

Abstract

In this talk we are interested in the study of smooth immersed non-characteristic submanifolds (with or without boundary) of k-step sub-Riemannian Carnot groups, from a differential-geometric point of view. The methods of exterior differential forms and moving frames are extensively used. Particular emphasis is given to the case of hypersurfaces. We state divergence-type theorems and integration by parts formulas with respect to the intrinsic measure σ_{H}^{n-1} on hypersurfaces. General formulas for the first and the second variation of the measure σ_{H}^{n-1} are proved.

1. Introduzione

Negli ultimi anni vi è stato un notevole sforzo nell'estendere i metodi del Calcolo delle Variazioni e della Teoria Geometrica della Misura (TGM) a spazi metrici generali ed, in particolare, alle cosidette geometrie *sub-Riemanniane* o di *Carnot-Carathéodory*. Questo tipo di studio, in un certo senso, già preannunciato nel classico trattato di Federer (cfr. [14]), ha ricevuto recentemente nuovi stimoli, tra gli altri, dai lavori di Ambrosio e Kirchheim, [2, 3], Cheeger [9], De Giorgi, [13], Gromov, [22, 23], David e Semmes, [12], Pansu [38, 39]. Sotto questo aspetto, i *Gruppi di Carnot* divengono di particolare interesse e, in effetti, sono molti i filoni di ricerca in cui essi rivestono un ruolo importante: PDE, TGM, Calcolo delle Variazioni, Teoria del Controllo, etc.

Una delle principali ragioni di ciò è che essi costituiscono una classe molto vasta da cui attingere esempi concreti di geometrie sub-Riemanniane. Referenze specifiche, per quanto concerne la Geometria Sub-Riemanniana, sono [23], [37] e [45] e il recente [41]. È anche da sottolineare il fatto che, in virtù di un teorema dovuto a Mitchell (cfr. [34], [37]), il *cono tangente* (nel senso di *Gromov-Hausdorff*) in un punto regolare di una varietà sub-Riemanniana è un opportuno gruppo di Carnot. Questo giustifica ulteriormente l'interesse verso lo studio dei Gruppi di Carnot, i quali svolgono, per le geometrie sub-Riemanniane, un ruolo analogo a quello degli spazi Euclidei in geometria Riemanniana.

Tra i risultati che maggiormente hanno alimentato le recenti ricerche di TGM in tale contesto, ricordiamo il *Teorema di Rettificabiltà* per insiemi di *H-perimetro finito*, ottenuto da Franchi, Serapioni e Serra Cassano in [15] nel caso del *Gruppo di Heisenberg*, poi generalizzato al caso dei gruppi di passo 2 in [17].

Oggetto del presente seminario è la presentazione di alcuni aspetti della geometria differenziale delle ipersuperfici nei gruppi di Carnot e, in particolare, di alcune formule variazionali. In particolare, cercherò di riassumere i risultati da me precedentemente ottenuti in [36].

Il punto di vista qui adottato è quello della geometria differenziale classica. Per un approccio abbastanza differente, ma sempre geometrico-differenziale, alla geometria sub-Riemanniana, consigliamo gli articoli [40, 41] oltreché [23].

Come è usuale in geometria differenziale, tratterò sottovarietà regolari. Si noti che poiché i gruppi di Carnot si possono munire di una metrica Riemanniana invariante a sinistra, essi risultano naturalmente muniti anche della connessione di Levi-Civita relativa a tale metrica. Userò anche una nozione di *connessione parziale* o *orizzontale*, per mettere in luce alcuni aspetti tipicamente sub-Riemanniani. Le sottovarietà che considero, vengono supposte *geometricamente regolari* (cfr. Definizione 2.8) rispetto alla distribuzione H, e munite con misure *omogenee* rispetto alle dilatazioni intrinseche dei gruppi di Carnot. Nel caso delle ipersuperfici, tale misura coincide con la misura *H-perimetro* (alla De Giorgi), molto studiata nella letteratura (cfr. [1], [15, 16], [6], [15, 30], [19]). L'idea qui usata è quella di vedere l'H-perimetro di insiemi aventi frontiera regolare, come misura associata ad una opportuna forma differenziale σ_H^{n-1}. In tal modo si può utilizzare convenientemente l'utile strumento delle forme differenziali. In particolare, oltre ad introdurre alcune nozioni geometriche finalizzate allo studio delle ipersuperfici *non-caratteristiche* (NC), quali ad esempio la nozione di *seconda forma fondamentale orizzontale*, illustrerò alcune formule di integrazione per parti su ipersuperfici NC munite della misura σ_H^{n-1}.

Descriverò poi le formule della variazione prima e della variazione seconda di σ_H^{n-1} che,in effetti, costituiscono il principale oggetto del presente seminario. Si osservi che tali formule risultano essenziali, ad esempio, allo studio della equazione delle ipersuperfici minime sub-Riemanniana, la quale è stata ed è tuttora oggetto di numerosi studi (cfr. [10], [20], [42], [8], [5]).

Nell'ultima parte del seminario cercherò poi di discutere alcune motivazioni oltreché introdurre alcune tematiche connesse e qualche spunto per ulteriori ricerche.

2. Gruppi di Carnot, Sottovarietà H-regolari e misure associate

2.1. **Geometria dei Gruppi di Carnot.** Alcune delle seguenti nozioni riguardanti i gruppi di Lie, in particolare quelli nilpotenti, sono ben note e per esse suggeriamo il classico libro di Helgason [26] e l'articolo di Milnor [33]. Per quanto concerne invece le nozioni più propriamente sub-Riemanniane citiamo l'articolo di Gromov [22] ed il libro di Montgomery [37].

Un *gruppo di Carnot di passo* k $(\mathbb{G}, \bullet)$ è un gruppo di Lie (rispetto all'operazione $\bullet$) n-dimensionale, connesso, semplicemente connesso, nilpotente e statificato la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}(\cong \mathbb{R}^n)$ soddisfa: $\mathfrak{g} = H_1 \oplus ... \oplus H_k, \quad [H_1, H_{i-1}] = H_i \quad (i = 2, ..., k), \;\; H_{k+1} = \{0\}$. Denotando con 0 l'identità di $\mathbb{G}$, risulta $\mathfrak{g} \cong T_0\mathbb{G}$. Il sottofibrato H_1 del fibrato tangente $T\mathbb{G}$ è detto *orizzontale* e denotato d'ora in avanti con la lettera H. Posto $V := H_2 \oplus ... \oplus H_k$, si dirà *verticale* il sottofibrato V di $T\mathbb{G}$. Si assumerà che $dimH_i = m_i$ $(i = 1, ..., k)$ e che H sia generato da una base di campi vettoriali invarianti a sinistra $\underline{X_H} := \{X_1, ..., X_{m_1}\}$. Questa può completarsi ad una base globale (frame) di sezioni invarianti a sinistra $\underline{X} := \{X_i : i = 1, ..., n\}$ che sia *adattata alla stratificazione.* Cioè, se $h_l := m_1 + ... + m_l$ $(m_0 = h_0 := 0,\, h_k = n)$, vale $H_l = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\big\{X_i : h_{l-1} < i \leq h_l\big\}$. Se $\{\mathrm{e}_i : i = 1, ..., n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{g}$ adattata alla stratificazione, le sezioni X_i del frame $\underline{X}$ si ottengono mediante il differenziale della traslazione a sinistra $L_p\,(p \in \mathbb{G})$ di e_i, cioè $X_{ip} := L_{p_*}\mathrm{e}_i\;(i = 1, ..., n)$.

Notazione 2.1. *Nel corso del presente seminario si useranno estensivamente queste notazioni:* $I_H := \{1, ..., h_1\}$, $I_{H_2} := \{h_1 + 1, ..., h_2\}$,..., $I_{H_k} := \{h_{k-1} + 1, ..., h_k(= n)\}$, $I_V := \{h_1 + 1, ..., n\}$.

Le fibre orizzontali possono munirsi di una metrica $g_H = \langle\cdot,\cdot\rangle_H$ ed in tal caso, $\mathbb{G}$ si dice avere una *struttura sub-Riemanniana.* È importante osservare che si può sempre definire una metrica Riemanniana $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$, invariante a sinistra, per cui il frame $\underline{X}$ risulti *ortonormale* in ogni punto e tale che $g_{|H} = g_H$. Infatti, a tal fine, è sufficiente definire un prodotto Euclideo su $\mathfrak{g} = T_0\mathbb{G}$ il quale, mediante traslazione a sinistra, si estende a tutto il fibrato tangente. È da notare che in tal modo, la somma diretta in cui è suddivisa l'algebra $\mathfrak{g}$ diventa una *somma diretta ortogonale.*

Se $p \in \mathbb{G}$ ed $X \in \mathfrak{g}$ poniamo $\gamma_p^X(t) := exp[tX](p)\,(t \in \mathbb{R})$, cioè γ_p^X è la curva integrale del campo X di punto iniziale p e risulta un *sottogruppo ad un parametro* di $\mathbb{G}$. La *mappa esponenziale* è allora definita come $exp : \mathfrak{g} \longmapsto \mathbb{G}$, $exp(X) := exp[X](1)$. Risulta che exp è un diffeomorfismo analitico tra $\mathfrak{g}$ e $\mathbb{G}$ la cui inversa sarà denotata come log. Inoltre si ha $\gamma_p^X(t) = p \bullet exp(tX)\ \forall\, t \in \mathbb{R}$. D'ora in avanti fisseremo su $\mathbb{G}$ le cosidette *coordinate esponenziali di prima specie*, cioè le coordinate associate alla mappa log.

La distanza di *Carnot-Carathéodory* d_H relativa a g_H è definita, per $p, q \in \mathbb{G}$, come

$$d_H(p, q) := \inf \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|_H\, dt,$$

dove l'estremo inferiore è preso su tutte le curve orizzontali, regolari a tratti, congiungenti p a q. Essa rende $\mathbb{G}$ uno spazio metrico completo in cui ogni coppia di punti si connette con (almeno una) d_H-geodetica.

Ogni gruppo di Carnot è naturalmente munito di un gruppo ad un parametro di automorfismi $\delta_t : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ $(t > 0)$ che lo rendono un *gruppo omogeneo.* Usando coordinate esponenziali, se $p = exp\,(\sum_{j,i_j} p_{i_j}\mathrm{e}_{i_j})$, si ha che $\delta_t p = exp\,(\sum_{j,i_j} t^j\, p_{i_j}\mathrm{e}_{i_j})$ per ogni $p \in \mathbb{G}$.[1]

La *dimensione omogenea* di $\mathbb{G}$ è l'intero $Q := \sum_{i=1}^{k} i\, m_i$, coincidente con la *dimensione di Hausdorff* di $(\mathbb{G}, d_H)$ come spazio metrico.

L'introduzione della metrica g consente di inquadrare in un ambito Riemanniano lo studio di molte questioni riguardanti i gruppi di Carnot. Possiamo definire il co-frame $\underline{\omega} := \{\omega_i : i = 1, ..., n\}$ duale di $\underline{X}$. In particolare, le 1-forme invarianti a sinistra[2] ω_i sono determinate dalla condizione

$$\omega_i(X_j) = \langle X_i, X_j\rangle = \delta_i^j \quad \text{(Kroneker)} \quad (i, j = 1, ..., n).$$

Ricordiamo anche che le *costanti di struttura* di $\mathfrak{g}$ relative al frame $\underline{X}$ sono definite come

$$C_{ij}^r := \langle [X_i, X_j], X_r\rangle \quad (i, j, r = 1, ..., n).$$

Esse soddisfano le usuali proprietà:

(I) $C_{ij}^r + C_{ji}^r = 0$,

(II) $\sum_{j=1}^n C_{jl}^i C_{rm}^j + C_{jm}^i C_{lr}^j + C_{jr}^i C_{ml}^j = 0$.

La condizione di stratificazione dell'algebra si traduce come segue:

$$X_i \in H_l,\ X_j \in H_m \Longrightarrow [X_i, X_j] \in H_{l+m}. \tag{1}$$

Notare quindi che per $i \in I_{H_s}$ e $j \in I_{H_r}$ se si ha $C_{ij}^m \neq 0$ allora $m \in I_{H_{s+r}}$.

Notazione 2.2. *Nel seguito si denoteranno mediante lettere greche α, β, γ, etc., gli indici appartenenti ad I_V. Inoltre, se $\alpha \in I_{H_2}$ poniamo $C_H^\alpha := [C_{ij}^\alpha]_{i,j\in I_H} \in \mathcal{M}_{h_1\times h_1}(\mathbb{R})$. Più generalmente, se $\alpha \in I_H$, poniamo $C^\alpha := [C_{ij}^\alpha]_{i,j=1,...,n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.*

Nella seguente definizione viene richiamata la nozione di connessione su una varietà.

Definizione 2.1. *Una* **connessione affine** ∇ *su una* $\mathbf{C}^\infty$*-varietà* M *è una regola che assegna ad ogni* $X \in \mathfrak{X}(M)(:= \mathbf{C}^\infty(M, TM))$ *una mappa* $\mathbb{R}$*-lineare*

$$\nabla_X : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

chiamata **derivata covariante rispetto ad** X, *tale che per ogni* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ *ed ogni* $f, g \in \mathbf{C}^\infty(M)$ *si ha*

(1) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$;

(2) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + (Xf)Y$.

Se inoltre $(M, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *è una varietà Riemanniana, allora* ∇ *è l'unica* **connessione di Levi-Civita di** M, *se per ogni* $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, *valgono le seguenti proprietà*

(3) $X\langle Y, Z\rangle = \langle\nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$;

(4) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$.

[1]Qui, $j \in \{1, ..., k\}$ mentre $i_j \in I_{H_j} = \{h_{j-1} + 1, ..., h_j\}$.

[2]Cioè, $L_p^*\omega_i = \omega_i$ per ogni $p \in \mathbb{G}$.

Per un'accurata esposizione del concetto di connessione, rimandiamo, ad esempio, ai classici testi [7], [27], [26], [44]. Una generalizzazione del concetto di connessione è suggerita dalla seguente definizione (cfr. anche [21], [22], [29]):

Definizione 2.2. *Sia M una varietà Riemanniana, e siano (E, π_E, M), (F, π_F, M), due sottofibrati di TM. Una* **E-connessione** $\nabla^{(E,F)}$ **su** *F è una regola che assegna ad ogni $X \in \mathbf{C}^\infty(M, E)$ una mappa $\mathbb{R}$-lineare*

$$\nabla_X^{(E,F)} : \mathbf{C}^\infty(M, F) \longrightarrow \mathbf{C}^\infty(M, F)$$

tale che per ogni X, $Y \in \mathbf{C}^\infty(M, E)$, ogni $Z \in \mathbf{C}^\infty(M, F)$, ed ogni f, $g \in \mathbf{C}^\infty(M)$ si ha

(1) $\nabla_{fX+gY}^{(E,F)} Z = f\nabla_X^{(E,F)} Z + g\nabla_Y^{(E,F)} Z$;

(2) $\nabla_X^{(E,F)} fY = f\nabla_X^{(E,F)} Y + (Xf)\,Y$.

Se $E = F$ poniamo $\nabla^E := \nabla^{(E,E)}$, e chiamiamo ∇^E una **connessione parziale relativa ad** E, *od* **E-connessione**. *Notare che se $proj_E$ indica il proiettore ortogonale su E, una E-connessione si può sempre definire, a partire da una connessione ∇ su TM, nel seguente modo*

$$\nabla_X^E Y := proj_E(\nabla_X Y) \qquad (X, Y \in \mathbf{C}^\infty(M, E)).$$

Definizione 2.3. *D'ora in avanti indicheremo mediante il simbolo ∇ l'unica connessione di* **Levi-Civita invariante a sinistra** *su $\mathbb{G}$ relativa alla metrica g. Inoltre, se $X, Y \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{G}, H)$, poniamo $\nabla_X^H Y := proj_H(\nabla_X Y)$. ∇^H è un esempio di connessione parziale ed è detta* **connessione orizzontale**.

Per quanto concerne la teoria delle connessioni sui gruppi di Lie si veda, ad esempio, [26]. Inoltre, per alcune questioni di geometria dei gruppi di Lie nilpotenti equipaggiati con una metrica Riemanniana invariante a sinistra e con l'associata connessione di Levi-Civita, rimandiamo al lavoro di Milnor [33]. Ricordiamo che una definizione equivalente di *connessione parziale* compare in [21]. Si vedano anche [23] e [29].

Le *equazioni di struttura di Cartan* per il co-frame $\underline{\omega}$ hanno la forma seguente:

$$(I)\ d\omega_i = -\sum_{j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega_j \qquad (II)\ d\omega_{jk} = \sum_{l=1}^n \omega_{jl} \wedge \omega_{lk} - \Omega_{jk},$$

dove $\omega_{ij}(X) = \langle \nabla_X X_j, X_i \rangle$ $(i, j = 1, ..., n)$ sono le cosidette *1-forme di connessione* e Ω_{jk} $(j, k = 1, ..., n)$ sono le *2-forme di curvatura*, date da

$$\Omega_{jk}(X, Y) = \omega_k(\mathrm{R}(X, Y)X_j) \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{G})).$$

Qui R denota il tensore di curvatura Riemanniano. Sia le ω_{ij}, che le Ω_{ij} sono anti-simmetriche (negli indici bassi).

Osserviamo esplicitamente che, rispetto al frame globale $\underline{X} = \{X_1, ..., X_n\}$ di sezioni invarianti a sinistra su $\mathbb{G}$, riesce (cfr. [33]):

$$\nabla_{X_i} X_j = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n (C_{ij}^r - C_{jr}^i - C_{ri}^j) X_r \qquad (i,\ j = 1, ..., n). \tag{2}$$

Questa formula, unitamente alla condizione (1), consente di effettuare calcoli espliciti, in termini di costanti strutturali. Come esempio, da (2) segue immediatamente che la *1ª equazione di struttura di Cartan* (cfr. [7], [26]) per il coframe $\underline{\omega}$, assume la forma seguente:

$$d\omega_r = -\frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq h_{l-1}} C^r_{ij}\ \omega_i\wedge\omega_j \qquad (h_{l-1}<r\leq h_l,\ l=1,...,k). \tag{3}$$

Osservazione 2.1. *Dalla Definizione 2.3, usando le proprietà delle costanti strutturali e le ben note proprietà di ogni connessione di Levi-Civita (cfr.[7]), si ottiene, in particolare, che ∇^{H} è "piatta" nel senso che $\nabla^{H}_{X_i}X_j = 0$ $(i,j\in I_H)$.*

Osservazione 2.2. *È importante notare che la connessione orizzontale ∇^{H} è "compatibile" con la metrica sub-Riemanniana g_H, cioè*

$$X\langle Y,Z\rangle_H = \langle\nabla^{H}_{X}Y,Z\rangle_H + \langle Y,\nabla^{H}_{X}Z\rangle_H \qquad \forall\ X,Y,Z\in\mathfrak{X}(H).$$

Ciò segue immediatamente dalla definizione di ∇^{H}, unitamente all'analoga proprietà della connessione di Levi-Civita ∇ di $\mathbb{G}$. Ovviamente, ∇^{H} soddisfa anche la proprietà di non possedere "torsione", ovvero

$$\nabla^{H}_{X}Y - \nabla^{H}_{Y}X - proj_H[X,Y] = 0 \qquad \forall\ X,Y\in\mathfrak{X}(H).$$

Varie questioni, sia della geometria sub-Riemanniana che di quella *non-olonoma* (cfr. [29]), possono essere formulate utilizzando la connessione orizzontale ∇^{H}.

Definizione 2.4. *Se $\psi\in\mathbf{C}^{\infty}(\mathbb{G})$ definiamo il* **gradiente orizzontale** *di ψ, $grad_H\,\psi$, come l'unica sezione orizzontale invariante a sinistra tale che*

$$\langle grad_H\,\psi, X\rangle_H = d\psi(X) = X\psi \quad \forall\, X\in\mathfrak{X}(H).$$

Definiamo **divergenza orizzontale** *di $X\in H$, $div_H\,X$, la funzione data, in ogni punto $p\in\mathbb{G}$, da*

$$div_H\,X := \mathrm{Trace}\Big(Y\longrightarrow\nabla^{H}_{Y}X\Big) \quad (Y\in H_p).$$

2.2. **Ipersuperfici, Sottovarietà H-regolari e misure associate.** Nel seguito $\mathcal{H}^m_{\mathbf{cc}}$ indicherà la misura di Hausdorff m-dimensionale relativa a d_H, mentre $\mathcal{H}^m_{\mathbf{e}}$ indicherà l'usuale misura di Hausdorff m-dimensionale Euclidea in $\mathbb{R}^n\cong\mathbb{G}$[3].

Su $\mathbb{G}$ la *forma volume Riemanniana* (invariante a sinistra) è definita come

$$\sigma^n_{\mathcal{R}} := \bigwedge_{i=1}^{n}\omega_i\in\Lambda^n(\mathbb{G}).$$

Osservazione 2.3. *Integrando $\sigma^n_{\mathcal{R}}$ si ottiene la misura di Haar di $\mathbb{G}$. Poiché il determinante Jacobiano di L_{p_*} vale 1, questa eguaglia la misura indotta su $\mathbb{G}$ dal push-forward della misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ su $\mathbb{R}^n\cong\mathfrak{g}$. Ricordiamo che essa coincide anche, a meno di una costante di normalizzazione, con la misura di Hausorff Q-dimensionale $\mathcal{H}^Q_{\mathbf{cc}}$ di $\mathbb{G}$[4].*

Nello studio delle ipersuperfici dei gruppi di Carnot è necessaria la seguente nozione.

[3]Qui, come spesso in seguito, $\mathbb{G}$ si identifica ad $\mathbb{R}^n$ tramite la mappa esponenziale.

[4]Ciò discende dal fatto che, essendo entrambe misure di Haar per $\mathbb{G}$, sono uguali, a meno di una costante moltiplicativa (cfr. [37]). Tale costante è qui assunta uguale ad 1.

Definizione 2.5. *Sia $S \subset \mathbb{G}$ una ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare ($r = 1, ..., \infty$). Si dice che S è* **caratteristica** *in $p \in S$ se $\dim H_p = \dim(H_p \cap T_pS)$ o, equivalentemente, se $H_p \subset T_pS$. L'***insieme caratteristico** *di S è denotato come C_S, cioè*

$$C_S := \{p \in S : \dim H_p = \dim(H_p \cap T_pS)\}.$$

Da un punto di vista geometrico, un'ipersuperficie $S \subset \mathbb{G}$, avente normale unitaria ν, è *non-caratteristica* se il sottofibrato orizzontale è *trasversale* ad S (in simboli, $H \pitchfork TS$), cioé

$$H_p \pitchfork T_pS \Longleftrightarrow proj_H \nu_p \neq 0 \Longleftrightarrow \exists\, X \in H : \langle X_p, \nu_p \rangle \neq 0 \qquad (p \in S).$$

Osservazione 2.4 (Misura di Hausdorff di C_S)**.** *Se $S \subset \mathbb{G}$ è un'ipersuperficie $\mathbf{C}^1$-regolare, si può dimostrare (cfr.* [30]*) che la misura di Hausorff $Q-1$-dimensionale dell'insieme caratteristico C_S, relativa alla metrica d_H, è nulla. Cioè, risulta $\mathcal{H}^{Q-1}_{\mathbf{cc}}(C_S) = 0$.*

Osservazione 2.5 (Misura Riemanniana su Ipersuperfici)**.** *Sia $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare e ν denoti la normale unitaria ad S. Allora la* **misura Riemanniana $n-1$-dimensionale** *relativa ad S si definisce come*

$$\sigma^{n-1}_{\mathcal{R}} \llcorner S := (\nu \lrcorner\, \sigma^n_{\mathcal{R}})|_S, \tag{4}$$

dove il simbolo $\lrcorner$ denota l'operazione di "contrazione" di una forma differenziale[5].

Come sostituto della misura H-perimetro (cfr. Nota 7 a fine pagina) studiata in letteratura, visto che siamo interessati ad oggetti regolari, utilizzeremo in seguito la seguente definizione di misura.

Definizione 2.6 (Misura σ^{n-1}_H sulle Ipersuperfici)**.** *Sia $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie $\mathbf{C}^r$-regolare non-caratteristica e si denoti con ν la sua normale unitaria. Chiameremo H-***normale** *ad S la proiezione su H, normalizzata, del vettore ν, cioè*

$$\nu_H := \frac{proj_H \nu}{|proj_H \nu|_H}.$$

Definiamo quindi la misura $n-1$-dimensionale σ^{n-1}_H su S come la misura associata alla $n-1$-forma differenziale $\sigma^{n-1}_H \in \bigwedge^{n-1}(TS)$ data dalla contrazione della forma volume di $\mathbb{G}$ con la normale orizzontale ν_H. Cioè

$$\sigma^{n-1}_H \llcorner S := (\nu_H \lrcorner\, \sigma^n_{\mathcal{R}})|_S. \tag{5}$$

Osservazione 2.6. *Dalla precedente Definizione 2.6 si ottiene che*

$$\sigma^{n-1}_H \llcorner S = \sum_{i=1}^{h_1} \nu_{H\,i} (X_i \lrcorner\, \sigma^n_{\mathcal{R}})|_S = \sum_{i=1}^{h_1} (-1)^{h_1+1} \nu_{H\,i}\, \omega_1 \wedge ... \wedge \widehat{\omega}_i \wedge ... \wedge \omega_n \big|_S,$$

dove $\nu_{H\,i} := \langle \nu_H, X_i \rangle_H$ ($i = 1, ..., h_1$). Osserviamo esplicitamente che

$$\sigma^{n-1}_H \llcorner S = |proj_H \nu|_H \cdot \sigma^{n-1}_{\mathcal{R}} \llcorner S.$$

[5]Cioè, la mappa lineare $\lrcorner : \Lambda^k(\mathbb{G}) \to \Lambda^{k-1}(\mathbb{G})$ definita, per $X \in T\mathbb{G}$ e $\omega^k \in \Lambda^k(\mathbb{G})$, come $X \lrcorner\, \omega^k(Y_1, ..., Y_{k-1}) = \omega^k(X, Y_1, ..., Y_{k-1})$ (cfr. [26]).

Il confronto tra differenti nozioni di misura su ipersuperfici è un problema interessante e recentemente molto studiato. Per un'introduzione a queste problematiche rimando a [30]. Ad esempio, nel caso di alcuni particolari gruppi di Carnot, la misura *H-perimetro* coincide, a meno di una costante, con la misura di Hausdorff $Q-1$-dimensionale associata a d_H. In generale, mediante l'uso di un notevole teorema di rappresentazione provato in [1], si può dimostrare il risultato seguente.

Teorema 2.1. *Se $S\subset\mathbb{G}$ è un'ipersuperficie $\mathbf{C}^1$-regolare che è localmente frontiera di un aperto E avente H-perimetro localmente finito, allora*

$$\sigma_H^{n-1}\llcorner S\cap\mathcal{B}=k_{Q-1}(\nu_H)\,\mathcal{S}_{\mathbf{cc}}^{Q-1}\llcorner(S\cap\mathcal{B})\quad\forall\,\mathcal{B}\in\mathcal{B}or(\mathbb{G})\ \textit{(Boreliani)}\tag{6}$$

dove $\mathcal{S}_{\mathbf{cc}}^{Q-1}$ è la misura di Hausdorff sferica[6] *$Q-1$-dimensionale relativa a d_H e k_{Q-1} è una funzione dipendente da ν_H, detta* **fattore metrico** *(cfr. [30]).*

Osservazione 2.7. *Osserviamo esplicitamente che riesce*

$$\sigma_H^{n-1}(S\cap U)=\int_{S\cap U}\sqrt{\langle X_1,\mathrm{n_e}\rangle^2_{\mathbb{R}^n}+\ldots+\langle X_{m_1},\mathrm{n_e}\rangle^2_{\mathbb{R}^n}}\,d\mathcal{H}_{\mathbf{e}}^{n-1},\tag{7}$$

dove $\mathrm{n_e}$ denota la normale unitaria Euclidea ad S. La H-normale lungo S è data da

$$\nu_H=\frac{(\langle X_1,\mathrm{n_e}\rangle_{\mathbb{R}^n},\ldots,\langle X_{m_1},\mathrm{n_e}\rangle_{\mathbb{R}^n})}{\sqrt{\langle X_1,\mathrm{n_e}\rangle^2_{\mathbb{R}^n}+\ldots+\langle X_{m_1},\mathrm{n_e}\rangle^2_{\mathbb{R}^n}}}.$$

Precisiamo che la normale Euclidea $\mathrm{n_e}$ lungo S ed i vettori X_i $(i=1,\ldots,m_1)$ del frame orizzontale $\underline{X_H}$, sono intesi come vettori di $\mathbb{R}^n$, munito del prodotto interno canonico $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$. Quando tuttavia parleremo di **normale unitaria** *ν lungo S, intenderemo sempre la sua rappresentazione rispetto al frame globale $\underline{X}$ per $\mathbb{G}$, cioè $\nu=\sum_{i=1}^n\nu_iX_i$, ove $|\nu|=1$. Più precisamente, ν è data dall'espressione*

$$\nu(p)=\frac{(L_p\circ\exp)_*\mathrm{n_e}(\log p)}{|(L_p\circ\exp)_*\mathrm{n_e}(\log p)|}\quad(p\in S\subset\mathbb{G}).$$

Definizione 2.7. *Se ν_H è la normale orizzontale unitaria ad S nei punti $p\in S\setminus C_S$, si ha che $H_p=(\nu_H)_p\oplus H_pS$, ove si è posto*

$$H_pS:=H_p\cap T_pS=(\nu_H)_p^{\perp}\cap H_p.$$

H_pS è detto **spazio tangente orizzontale** *in p ad S. Definiamo quindi, nel modo ovvio, i fibrati vettoriali associati $HS(\subset TS)$ e ν_HS, detti, rispettivamente,* **fibrato tangente orizzontale** *e* **fibrato normale orizzontale***.*

Se si considera una sottovarietà S^{n-i} immersa in $\mathbb{G}$ di codimensione $i\geq1$, possiamo generalizzare le nozioni precedentemente introdotte.

[6] Ricordiamo che $\mathcal{S}_{\mathbf{cc}}^{Q-1}(S)=\lim_{\delta\to0^+}\mathcal{S}_{\mathbf{cc},\delta}^{Q-1}(S)$ dove, a meno di una costante moltiplicativa,

$$\mathcal{S}_{\mathbf{cc},\delta}^{Q-1}(S)=\inf\Big\{\sum_i(\mathrm{diam}_H(B_i))^{Q-1}:\ S\subset\bigcup_i B_i;\ \mathrm{diam}_H(B_i)<\delta\Big\}$$

e l'estremo inferiore è preso al variare delle d_H-palle B_i.

Definizione 2.8. *Diciamo che* S^{n-i} *è una sottovarietà* **geometricamente H-regolare** *in* $p \in S$ *se esistono* $\nu_{_{H\,1}}, ..., \nu_{_{H\,i}} \in H_p$ *linearmente indipendenti e trasversali ad* S *in* p*. Non lede la generalità supporre inoltre che tali sezioni siano ortonormali in* p*. Lo spazio tangente orizzontale in* p *è definito, come sopra, come*

$$H_pS := H_p \cap T_pS.$$

Se l'ipotesi precedente è verificata indipendentemente dal punto $p \in S$*, diciamo che* S *è geometricamente* H*-regolare. In tal caso si possono definire i fibrati vettoriali associati* $HS(\subset TS)$ *e* $\nu_{_H}S$*, detti, rispettivamente,* **fibrato tangente orizzontale** *e* **fibrato normale orizzontale***. In tal caso si ha quindi*

$$H_p := H_pS \oplus \mathbb{R}\nu_{_{H\,1}} \oplus ... \oplus \mathbb{R}\nu_{_{H\,i}}.$$

Definizione 2.9 (Misura $\sigma_{_H}^{n-i}$ sulle sottovarietà geom. H-reg. S^{n-i})**.** *Sia* $S^{n-i} \subset \mathbb{G}$ *una sottovarietà geometricamente* H*-regolare di codimensione* i*. Siano* $\nu_{_{H\,1}}, ..., \nu_{_{H\,i}} \in \nu_{_H}S$ *ed assumiamo che siano ovunque ortonormali. Posto* $\nu_{_H} := \nu_{_{H\,1}} \wedge ... \wedge \nu_{_{H\,i}} \in \bigwedge_i(T\mathbb{G})$*, definiamo la misura* $n-i$*-dimensionale* $\sigma_{_H}^{n-i}$ *su* S *come la misura associata alla* $n-i$*-forma differenziale* $\sigma_{_H}^{n-i} \in \bigwedge^{n-i}(TS)$ *data dalla contrazione della forma volume di* $\mathbb{G}$ *con l'*i*-vettore* $\nu_{_H}$*, cioè*

$$\sigma_{_H}^{n-i} \llcorner S := (\nu_{_H} \lrcorner\, \sigma_{\mathcal{R}}^{n})|_S. \tag{8}$$

Osservazione 2.8. *Le misure appena introdotte sono* **omogenee***, rispetto alle dilatazioni Carnot, di grado* $\mathcal{Q} - i$*. Cioè* $\delta_t^* \sigma_{_H}^{n-i} = t^{\mathcal{Q}-i}\sigma_{_H}^{n-i}$*. Questo è immediata conseguenza della definizione. È importante notare che nel caso del gruppo di Heisenberg* $\mathbb{H}^n$*, esse coincidono, a meno di opportune normalizzazioni, con le misure di Hausdorff sferiche (rispetto ad una distanza equivalente a quella Carnot-Carathéodory* d_H*)* $\mathcal{Q} - i$*-dimensionali (cfr.* [18], [31]*). Questo fatto risulta, in effetti, vero in generale (cfr.* [32]*).*

3. Geometria del sottofibrato orizzontale HS e Calcolo tangenziale

In questa sezione verranno introdotte alcune nozioni finalizzate allo studio delle ipersuperfici non-caratteristiche dei gruppi di Carnot. Questi argomenti sono stati oggetto di parte della mia tesi di dottorato (cfr. [35]). Occorre qui ricordare che precedentemente e\o contemporaneamente, alcuni tra questi argomenti, sono stati affrontati da altri autori, con un'impostazione abbastanza differente da quella qui presentata. Ricordiamo, in particolare [4], [8], [20, 42], specificamente per quanto attiene lo studio delle superfici nel caso del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$, ed anche [10] dove viene avviato uno studio generale di varie questioni di analisi su ipersuperfici, per gruppi di Carnot arbitrari.

Introduciamo ora alcune definizioni concernenti le ipersuperfici. Precisiamo subito che d'ora in avanti considereremo soltanto *ipersuperfici non-caratteristiche*, ossia, ci limiteremo a considerare sottinsiemi di un'ipersuperficie S contenuti nel complentare del suo insieme caratteristico C_S.

Osserviamo che, indicata con ∇^{TS} la connessione indotta su S dalla connessione di Levi-Civita ∇ su $\mathbb{G}$[7], essa induce una connessione parziale ∇^{HS} relativa al sottofibrato HS di TS, definita nel modo seguente[8]:

$$\nabla^{HS}_X Y := proj_{_{HS}}(\nabla^{TS}_X Y) \quad (X, Y \in HS).$$

[7]Pertanto, ∇^{TS} è la connessione di Levi-Civita per S (cfr. [7]).

[8]La mappa $proj_{_{HS}}$ denota la proiezione ortogonale di TS su HS.

A partire dalla decomposizione di H in somma diretta ortogonale (cfr. Definizione 2.7), la costruzione di ∇^{HS} si potrebbe anche fare mimando l'usuale definizione di connessione indotta su una sottovarietà (cfr. [7]). Infatti, risulta che

$$\nabla^{HS}_X Y = \nabla^H_X Y - \langle \nabla^H_X Y, \nu_H \rangle_H \nu_H \quad (X, Y \in HS).$$

Definizione 3.1. *Chiameremo HS*-**gradiente** *di $\psi \in \mathbf{C}^\infty(S)$, l'unica sezione orizzontale, tangente ad S, $grad_H \psi$, soddisfacente*

$$\langle grad_{HS} \psi, X \rangle_H = d\psi(X) = X\psi \quad \forall\ X \in HS.$$

Indicheremo con div_{HS} l'operatore di divergenza su HS, cioè se $X \in HS$ e $p \in S$,

$$div_{HS} X(p) := \mathrm{Trace}\Big(Y \longrightarrow \nabla^{HS}_Y X\Big)\ (Y \in HT_pS).$$

Infine, denoteremo con Δ_{HS}, l' HS-**Laplaciano**, *cioè l'operatore differenziale dato da*

$$\Delta_{HS}\psi := div_{HS}(grad_{HS}\psi) \quad (\psi \in \mathbf{C}^\infty(S)). \tag{9}$$

Definizione 3.2. *Chiamiamo II^a* **forma fondamentale sub-Riemanniana** *di S la mappa $B_H : HS \times HS \to \nu_H S$ data da*

$$\overline{B}_H(X, Y) := \langle \nabla^H_X Y, \nu_H \rangle_H\ \nu_H \quad (X,\ Y \in HS).$$

Inoltre definiamo $\mathrm{H}_H \in \nu_H S$ come la **curvatura media orizzontale di** *S, definita come la traccia di $\overline{B}_H$. Cioè*

$$\mathrm{H}_H = \mathrm{Tr}\overline{B}_H.$$

La parte scalare sarà detta **curvatura media scalare orizzontale di** *S, e denotata $\mathrm{H}^{\mathbf{sc}}_H$.*

Si osservi che la traccia è calcolata rispetto alla $I\ ^a$ *forma fondamentale sub-Riemanniana* g_{HS}, che non è altro che la restrizione ad S della metrica g_H.

Osservazione 3.1. *Mediante ragionamenti del tutto simili al caso Riemanniano, si può provare che la seconda forma fondamentale sub-Riemanniana $B_H(X, Y)$ è una forma $\mathbf{C}^\infty(S)$-bilineare in X e Y. Tuttavia* **non** *è in generale* **simmetrica**. *Ne spieghiamo subito il motivo. La simmetria di B_H si vede facilmente essere equivalente al fatto che, se $X, Y \in HS$, allora $proj_{HS}[X, Y] \in HS$. Questa condizione però non vale in generale. Per esempio, essa è verificata ovviamente nel caso del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$, essendo HS un sottofibrato 1-dimensionale di TS, ma fallisce, in generale, già nel caso $\mathbb{H}^n$ $(n > 1)$.*

Diamo così la seguente

Definizione 3.3. *Definiamo la* **torsione** Tor^{HS} *della connessione parziale ∇^{HS}, come segue:*

$$\mathrm{Tor}^{HS}(X, Y) := \nabla^{HS}_X Y - \nabla^{HS}_Y X - proj_H[X, Y] \quad (X, Y \in HS).$$

Osservazione 3.2. *Si osservi che la mappa $HS \ni X \longrightarrow \nabla^H_X \nu_H$, è, in effetti, l'analogo sub-Riemanniano della mappa di Weingarten (cfr. [27], Cap. 2). Usando la compatibilità di ∇^H con la metrica g_H si ottiene che $(\nabla^H_X \nu_H)_p \in H_pS$. Infatti,*

$$0 = X\langle \nu_H, \nu_H \rangle_H = 2\langle \nabla^H_X \nu_H, \nu_H \rangle_H.$$

D'ora in avanti, se $U \subset \mathbb{G}$ è aperto, porremo $\mathcal{U} := U \cap S$. Inoltre assumeremo *sempre* che $\mathcal{U}$ è non-caratteristica.

La seguente definizione servirà per meglio comprendere il significato di alcune precedenti nozioni, ed inoltre ci permetterà di fare calcoli espliciti delle quantità in gioco.

Definizione 3.4. *Definiamo* **frame adattato ad $\mathcal{U}$ in** U *ogni frame ortonormale in* U $\underline{\tau} := (\tau_1, ..., \tau_n)$ *tale che:*

$$(i)\, \tau_1|_{\mathcal{U}} := \nu_{_H}; \quad (ii)\, H_p\mathcal{U} = \mathrm{span}\{(\tau_2)_p, ..., (\tau_{h_1})_p\}\, (p \in \mathcal{U}); \quad (iii)\, \tau_\alpha := X_\alpha.$$

Denoteremo con $\underline{\phi} := (\phi_1, ..., \phi_n)$, il co-frame duale di $\underline{\tau}$. Esso ovviamente verifica le equazioni strutturali di Cartan, cioè:

$$(I)\ d\phi_i = -\sum_{j=1}^{n} \phi_{ij} \wedge \phi_j \qquad (II)\ d\phi_{jk} = \sum_{l=1}^{n} \phi_{jl} \wedge \phi_{lk} - \Phi_{jk},$$

dove $\phi_{ij}(X) := \langle \nabla_X \tau_j, \tau_i \rangle\, (i, j = 1, ..., n)$ sono le cosidette *1-forme di connessione* e $\Phi_{jk}\, (j, k = 1, ..., n)$ denotano le *2-forme di curvatura*, definite come

$$\Phi_{jk}(X, Y) := \phi_k(\mathrm{R}(X, Y)\tau_j) \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{G})).$$

Il vettore della curvatura media orizzontale si può scrivere equivalentemente come

$$\mathrm{H}_{H} = -\sum_{j=2}^{h_1} \langle \nabla^{H}_{\tau_j} \tau_1, \tau_j \rangle_H\, \tau_1 = -\sum_{j=2}^{h_1} \phi_{1j}(\tau_j)\tau_1 (= \mathrm{H}^{\mathbf{sc}}_{H} \nu_{_H}).$$

Si noti allora che la simmetria della II^a forma fondamentale orizzontale sarebbe equivalente alla simmetria delle 1-forme di connessione: $\phi_{1j}(\tau_i) = \phi_{1i}(\tau_j)$ per ogni $i, j \in I_H \setminus \{1\} := I_{HS}$. Ma ciò è falso, in generale. Infatti, sfruttando la condizione di simmetria della II^a forma fondamentale Riemanniana, ed osservando che la normale unitaria Riemanniana lungo S si scrive, rispetto al nostro frame[9] $\underline{\tau}$, $\nu = \nu_1\tau_1 + \sum_{\alpha \in I_V} \nu_\alpha \tau_\alpha$, si ottiene

$$\phi_{1i}(\tau_j) = \phi_{1j}(\tau_i) + \sum_{\alpha \in I_V} \frac{\nu_\alpha}{\nu_1} \langle C^\alpha_H \tau_i, \tau_j \rangle_H \quad (i, j \in I_{HS}).$$

(Qui vengono indicati con C^α_H ($\alpha = h_1 + 1, ..., n$) gli operatori lineari (anti-simmetrici) associati alle matrici delle costanti di struttura $[C^\alpha_{ik}]\, (i,\, k = 1, ..., h_1)$; cfr. Notazione 2.2, pag. 4).

Notazione 3.1. *In seguito useremo spesso le seguenti notazioni:*

- **(i)** $\varpi_\alpha := \frac{\nu_\alpha}{|proj_H \nu|} \qquad (\alpha \in I_V)$;
- **(ii)** $\varpi := \sum_{\alpha \in I_V} \varpi_\alpha \tau_\alpha$;
- **(iii)** $C_H := \sum_{\alpha \in I_{H_2}} \varpi_\alpha C^\alpha_H$;
- **(iv)** $C := \sum_{\alpha \in I_V} \varpi_\alpha C^\alpha$.

Inoltre, per ogni $\alpha \in I_{H_2}$, *porremo* $C^\alpha_{HS} := C^\alpha_H|_{HS}$ *per sottolineare il fatto che* C^α_{HS} *agisce solo su vettori orizzontali tangenti, cioè* $(C^\alpha_{HS})_{ij} := \langle C^\alpha_H \tau_j, \tau_i \rangle$ *for* $i, j \in I_{HS}$. *Conseguentemente poniamo* $C_{HS} := \sum_{\alpha \in I_{H_2}} \varpi_\alpha C^\alpha_{HS}$.

[9]Notare che $\nu_1 = |proj_H \nu|$.

Osservazione 3.3. *Si noti che B_H si può vedere come somma di una matrice simmetrica e di una anti-simmetrica, cioè $B_H = S_H + A_H$, dove la parte antisimmetrica A_H è data da*

$$A_H = \frac{1}{2} C_{HS}.$$

Osservazione 3.4. *Si può direttamente verificare che*

$$\mathrm{T}^{HS}(X,Y) = B_H(Y,X) - B_H(X,Y) = \langle proj_H [Y,X], \nu_H \rangle_H \nu_H \quad (X,Y \in \mathfrak{X}(HS)).$$

3.1. **Integrazione per parti orizzontale su Ipersuperfici.** Scopo di questa sezione è la determinazione di formule di integrazione per parti sulle ipersuperfici non-caratteristiche di un gruppo di Carnot, munite della misura σ_H^{n-1}.

Sia dunque $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{U})$. Dalla definizione di σ_H^{n-1}, con un semplice calcolo, basato sulla classica *Formula della Divergenza Riemanniana* (cfr. [44], ad esempio) e sulla definizione di σ_H^{n-1}, si ottiene

$$\begin{aligned} d(X \lrcorner\, \sigma_H^{n-1})|_{\mathcal{U}} &= d(|proj_H \nu|_H\, X \lrcorner\, \sigma^{n-1}) = div_{TS}(|proj_H \nu|_H\, X)\, \sigma^{n-1} \\ &= \left\{ div_{TS} X + \left\langle X, \frac{grad_{TS} |proj_H \nu|_H}{|proj_H \nu|_H} \right\rangle \right\} \sigma_H^{n-1} \llcorner\, \mathcal{U}, \end{aligned}$$

dove $grad_{TS}$ e div_{TS} sono gli usuali operatori di gradiente e divergenza tangenziali su $\mathcal{U} \subset S$.

Il difetto di questa formula è che non è abbastanza "esplicita", nel senso che in essa non emergono in modo chiaro le quantità geometriche sub-Riemannniane realmente coinvolte.

Per aggirare tale inconveniente, abbiamo sopra introdotto la nozione di frame adattato ad una ipersuperficie.

Sia dunque $\underline{\tau}$ un frame adattato ad $\mathcal{U} \subset S$ in U e denotiamo con $\underline{\phi} := \{\phi_1, ..., \phi_n\}$ il suo *co-frame duale*, ottenuto per mezzo della metrica g. È immediato riconoscere che la forma H-perimetro σ_H^{n-1} su $\mathcal{U}$ è data da[10]

$$\begin{aligned} \sigma_H^{n-1} \llcorner\, \mathcal{U} &= (\nu_H \lrcorner\, \sigma^n)|_{\mathcal{U}} = (\tau_1 \lrcorner\, \phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n)|_{\mathcal{U}} = (\phi_2 \wedge ... \wedge \phi_n)|_{\mathcal{U}} \\ &= (-1)^{\alpha+1} \frac{\nu_1}{\nu_\alpha} \phi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\phi_\alpha} \wedge ... \wedge \phi_n)|_{\mathcal{U}} \ \ (\alpha \in I_V). \end{aligned}$$

Mediante calcoli diretti con forme differenziali, basati sopratutto sulla 1^a equazione di struttura di Cartan relativa al co-frame $\underline{\phi}$, si possono ottenere formule di tipo divergenza "adattate". Enunceremo tra breve alcuni risultati ottenuti per il caso di campi vettoriali tangenti orizzontali di HS. Prima però ci occorre fare alcune precisazioni.

Osservazione 3.5 (Misura sulla frontiera $\partial\mathcal{U}$)**.** *Nello stabilire tali formule occorre fare alcune precisazioni sulla frontiera topologica di $\mathcal{U}$. Innanzi tutto assumeremo, come nel caso Riemanniano, che $\partial\mathcal{U}$ sia una $n-2$-varietà Riemanniana regolare, orientata dal vettore normale unitario η. Denotiamo quindi con $\sigma_{\mathcal{R}}^{n-2}$ l'usuale misura Riemanniana su $\partial\mathcal{U}$, che si può definire così*

$$\sigma_{\mathcal{R}}^{n-2} \llcorner\, \mathcal{U} = (\eta \lrcorner\, \sigma_{\mathcal{R}}^{n-1})|_{\mathcal{U}}.$$

Ciò vuol dire che se $X \in \mathfrak{X}(T\mathcal{U})$, allora

$$(X \lrcorner\, \sigma_H^{n-1})|_{\partial\mathcal{U}} = \langle X, \eta \rangle |proj_H \nu| \sigma_{\mathcal{R}}^{n-2} \llcorner\, \mathcal{U}.$$

[10]È importante osservare che ogni $n-1$-forma del tipo $\phi_1 \wedge ... \wedge \widehat{\phi_i} \wedge ... \wedge \phi_n$ è identicamente nulla su $\mathcal{U}$ $(i \in I_{HS})$.

Supponiamo inoltre che $\partial\mathcal{U}$ sia **geometricamente H-regolare**. *In questo caso, ciò può esprimersi dicendo che la proiezione su HS della normale Riemanniana unitaria η lungo $\partial\mathcal{U}$ sia non-singolare, cioè, che in ogni punto $p \in \partial\mathcal{U}$ sia*

$$|proj_{HS}\eta|_{HS} \neq 0.$$

Denoteremo in seguito con $C_{\partial\mathcal{U}}$ l'insieme singolare di $\partial\mathcal{U}$, cioè

$$C_{\partial\mathcal{U}} := \{p \in \partial\mathcal{U} : |proj_{HS}\eta|_{HS} = 0\}.$$

Allora risulta (cfr. Definizione 2.9)

$$\sigma_H^{n-2} \llcorner \mathcal{U} = \Big(\frac{proj_{HS}\eta}{|proj_{HS}\eta|_{HS}} \lrcorner\, \sigma_H^{n-1}\Big)\Big|_{\mathcal{U}}.$$

Equivalentemente si potrebbe anche dire che

$$\sigma_H^{n-2} \llcorner \mathcal{U} = |proj_H \nu| \cdot |proj_{HS}\eta|_{HS}\, \sigma_{\mathcal{R}}^{n-2} \llcorner \mathcal{U}. \tag{10}$$

D'ora in avanti si porrà

$$\eta_{HS} := \frac{proj_{HS}\eta}{|proj_{HS}\eta|_{HS}}$$

e chiameremo η_{HS} **normale orizzontale unitaria** *lungo $\partial\mathcal{U}$. Si ottiene allora che*

$$(X \lrcorner\, \sigma_H^{n-1})|_{\partial\mathcal{U}} = \langle X, \eta_{HS}\rangle_{HS}\, \sigma_H^{n-2} \llcorner \mathcal{U} \quad \forall\ X \in \mathfrak{X}(HS).$$

Si possono dunque provare i seguenti risultati.

Teorema 3.1 (Teorema della Divergenza orizzontale). *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo k. Sia $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie immersa ed $\mathcal{U} \subset S \setminus C_S$ un aperto relativamente compatto non-caratteristico. Supponiamo che $\partial\mathcal{U}$ sia una varietà $\mathbf{C}^\infty$-regolare, $n-2$-dimensionale con normale unitaria uscente η. Allora, per ogni $X \in \mathfrak{X}(HS)$ vale*

$$\int_{\mathcal{U}} \Big(div_{HS}X + \langle C_H \nu_H, X\rangle_{HS}\Big)\sigma_H^{n-1} = \int_{\partial\mathcal{U}\setminus C_{\partial\mathcal{U}}} \langle X, \eta_{HS}\rangle_{HS}\, \sigma_{HS}^{n-2}.$$

Se inoltre $\partial\mathcal{U}$ è geometricamente H-regolare si ha che $C_{\partial\mathcal{U}} = \emptyset$.

Da questa si possono dedurre formule di tipo Green e, più precisamente, quanto segue:

Teorema 3.2 (Formule di Green orizzontali). *Sotto le ipotesi del Teorema 3.1, siano ϕ_1, $\phi_2 \in \mathbf{C}^\infty(S)$, ed almeno una di esse sia compattamente supportata in $\mathcal{U}$. Allora*

$$\int_{\mathcal{U}} \Big(\phi_1\, \Delta_{HS}\phi_2 + \langle grad_{HS}\phi_1, grad_{HS}\phi_2\rangle_H + \phi_1\, \langle C_H \nu_H, grad_{HS}\phi_2\rangle_{HS}\Big)\, \sigma_H^{n-1}$$
$$= \int_{\partial\mathcal{U}\setminus C_{\partial\mathcal{U}}} \phi_1\, \langle grad_{HS}\phi_2, \eta\rangle\, \sigma_H^{n-2}.$$

Inoltre, si ha

$$\int_{\mathcal{U}} \Big\{\Big(\phi_1\, \Delta_{HS}\phi_2 - \phi_2\, \Delta_{HS}\phi_1\Big) + \langle C_H \nu_H, (\phi_1 grad_{HS}\phi_2 - \phi_2 grad_{HS}\phi_1)\rangle_{HS}\Big\}\, \sigma_H^{n-1} = 0.$$

Corollario 3.1 (Integrazione per parti orizzontale). *Nelle ipotesi del Teorema 3.1, per ogni $X \in \mathfrak{X}(H)$ vale*

$$\int_{\mathcal{U}} \Big(div_{HS}X + \langle C_H \nu_H, X\rangle_{HS}\Big)\sigma_H^{n-1} = -\int_{\mathcal{U}} \langle X, \mathrm{H}_H\rangle_H\, \sigma_H^{n-1} + \int_{\partial\mathcal{U}\setminus C_{\partial\mathcal{U}}} \langle X, \eta_{HS}\rangle_{HS}\, \sigma_{HS}^{n-2}.$$

Corollario 3.2 (Una formula integrale tipo Minkowsky)**.** *Sotto le ipotesi del Teorema 3.1, sia* $\mathcal{X}_H := \sum_{i\in I_H} x_i X_i$ *il "vettore posizione orizzontale" e denotiamo con* ρ_H *la sua componente lungo la* H*-normale* ν_H[11]*, cioè* $\rho_H := \langle \mathcal{X}_H, \nu_H \rangle$*. Allora*

$$\int_{\mathcal{U}} \Big((h-1) + \rho_H \mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}} + \langle C_H \nu_H, \mathcal{X}_H \rangle_{HS} \Big) \sigma_H^{n-1} = \int_{\partial\mathcal{U}\setminus C_{\partial\mathcal{U}}} \langle \mathcal{X}_H, \eta_{HS} \rangle_{HS}\, \sigma_{HS}^{n-2}.$$

La dimostrazione di quest'ultimo risultato segue immediatamente dall'uso del Corollario 3.1 e del fatto facimente verificabile che $div_{HS}\mathcal{X} = dim HS - 1 = h-1$. Il "predecessore" Riemanniano di questa formula può trovarsi nel libro *Integral formulas in Riemannian Geometry* di Yano [46].

4. Formule Variazionali: variazione prima e seconda di σ_H^{n-1}

4.1. **Variazione prima di σ_H^{n-1}.** In questa sezione, illustreremo come calcolare esplicitamente la variazione prima di σ_H^{n-1}, usando il formalismo geometrico-differenziale sopra introdotto. Come referenze classiche per queste tematiche, in ambito Riemanniano, citiamo il libro di Spivak [44], oltreché il lavoro di Hermann [24].

Come in precedenza, siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo k ed $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie immersa, orientata dalla normale unitaria ν. Inoltre, sia $\mathcal{U} \subset S \setminus C_S$ un aperto relativamente compatto non-caratteristico e supponiamo che $\partial\mathcal{U}$ sia una varietà regolare (abbastanza per il teorema della divergenza Riemanniana), $n-2$-dimensionale, avente normale unitaria uscente η.

Definizione 4.1. *Siano* $\imath : \mathcal{U} \to \mathbb{G}$ *l'inclusione di* $\mathcal{U}$ *in* $\mathbb{G}$ *e* $\vartheta : (-\epsilon,\epsilon)\times\mathcal{U} \to \mathbb{G}$ *una mappa* $\mathbf{C}^\infty$*. Allora* ϑ *è una* **deformazione liscia** *di* $\imath$ *se*[12]

(i) *ogni* $\vartheta_t := \vartheta(t,\cdot) : \mathcal{U} \to \mathbb{G}$ *è un'immersione;*
(ii) $\vartheta_0 = \imath$.

Il **vettore variazione** *di* ϑ*, è definito come*

$$W := \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\Big|_{t=0} = \vartheta_* \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0}.$$

Se $t \in (-\epsilon,\epsilon)$, denotiamo con ν^t la normale unitaria lungo $\mathcal{U}_t := \vartheta_t(\mathcal{U})$. Se $\mathcal{U}$ ed ϵ sono scelti opportunamente piccoli, allora $\mathcal{U}_t = \vartheta_t(\mathcal{U})$ risulta essere immersa e non-caratteristica, per $t \in (-\epsilon,\epsilon)$. Definiamo quindi la $n-1$-forma $(\sigma_H^{n-1})_t$ su $\mathcal{U}_t$, come

$$((\sigma_H^{n-1})_t)|_{\mathcal{U}_t} = (\nu_H^t \,\lrcorner\, \sigma_{\mathcal{R}}^n)|_{\mathcal{U}_t} \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}_t),$$

per $t \in (-\epsilon,\epsilon)$, ove

$$\nu_H^t := \frac{proj_H \nu^t}{|proj_H \nu^t|_H}.$$

Posto

$$\Gamma(t) := \vartheta_t^*(\sigma_H^{n-1})_t \in \Lambda^{n-1}(\mathcal{U}), \qquad t \in (-\epsilon,\epsilon),$$

si ha che $\Gamma(t)$ è una $\mathbf{C}^\infty$-famiglia ad un parametro di $n-1$-forme su $\mathcal{U}$. Per determinare la variazione prima $I_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1})$ di σ_H^{n-1} su $\mathcal{U}$, si deve allora calcolare

$$I_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1}) := \frac{d}{dt}\Big(\int_{\mathcal{U}} \Gamma(t)\Big)\Big|_{t=0} = \int_{\mathcal{U}} \dot{\Gamma}(0). \tag{11}$$

[11]Questa quantità potrebbe correttamente chiamarsi "funzione di supporto orizzontale", in analogia con la terminologia classica.

[12]Se vale: *(iii)* $\vartheta_t|_{\partial\mathcal{U}} = \imath|_{\partial\mathcal{U}}$ per ogni $t \in (-\epsilon,\epsilon)$, si dice che ϑ *lascia il bordo fissato.*

Quindi ci basterà determinare $\dot{\Gamma}(0)$[13]. Sia pertanto $\underline{\zeta}$ un frame ortonormale nell'aperto U tale che

$$(i)\,\zeta_1|_{\mathcal{U}_t} := \nu_{_H}^t; \quad (ii)\,HT_p\mathcal{U}_t = \mathrm{span}\{(\zeta_2)_p, ..., (\zeta_{h_1})_p\}\ (p \in \mathcal{U}_t); \quad (iii)\,\tau_\alpha := X_\alpha.$$

Sia $\underline{\varphi}$ il suo relativo co-frame. In tal modo, si ottiene che

$$(\sigma_{_H}^{n-1})_t \llcorner\, \mathcal{U}_t = (\zeta_1 \lrcorner\, \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n)|_{\mathcal{U}_t} = (\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)|_{\mathcal{U}_t},$$

e quindi anche che $\Gamma(t) = \vartheta_t^*(\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)$. A partire da questa espressione, si è ricondotti al calcolo della *derivata di Lie* secondo la direzione $\widetilde{W} := \frac{\partial \vartheta}{\partial t}$, della $n-1$-forma $\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n$. Ciò si può effettuare tramite la *Formula di Cartan* (cfr. [26], [24], [44]). Si ha dunque

$$\vartheta_t^* \mathcal{L}_{\widetilde{W}}(\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n) = \vartheta_t^*(\widetilde{W} \lrcorner\, d(\varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)) + \vartheta_t^*(d(\widetilde{W} \lrcorner\, \varphi_2 \wedge ... \wedge \varphi_n)).$$

Si arriva in tal modo a dimostrare il seguente

Teorema 4.1 (Variazione prima di $\sigma_{_H}^{n-1}$)**.** *Siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo k ed $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie immersa, orientata dalla normale unitaria ν. Inoltre, sia $\mathcal{U} \subset S \setminus C_S$ un aperto relativamente compatto non-caratteristico e supponiamo che $\partial\mathcal{U}$ sia una varietà regolare, $n-2$-dimensionale, avente normale unitaria uscente η. Si ha allora*

$$I_{\mathcal{U}}(\sigma_{_H}^{n-1}) = -\int_{\mathcal{U}} \mathrm{H}_{_H}^{\mathbf{sc}} \frac{\langle W, \nu\rangle}{|proj_{_H}\nu|}\, \sigma_{_H}^{n-1} + \int_{\partial\mathcal{U}} \langle W, \eta\rangle\, |proj_{_H}\nu|\, \sigma_{\mathcal{R}}^{n-2}. \tag{12}$$

Osservazione 4.1. *Da questo risultato segue che condizione necessaria alla minimalità di una ipersuperficie non-caratteristica è l'annullamento di $\langle \mathrm{H}, \nu_{_H}\rangle_{_H}$, ossia della curvatura media scalare orizzontale. In tal modo si "giustifica" come l'equazione*

$$\mathrm{H}_{_H}^{\mathbf{sc}} = div_{_{HS}}\, \nu_{_H} = div\, \nu_{_H} = 0$$

sia la corretta generalizzazione dell'equazione delle ipersuperfici minime Riemanniana.

Osservazione 4.2. *Analogamente al caso Riemanniano, i termini che compaiono nella variazione prima sono due. Il primo, cioè l'integrale su $\mathcal{U}$, dipendente soltanto dalla componente lungo la normale Riemanniana del vettore variazione, il secondo, cioè l'integrale sul bordo $\partial\mathcal{U}$, dipendente soltanto dalla sua componente tangenziale. Questo fatto dipende da un noto principio generale del Calcolo delle Variazioni per cui rimandiamo al testo di Hermann* [25]. *Risulta pure chiaro che, se nella scelta del vettore variazione, si richiede che esso sia orizzontale, l'espressione (12) della variazione prima assume un aspetto più "intrinseco".*

Vale allora il seguente

Teorema 4.2 (Variazione prima orizzontale di $\sigma_{_H}^{n-1}$)**.** *Sotto le ipotesi del Teorema 4.1, sia $W \in \mathfrak{X}(H)$, $W = \langle W, \nu_{_H}\rangle_{_H} \nu_{_H} + W_{_{HS}}$. Si ha allora*

$$I_{\mathcal{U}}(\sigma_{_H}^{n-1}) = -\int_{\mathcal{U}} \langle \mathrm{H}_{_H}, W\rangle_{_H}\, \sigma_{_H}^{n-1} + \int_{\partial\mathcal{U}\setminus C_{\partial\mathcal{U}}} \langle W, \eta_{_{HS}}\rangle_{_{HS}}\, \sigma_{_{HS}}^{n-2}. \tag{13}$$

[13]Il passaggio della derivata sotto il segno di integrale si può effettuare grazie alla ben nota *Regola di Leibniz* (cfr. [44], pag. 417).

Ricordando quindi il Corollario 3.1, si ha anche l'uguaglianza

$$I_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1}) = \int_{\mathcal{U}} \Big(div_{HS} W + \langle C_H \nu_H, W\rangle_{HS} \Big) \sigma_H^{n-1}.$$

Osservare che in (12) il primo addendo, cioè l'integrale su $\mathcal{U}$, dipende solo dalla componente lungo la normale orizzontale del vettore variazione, mentre il secondo addendo, cioè l'integrale sul bordo $\partial\mathcal{U}$, dipende solo dalla sua componente orizzontale tangente.

Osservazione 4.3. *Sia $S \subset \mathbb{G}$ un'arbitraria ipersuperficie regolare (almeno $\mathbf{C}^2$) ed assumia-mo qui che W sia a supporto compatto su S. La precedente formula fornisce, in particolare, la variazione prima di σ_H^{n-1} su aperti regolari non-caratteristici contenenti il supporto di W. Qualora tuttavia si voglia calcolare la variazione prima del funzionale H-perimetro consentendo al vettore variazione di essere supportato su S, e non solo su $S \setminus C(S)$, si potrà usare il seguente argomento. Osserviamo preliminarmente che la funzione $|proj_H \nu|$ è Lipshitz su S. Sia ora $\mathcal{U}_\epsilon$ $(\epsilon > 0)$ una famiglia di aperti "regolari" (per regolare qui si intende abbastanza per l'applicazione del teorema della divergenza Riemanniano) contenenti nel loro interno $C(S)$ ed aventi misura Riemanniana limitata da ϵ. Supponiamo inoltre che $\sigma_{\mathcal{R}}^{n-1}(\mathcal{U}_\epsilon) \longrightarrow 0$ per $\epsilon \to 0^+$. Questo non lede la generalità visto che $C(S)$ è al più $n-1$-dimensionale. Allora si ha che per ogni $\epsilon > 0$*

$$I_S(\sigma_H^{n-1}) = I_{S\setminus\mathcal{U}_\epsilon}(\sigma_H^{n-1}) + I_{\mathcal{U}_\epsilon}(\sigma_H^{n-1}). \tag{14}$$

Il primo addendo è allora fornito dal precedente Teorema 4.1, mentre il secondo addendo potrà calcolarsi come segue. Si osservi in generale che, per un arbitrario aperto $\mathcal{U}$ di S, vale

$$I_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1}) = \frac{d}{dt}\Big(\int_{\mathcal{U}} (\sigma_H^{n-1})_t \Big)\Big|_{t=0} = \int_{\mathcal{U}} \frac{d}{dt}\Big((\sigma_H^{n-1})_t \Big)\big|_{t=0}.$$

Ora per il calcolo della derivata puntuale della $n-1$-forma $(\sigma_H^{n-1})_t$ riesce:

$$\frac{d}{dt}\Big((\sigma_H^{n-1})_t \Big)\big|_{t=0} = \frac{d}{dt}|proj_H \nu^t|\Big|_{t=0} \sigma_{\mathcal{R}}^{n-1} + |proj_H \nu| \frac{d}{dt}\Big((\sigma_{\mathcal{R}}^{n-1})_t \Big)\big|_{t=0}. \tag{15}$$

Si noti quindi che il primo addendo è limitato, essendo Lipshitz la funzione $|proj_H \nu|$, mentre il secondo addendo è il prodotto della funzione limitata $|proj_H \nu|$ con la $n-1$-forma $\frac{d}{dt}\Big((\sigma_{\mathcal{R}}^{n-1})_t \Big)\big|_{t=0}$, la quale esprime la versione infinitesimale della formula della variazione prima Riemanniana. Siano ora $\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}} \in L^1(S)$ e $\mathrm{H}_{\mathcal{R}}$ (ossia la curvatura media Riemanniana di S) limitata e torniamo ad analizzare il secondo addendo di (14). Le ipotesi fatte consentono di vedere che $I_{\mathcal{U}_\epsilon}(\sigma_H^{n-1}) \longrightarrow 0$ per $\epsilon \to 0$ e che

$$I_S(\sigma_H^{n-1}) = -\int_S \mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}} \frac{\langle W, \nu\rangle}{|proj_H \nu|}\, \sigma_H^{n-1} + \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\partial\mathcal{U}_\epsilon} \langle W, \eta\rangle\, |proj_H \nu|\, \sigma_{\mathcal{R}}^{n-2}. \tag{16}$$

Un'osservazione simile è contenuta nel recente lavoro di Ritoré e Rosales [43] ed in un preprint di Hladky e Pauls [28].

4.2. **Variazione Seconda di σ_H^{n-1}.** Questa sezione può leggersi come continuazione della precedente e pertanto useremo stesse notazioni e terminologia. La variazione seconda della misura σ_H^{n-1}, è data da

$$II_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1}) := \frac{d^2}{dt^2}\Big(\int_{\mathcal{U}} \Gamma(t) \Big)\Big|_{t=0} = \int_{\mathcal{U}} \ddot{\Gamma}(0). \tag{17}$$

Si è perciò condotti al calcolo puntuale di $\ddot{\Gamma}(0)$, e dunque preliminarmente di

$$\ddot{\Gamma}(t)=\vartheta_t^*\Big(\mathcal{L}_{\widetilde{W}}(\widetilde{W}\,\lrcorner\, d(\sigma_H^{n-1})_t)+\mathcal{L}_{\widetilde{W}}\, d(\widetilde{W}\,\lrcorner\,(\sigma_H^{n-1})_t)\Big). \tag{18}$$

Ponendo

$$w:=\frac{\langle W,\nu\rangle}{|proj_H\,\nu|_H},\qquad w_t:=\frac{\langle\widetilde{W},\nu^t\rangle}{|proj_H\,\nu^t|_H},$$

si ottiene che il calcolo del primo addendo è ricondotto a quello seguente

$$\sum_{j=2}^{h_1}\mathcal{L}_{\widetilde{W}}\Big(w_t\,\varphi_2\wedge...\wedge\underbrace{\varphi_{1j}}_{j^{mo}posto}\wedge...\wedge\varphi_n\Big)\Big|_{\mathcal{U}_t}. \tag{19}$$

Per quanto concerne il secondo addendo in (18), poichè la derivata di Lie e l'operatore d di differenziazione esterna commutano, si ottiene, in virtù del teorema di Stokes, il seguente termine di "bordo"

$$\mathcal{L}_{\widetilde{W}}(\widetilde{W}\,\lrcorner\,(\sigma_H^{n-1})_t)\big|_{\mathcal{U}_t}. \tag{20}$$

Osservazione 4.4. *La parte difficile del calcolo risiede nel primo dei due addendi in (18). Infatti, pur essendo possibile eseguire alcuni artifici tipicamente Riemanniani, occorre del lavoro aggiuntivo rispetto all'equivalente formula Riemanniana (cfr.* [44]*). In particolare, occorrono le formule di integrazione per parti, illustrate nell Sezione 3.1, oltreché molte altre osservazioni. Ricordiamo che nel caso di varietà di contatto tridimensionali, di cui il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$ costituisce un notevole esempio, tale formula è stata recentemente ottenuta in* [8] *ed anche in* [11] *per il caso di $\mathbb{H}^1$. Una ulteriore generalizzazione a particolari geometrie sub-Riemanniane si può inoltre trovare in* [28]*. Una formula per la variazione seconda del perimetro intrinseco nel caso di grafici intrinseci (nel senso di Franchi, Serapioni e Serra Cassano, cfr.* [16]*) del gruppo di Heisenberg è calcolata anche in* [5]*. Qui di seguito enunceremo tale formula in alcuni notevoli casi particolari, meglio illustrabili, e che in un certo senso ne costituiscono la parte più significativa, almeno dal punto di vista sub-Riemanniano.*

Cominciamo ad introdurre i seguenti importanti casi particolari della formula per la variazione seconda di σ_H^{n-1}.

Teorema 4.3 (Variazione seconda orizzontale di σ_H^{n-1})**.** *Siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo k ed $S\subset\mathbb{G}$ un'ipersuperficie immersa, orientata dalla normale unitaria ν. Inoltre, sia $\mathcal{U}\subset S\setminus C_S$ un aperto relativamente compatto non-caratteristico e supponiamo che $\partial\mathcal{U}$ sia una varietà regolare, $n-2$-dimensionale, avente normale unitaria uscente η. Sia ϑ una deformazione liscia di $\mathcal{U}\subset S$ avente vettore variazione $W=\vartheta_*\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}$, ed assumiamo che $W\in H_p$ per ogni $p\in\mathcal{U}$. Per semplicità, poniamo $W:=w\,\nu_H+W_{HS}$. Si ha allora*

$$\begin{aligned} II_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1}) = &\int_{\mathcal{U}}\Big\{-\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}}\big[W_H(w)+w\big(div_{HS}W_{HS}+2\langle C_H\nu_H,W_{HS}\rangle\big)\big]+\\ &+|grad_{HS}w|^2+w\Big[w(2\mathrm{Tr}_2B_H)+\mathrm{Tr}\big(B_H\circ\mathcal{J}_{HS}W_{HS}\big)-\sum_{\alpha\in I_V}\Big\langle\big(2grad_{HS}\varpi_\alpha-C\tau_\alpha^S\big),C^\alpha W_H\Big\rangle\Big]\Big\}\sigma_H^{n-1}+\\ &+\int_{\partial\mathcal{U}}\Big\{\Big\langle\big(-wgrad_{HS}w+[\widetilde{W},\widetilde{W}_{HS}]\big|_{t=0}\big),\eta\Big\rangle+\big(div_{HS}W_{HS}+\langle C_H\nu_H,W_{HS}\rangle-w\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}}\big)\langle W_{HS},\eta\rangle\Big\}|proj_H\,\nu|\sigma_{\mathcal{R}}^{n-2} \end{aligned}\tag{21}$$

dove $\varpi_\alpha:=\frac{\nu_\alpha}{|proj_H\,\nu|}$ e $\tau_\alpha^S:=\tau_\alpha-\varpi_\alpha\nu_H$ $(\alpha\in I_V)$.

Corollario 4.1 (Variazione seconda di σ_H^{n-1} normale orizzontale)**.** *Siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo k ed $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie immersa, orientata dalla normale unitaria ν. Inoltre, sia $\mathcal{U} \subset S \setminus C_S$ un aperto relativamente compatto non-caratteristico e supponiamo che $\partial\mathcal{U}$ sia una varietà regolare, $n-2$-dimensionale, avente normale unitaria uscente η. Sia ϑ una variazione liscia di $\mathcal{U} \subset S$ con vettore variazione $W = \vartheta_* \frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}$ tale che $W \in \nu_H S$, ossia $W = w\nu_H$ con $w \in \mathbf{C}^\infty(S)$. Si ha allora*

$$II_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1}) = \int_{\mathcal{U}} \Big\{ -\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}} w \frac{\partial w}{\partial \nu_H} + |grad_{HS}\, w|^2 + w^2 \Big[(2\mathrm{Tr}_2 B_H) - \sum_{\alpha \in I_V} \big\langle \big(2\, grad_{HS}(\varpi_\alpha) - C\tau_\alpha^S\big), C^\alpha \nu_H \big\rangle\Big]\Big\} \sigma_H^{n-1}$$
$$- \int_{\partial\mathcal{U} \setminus C_{\partial\mathcal{U}}} w \,\langle grad_{HS}\, w, \eta_{HS}\rangle_{HS}\, \sigma_H^{n-2},$$

dove $\varpi_\alpha := \frac{\nu_\alpha}{|proj_H \nu|}$ e $\tau_\alpha^S := \tau_\alpha - \varpi_\alpha \nu_H$ $(\alpha \in I_V)$. Se si assume inoltre $W \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathcal{U}, \nu_H S)$, o equivalentemente che W lascia il bordo di $\partial\mathcal{U}$ fissato, allora il termine di bordo è nullo.

Notare che nelle precedenti formule la curvatura media orizzontale non è assunta costante (o nulla).

Teorema 4.4 (Formula generale della variazione seconda di σ_H^{n-1} con $\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}}$ costante)**.** *Siano $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot di passo k ed $S \subset \mathbb{G}$ un'ipersuperficie immersa, orientata dalla normale unitaria ν. Inoltre, sia $\mathcal{U} \subset S \setminus C_S$ un aperto relativamente compatto non-caratteristico e supponiamo che $\partial\mathcal{U}$ sia una varietà regolare, $n-2$-dimensionale, avente normale unitaria uscente η. Sia ϑ una variazione liscia di $\mathcal{U} \subset S$ con vettore variazione $W = \vartheta_* \frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0}$ e denotiamo con $\widetilde{W} := \vartheta_* \frac{\partial}{\partial t}$ ogni estensione di W ad un intorno di $\mathrm{Im}(\vartheta)$. Poniamo anche $w := \frac{\langle W, \nu\rangle}{|proj_H \nu|}$. Se $\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}} = \mathrm{const.}$ lungo $\mathcal{U}$, si ha*

$$II_{\mathcal{U}}(\sigma_H^{n-1}) = \int_{\mathcal{U}} \Big\{ -W(w)\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}} + |grad_{HS}\, w|^2 +$$
$$+ w^2 \Big[(2\mathrm{Tr}_2 B_H) - \sum_{\alpha \in I_V} \big\langle \big(2\, grad_{HS}(\varpi_\alpha) - C\tau_\alpha^S\big), C^\alpha \nu_H \big\rangle\Big]\Big\} \sigma_H^{n-1} +$$
$$+ \int_{\partial\mathcal{U}} \Big\{ \big\langle \big(- w\, grad_{HS}\, w + [\widetilde{W}^{\nu^t}, \widetilde{W}^T]^T\big|_{t=0}\big), \eta \big\rangle\, |proj_H \nu| +$$
$$+ \big(div_{TS}(|proj_H \nu| W^T) - \mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}} \langle W, \nu\rangle\big) \langle W^T, \eta\rangle \Big\} \sigma_{\mathcal{R}}^{n-2},$$

dove $\varpi_\alpha := \frac{\nu_\alpha}{|proj_H \nu|}$ e $\tau_\alpha^S := \tau_\alpha - \varpi_\alpha \nu_H$ $(\alpha \in I_V)$. Ovviamente, se si assume $W \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathcal{U}, T\mathbb{G})$ l'integrale di bordo è nullo.

In [36] questa formula si dimostra a partire da un enunciato, se possibile, ancora più generale, in quanto in esso non si fanno ipotesi sulla curvatura media. Tale ipotesi risulta cruciale, tuttavia, per ottenere un enunciato più semplice, in assenza di ipotesi sul vettore variazione.

Osservazione 4.5. *Precisiamo alcune notazioni usate nei precedenti enunciati. Per prima cosa* Tr_2 *denota la somma dei minori principali di ordine 2 della matrice associata ad un operatore lineare. Nel nostro caso si ha che:*

$$\mathrm{Tr}_2 B_H = \sum_{i,j \in I_{HS}} \phi_{1i}(\tau_i)\phi_{1j}(\tau_j) - \phi_{1i}(\tau_j)\phi_{1j}(\tau_i).$$

Ricordiamo inoltre che, in generale, vale la seguente identità (cfr. [14]*):*

$$\mathrm{Tr}_2 B_H = \frac{1}{2}\Big((\mathrm{Tr} B_H)^2 - \mathrm{Tr}(B_H \circ B_H)\Big).$$

Data la "forma nota" della matrice B_H (cfr. Osservazione 3.3), si ottiene che:

$$\mathrm{Tr}_2 B_H = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}\,2} - \|S_H\|^2_{\mathrm{gr}} - \frac{1}{4}\|C_{HS}\|^2_{\mathrm{gr}}\Big).$$

Si noti che $\mathrm{Tr}_2 B_H = 0$ se $\mathrm{dim} HS = 1$, ciò che accade, come esempio nel gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$ ed in quello di Engel $\mathbb{E}^1$. Inoltre $\|\cdot\|_{\mathrm{gr}}$ denota la norma di Gram di un operatore lineare. Infine con $\mathcal{J}_{HS}$ si è denotata la matrice Jacobiana, calcolata rispetto al frame ortonormale $\tau_{HS} := \{\tau_2, ..., \tau_{h_1}\}$ per il sottofibrato HS.

Osservazione 4.6 (Interpretazione degli integrali di bordo). *Precisiamo alcuni fatti concernenti gli integrali fatti sulla frontiera $\partial\mathcal{U}$ del dominio $\mathcal{U} \subset S$. Innanzi tutto sia nella formula della variazione prima che in quella della variazione seconda di σ_H^{n-1} tali contributi sono nulli, ad esempio, nei seguenti casi:*

- *(i) $W \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathcal{U})$, cioè si sceglie una variazione compattamente supportata in $\mathcal{U}$;*
- *(ii) Si sceglie una deformazione liscia ϑ di $\mathcal{U}$ che fissi il bordo $\partial\mathcal{U}$ (cfr. Definizione 4.1, Nota 15).*

Per quanto riguarda la formula della variazione prima di σ_H^{n-1}, si vede, analizzando (12) e (13), che il contributo proveniente dall'integrale di bordo è nullo tutte le volte che si sceglie $W_p \in (\nu_{\mathcal{R}})_p S$ ($\forall\, p \in \mathcal{U}$) oppure, per variazioni orizzontali, se $W_p \in (\nu_H)_p S$ ($\forall\, p \in \mathcal{U}$). Tale osservazione cessa di essere vera[14] *per la formula della variazione seconda. Infatti, nel caso di variazioni orizzontali, si noti che il primo addendo è non nullo in generale, anche se la parte orizzontale tangente della variazione è nulla (cioè $W = w\nu_H$ e $W_{HS} = 0$). Vorremmo pure notare che il primo addendo degli integrali di bordo proviene da un'integrazione per parti di alcuni termini in (19), e non direttamente da (20).*

Esempio 4.1 (Gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$). *Sia $\{X, Y, T\}$ l'insieme standard di generatori per l'algebra di Lie $\mathfrak{h}_1$ di $\mathbb{H}^1$. Essi soddisfano $[X, Y] = T$ e gli altri commutatori sono nulli. In particolare, T è il centro di $\mathfrak{h}_1$.*[15]*Sotto le ipotesi del Teorema 4.4, si ha*

$$II_{\mathcal{U}}(\sigma_H^2) = \int_{\mathcal{U}} \Big\{ - W(w)\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}} + \Big(\frac{\partial w}{\partial \nu_H^\perp}\Big)^2 + w^2\Big[2\frac{\partial \varpi}{\partial \nu_H^\perp} - \varpi^2\Big]\Big\}\sigma_H^2$$

per ogni vettore variazione W compattamente supportato in $\mathcal{U}$, dove come prima $w = \frac{\langle W,\nu\rangle}{|proj_H\,\nu|}$ e, se $\nu = (\nu_X, \nu_Y, \nu_T)$ denota la normale unitaria Riemanniana allora $\varpi := \frac{\nu_T}{\sqrt{\nu_X^2+\nu_Y^2}}$. Nella formula precedente $\nu_H^\perp$ denota l'unico vettore orizzontale tangente di HS soddisfacente $|\nu_H^\perp| = 1$ e tale che $\det[\nu_H, \nu_H^\perp, T] = 1$.

Esempio 4.2 (Gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$). *Sia $\{X_1, ..., X_{2n}, X_{2n+1}\}$ l'insieme dei generatori per l'algebra di Lie $\mathfrak{h}_n$ di $\mathbb{H}^n$ soddisfacente $[X_i, X_{i+n}] = X_{2n+1}$ $(i = 1, ..., n)$ (tutti gli altri*

---

[14]Notare che nel caso Riemanniano questo avviene.

[15]In coordinate esponenziali si ha che ogni punto $p \in \mathbb{H}^1$ si scrive come $p = exp(xX + yY + tT)$ e risulta che $X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2}\frac{\partial}{\partial t}$, $Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2}\frac{\partial}{\partial t}$, $T = \frac{\partial}{\partial t}$.

commutatori sono nulli ed il centro di $\mathfrak{h}_1$ *è* X_{2n+1}*). Sotto le ipotesi del Teorema 4.4, si ha*

$$II_{\mathcal{U}}(\sigma_{H}^{n-1}) = \int_{\mathcal{U}} \Big\{ -W(w)\mathrm{H}_{H}^{\mathbf{sc}} + |grad_{HS}\, w|^2 + w^2\Big[(2\mathrm{Tr}_2 B_H) - \big\langle 2\, grad_{HS}(\varpi), C_{H}^{2n+1}\nu_{H}\big\rangle - \varpi^2\Big]\Big\}\sigma_{H}^{n-1},$$

per ogni vettore variazione W *compattamente supportato in* $\mathcal{U}$*, dove* $w = \frac{\langle W,\nu\rangle}{|proj_H\,\nu|}$ *e, se* $\nu = (\nu_1, ..., \nu_{2n}, \nu_{2n+1})$ *denota la normale unitaria Riemanniana allora* $\varpi := \frac{\nu_{2n+1}}{|proj_H\,\nu|}$*. Rispetto alla base canonica di* $\mathbb{H}^n$ *abbiamo*

$$C_{H}^{2n+1}\nu_{H} = (\nu_{H}^2, -\nu_{H}^1, \nu_{H}^4, -\nu_{H}^3, ..., \nu_{H}^{2n}, -\nu_{H}^{2n-1}, 0) =: -\nu_{H}^{\perp},$$

dove $\nu_{H} = (\nu_{H}^1, ..., \nu_{H}^{2n}, 0)$*. Notare che* $\|C_{HS}^{2n+1}\|_{gr}^2 = 2(n-1)$ *e pertanto*

$$2\mathrm{Tr}_2 B_H = \mathrm{H}_{H}^{\mathbf{sc}2} - \|S_H\|_{\mathrm{gr}}^2 - \frac{1}{4}\|C_{HS}\|_{\mathrm{gr}}^2 = \mathrm{H}_{H}^{\mathbf{sc}2} - \|S_H\|_{\mathrm{gr}}^2 - \frac{2(n-1)}{4}\varpi^2.$$

Si ottiene così

$$II_{\mathcal{U}}(\sigma_{H}^{n-1}) = \int_{\mathcal{U}} \Big\{ -W(w)\mathrm{H}_{H}^{\mathbf{sc}} + |grad_{HS}\, w|^2 + w^2\Big[\mathrm{H}_{H}^{\mathbf{sc}2} - \|S_H\|_{\mathrm{gr}}^2 + 2\frac{\partial\varpi}{\partial\nu_{H}^{\perp}} - \frac{n+1}{2}\varpi^2\Big]\Big\}\sigma_{H}^{n-1}.$$

Esempio 4.3 (Gruppo di Engel $\mathbb{E}^1$)**.** *Sia* $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ *l'insieme di generatori per l'algebra di Lie* $\mathfrak{e}_1$ *di* $\mathbb{E}^1$ *soddifacente* $[X_1, X_2] = X_3$, $[X_1, X_3] = [X_2, X_3] = X_4$ *(tutti gli altri commutatori sono nulli e* X_4 *è il centro di* $\mathfrak{e}_1$*). Sotto le ipotesi del Teorema 4.4, si ha*

$$II_{\mathcal{U}}(\sigma_{H}^{n-1}) = \int_{\mathcal{U}} \Big\{ -W(w)\mathrm{H}_{H}^{\mathbf{sc}} + \Big(\frac{\partial w}{\partial\nu_{H}^{\perp}}\Big)^2 +$$
$$+w^2\Big[\Big(2\frac{\partial\varpi_3}{\partial\nu_{H}^{\perp}} - \varpi_3^2\Big) - \varpi_4^2\big[(\nu_{H}^2)^2 - (\nu_{H}^1)^2 - 2\nu_{H}^1\nu_{H}^2\big]^2 - \varpi_4\big[(\nu_{H}^2)^2 - (\nu_{H}^1)^2 + 2\nu_{H}^1\nu_{H}^2\big]\Big]\Big\}\sigma_{H}^3$$

per ogni vettore variazione W *compattamente supportato in* $\mathcal{U}$*, dove, come sopra,* $w = \frac{\langle W,\nu\rangle}{|proj_H\,\nu|}$*. Qui* $\varpi_3 := \frac{\nu_3}{|proj_H\,\nu|}$ *e* $\varpi_4 := \frac{\nu_4}{|proj_H\,\nu|}$ *dove* $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ *denota la normale unitaria Riemanniana. Inoltre* $\nu_{H}^{\perp}$ *denota l'unico vettore orizzontale tangente di HS soddisfacente* $|\nu_{H}^{\perp}| = 1$ *e tale che* $\det[\nu_{H}, \nu_{H}^{\perp}, X_3, X_4] = 1$*. Pertanto in coordinate canoniche si ha* $\nu_{H}^{\perp} = (-\nu_{H}^2, \nu_{H}^1, 0, 0) \in HS$*, dove* $\nu_{H} = (\nu_{H}^1, \nu_{H}^2, 0, 0)$*. Notare che abbiamo usato*

$$\langle C\tau_3, C_{H}^3\nu_{H}\rangle = -\varpi_4\langle C^4\tau_3, \nu_{H}^{\perp}\rangle = \varpi_4\big[(\nu_{H}^2)^2 - (\nu_{H}^1)^2 + 2\nu_{H}^1\nu_{H}^2\big]$$

ed il fatto che $|C^4\nu_{H}| = ((\nu_{H}^2)^2 - (\nu_{H}^1)^2 - 2\nu_{H}^1\nu_{H}^2)$*. Mettendo coordinate polari su* H *in modo che* $\nu_{H} = e^{i\psi}$*,* $\psi := \arg(\nu_{H}) \in [0, 2\pi]$*, otteniamo*

$$II_{\mathcal{U}}(\sigma_{H}^{n-1}) = \int_{\mathcal{U}} \Big\{ -W(w)\mathrm{H}_{H}^{\mathbf{sc}} + \Big(\frac{\partial w}{\partial\nu_{H}^{\perp}}\Big)^2 + w^2\Big[\Big(2\frac{\partial\varpi_3}{\partial\nu_{H}^{\perp}} - \varpi_3^2\Big) - \varpi_4^2(1+\sin 4\psi) + \sqrt{2}\varpi_4\cos\big(2\psi + \frac{\pi}{4}\big)\Big]\Big\}\sigma_{H}^3.$$

Diamo infine la seguente

Definizione 4.2 (Stabilità per ipersuperfici H-minimali)**.** *Sia* $S \subset \mathbb{G}$ *un'ipersuperficie* H*-minimale, cioè tale che* $\mathrm{H}_{H}^{\mathbf{sc}} = 0$*. Allora di dice che* S *è stabile se per ogni aperto relativamente compatto, regolare e non-caratteristico* $\mathcal{U} \subset S$ *e per ogni variazione normale dell'aperto* $\mathcal{U}$ *che fissa il bordo* $\partial\mathcal{U}$ *riesce* $II_{\mathcal{U}}(\sigma_{H}^{n-1}) > 0$*.*

Concludiamo questa sezione con il seguente generale

Teorema 4.5 (Criterio di Stabilità per ipersuperfici minimali)**.** *Nelle ipotesi e notazioni del Teorema 4.4, sia S tale che $\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}} = 0$ su $S \setminus C(S)$. Si ha allora che condizione necessaria e sufficiente per la stabilità di S è che la seguente disuguaglianza*

$$\int_{\mathcal{U}} \Big\{ |grad_{HS}\, w|^2 \sigma_H^{n-1} > \int_{\mathcal{U}} w^2 \Big[\|S_H\|_{\mathrm{gr}}^2 + \frac{1}{4}\|C_{HS}\|_{\mathrm{gr}}^2 + \sum_{\alpha \in I_V} \big\langle \big(2\, grad_{HS}(\varpi_\alpha) - C\tau_\alpha^S\big), C^\alpha \nu_H \big\rangle \Big] \Big\} \sigma_H^{n-1}$$

valga per ogni aperto relativamente compatto, regolare e non-caratteristico $\mathcal{U} \subset S$ e per ogni variazione normale dell'aperto $\mathcal{U}$ che fissa il bordo $\partial\mathcal{U}$.

5. Alcune motivazioni, conseguenze e prospettive

Formula di Integrazione per Parti e qualche possibile conseguenza. Le formule di integrazione per parti (cfr. Teorema 3.1 ed il Corollario 3.1) precedentemente enunciate sembrano essere molto utili in varie circostanze. Per illustrare quest'affermazione esporrò alcune conseguenze, quasi immediate, nel caso più semplice di interesse, quello del Gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^1$.

Partiamo dall'enunciare la seguente formula integrale (cfr. Corollario 3.2):

$$\int_{\mathcal{U}} \Big(1 + \rho_H\, \mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}} - \varpi \langle \mathcal{X}_H, \nu_H^{\perp} \rangle \Big) \sigma_H^2 = \int_{\partial\mathcal{U} \setminus C_{\partial\mathcal{U}}} \langle \mathcal{X}_H, \eta_{HS} \rangle_{HS}\, \sigma_H^1 .$$

Nel caso classico (Euclideo ed alcuni specifici esempi di geometrie Riemanniane) le cosidette "formule di monotonia dell'area" si basano proprio su formule analoghe a questa. E, come è ben noto, le formule di monotonia costituiscono l'ingrediente cruciale nell'ottenere vari tipi di disuguaglianze isoperimetriche su ipersuperfici (stazionarie, minimali ma anche nel caso di ipotesi di limitatezza sulla curvatura media). Pure in questo contesto sub-Riemanniano è più che ragionevole attendersi un'analoga utilità da questo genere di formule. Vorrei qui osservare che proprio la formula qui enunciata consente di ottenere qualcosa di simile alla monotonia dell'H-perimetro per xy-grafici di $\mathbb{H}^1$. In effetti da essa si deduce quasi immediatamente la seguente "disuguaglianza isoperimetrica lineare" valida per xy-grafici di $\mathbb{H}^1$(almeno $\mathbf{C}^2$ in questa formulazione) con punti caratteristici isolati:

$$\sigma_H^2(\mathcal{U} \cap C_r) \leq r \Big(\int_{\mathcal{U} \cap C_r} |\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}}| \sigma_H^2 + 2\sigma_H^1(\partial(\mathcal{U} \cap C_r)) \Big).$$

Nella precedente formula C_r denota un cilindro "verticale" (la sua generatrice è cioè parallela alla direzione T dell'algebra) di raggio r.

Stime tipo Heinz per xy-grafici in $\mathbb{H}^1$. Un risultato che, in qualche modo, risulta intimamente connesso alle tematiche presentate in questo seminario e trattate sistematicamente in [36], è il seguente[16]

Teorema 5.1 (Un teorema alla Heinz per xy-grafici di $\mathbb{H}^1$)**.** *Sia $S \subset \mathbb{H}^1$ un xy-grafico di classe $\mathbf{C}^2$ avente punti caratteristici isolati. Se esiste una costante $C > 0$ tale che la curvatura media orizzontale $\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}}$ di S soddisfa la stima $|\mathrm{H}_H^{\mathbf{sc}}| \geq C$ allora riesce*

$$C\mathcal{H}_{\mathbf{e}}^2(proj_{xy}(\mathcal{U})) \leq \mathcal{H}_{\mathbf{e}}^1(proj_{xy}(\partial\mathcal{U}))$$

[16]Per quanto ne sappia, questo risultato non compare in letteratura, anche se è assai probabile che sia deducibile, per esempio, da alcuni risultati presenti in [8]. Tuttavia la prova di questo risultato è molto elementare, come illustro sopra.

per ogni aperto regolare relativamente compatto $\mathcal{U} \subset S$. *Ne consegue in particolare che, se si sceglie* $\mathcal{U} := S \cap C_r(\overline{0})$, *dove* $C_r(\overline{0})$ *denota un cilindro verticale di raggio* r *centrato nell'origine di* $\mathbb{R}^2 \cong H_{\overline{0}}$, *si ottiene*

$$r \leq \frac{2}{C}$$

per ogni $r > 0$. *Qui si sono denotate con* $\mathcal{H}^1_{\mathbf{e}}$ *ed* $\mathcal{H}^2_{\mathbf{e}}$ *le misure di Hausdorff Euclidee* 1*-dimensionale e* 2*-dimensionale, rispettivamente.*

Quest'ultima stima implica che non possono esistere xy-grafici (con punti caratteristici isolati) di curvatura media costante differente da 0. Infatti basta mandare $r \longrightarrow +\infty$ per dedurlo. La prova di questo teorema è molto semplice e si fonda sulla seguente formula integrale, valida, in generale, per ogni aperto regolare non caratteristico $\mathcal{U}$ di una superfice S di classe $\mathbf{C}^2$:

$$\int_{\mathcal{U}} \mathrm{H}^{\mathbf{sc}}_{H} \varpi \sigma^2_{H} = \int_{\partial \mathcal{U}} \nu_{H} \lrcorner\, d\theta.$$

(Qui $\theta := dz + \frac{ydx - xdy}{2}$ denota la 1-forma di contatto duale del campo di contatto $T = \frac{\partial}{\partial t}$, e pertanto $d\theta = -dx \wedge dy$.) Applicazioni di questo genere si possono effettuare anche in casi piú complicati di quello sopra esposto.

Variazione Seconda e Questioni di Stabilità per Ipersuperfici. Nel caso Riemanniano (e pertanto anche in quello Euclideo), la piú nota tra le applicazioni della formula della variazione seconda del funzionale Area è senza dubbio quella alle cosidette questioni di stabilità. In breve, per stabilità, nel caso di una ipersuperficie minimale ($\mathrm{H}_{\mathcal{R}} = 0$), s'intende che la sua variazione seconda sia non-negativa per ogni variazione normale compattamente supportata sulla ipersuperficie minimale in considerazione. La letteratura su questo argomento è pressoché sterminata. Tra tutti uno dei piú importanti lavori che utilizza questo strumento matematico è certamente l'articolo di R. Shoen e S.T. Yau *Existence of incompressible mimimal surfaces and the topology of three-dimensional manifolds with non-negative scalar curvature* (Ann. of Math.,**110**, 1979) usato poi dagli stessi autori nella soluzione della celebre "Positive Mass Conjecture". Sempre per quanto concerne la stabilità di ipersuperfici minimali vorrei anche ricordare il lavoro di J. Spruck *Remarks on the stability of minimal submanifolds of* $\mathbb{R}^n$ (Math.Z. **144**, 1975) peraltro collegato a doppio filo col più noto articolo dello stesso Spruck e di D. Hoffman *Sobolev and Isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds* (Comm. Pure Appl. Math. **27**, 1974). Il bell'articolo di R. Osserman *Minimal Surfaces, Gauss map, Total curvature, and Stability* potrà essere un'ottima introduzione al soggetto e, certamente servirà come fonte preziosa di informazioni bibliografiche. Le questioni di stabilità sono molto interessanti anche nel caso in cui si vogliano studiare le ipersuperfici di curvatura media costante. In tal caso la definizione di stabilità si modifica (nel senso che cambia la classe competente dei campi variazione da utilizzare). Senza entrare in ulteriori dettagli vorrei però osservare come tale problema sia estemamente collegato al problema isoperimetrico. L'articolo di M. DoCarmo *Hypersurfaces of constant mean curvature* (Differential geometry (Pescola, 1988), 128–144, Lecture Notes in Math., 1410, Springer, Berlin, 1989.) contiene molte informazioni introduttive a tali questioni.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Ambrosio, *Some fine properties of sets of finite perimeter in Ahlfors regular metric measure spaces*, Adv. in Math., 2001.

[2] L. Ambrosio & B. Kircheim, *Rectifiable sets in metric and Banach spaces*, Math.Ann. **318**, 527-555, 2000.

[3] ———, *Current in metric spaces*, Acta Math.**185**, 1-80, 2000.

[4] N. Arcozzi & F. Ferrari, *Metric normal and distance function in the Heisenberg group,* Preprint, 2003.

[5] V. Barone Adesi & F. Serra Cassano & D. Vittone , *The Bernstein problem for intrinsic graphs in Heisenberg groups and calibrations,* (Accepted Paper: Calc. Var. & PDEs), 2006.

[6] L. Capogna, D. Danielli, & N. Garofalo, *The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality*, Comm. Anal. Geom. **12**, 1994.

[7] I. Chavel, *"Riemannian Geometry: a modern introduction"*, Cambridge University Press, 1994.

[8] J.J Cheng, J.F. Hwang, A. Malchiodi, P. Yang, *Minimal surfaces in pseudohermitian geometry,* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **5**, vol. IV, 129-179, 2005.

[9] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom.Funct.An., **9**, 428-517, 1999.

[10] D. Danielli, N. Garofalo, & D.M. Nhieu, *Minimal surfaces, surfaces of constant mean curvature and isoperimetry in Carnot groups*, preprint 2001.

[11] ———, *Sub-Riemannian Calculus on Hypersurfaces in Carnot groups*, arXiv:DG/0512547.

[12] G. David & S. Semmes, *"Fractured Fractals and Broken Dreams. Self-Similar Geometry through Metric and Measure"*, Oxford University Press, 1997.

[13] E.De Giorgi,*Un progetto di teoria delle correnti, forme differenziali e varietà non orientate in spazi metrici*, in *Variational Methods, Non Linear Analysys and Differential Equations in Honour of J.P. Cecconi*, M.Chicco et al. Eds. ECIG, Genova, 67-71, 1993.

[14] H. Federer, *"Geometric Measure Theory"*, Springer Verlag, 1969.

[15] B. Franchi, R. Serapioni, & F.S. Cassano, *Rectifiability and Perimeter in the Heisenberg Group*, Math. Ann., **321**, 479-531, 2001.

[16] ———, *Regular hypersurfaces, intrinsic perimeter and implicit function theorem in Carnot groups*, Comm. Anal. Geom., to appear.

[17] ———, *On the structure of finite perimeter sets in step 2 Carnot groups*, J. Geom. Anal., to appear.

[18] ———, *Regular submanifolds, graphs and area formula in Heisenberg groups*, preprint 2004.

[19] N. Garofalo & D.M. Nhieu, *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math., **49**, 1081-1144, 1996.

[20] N. Garofalo & S. Pauls, *The Bernstein problem in the Heisenberg group,* arXiv:math.DG/0209065.

[21] Z. Ge, *Betti numbers, characteristic classes and sub-Riemannian geometry* Illinois Journal of Mathematics, vol. **36**, no.3, 1992.

[22] M. Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, in *"Subriemannian Geometry"*, Progress in Mathematics, **144**. ed. by A.Bellaiche and J.Risler, Birkhauser Verlag, Basel, 1996.

[23] ———, *"Metric structures for Riemannian and Non Riemannian Spaces"*, Progress in Mathematics, **153**, Birkhauser Verlag, Boston, 1999.

[24] R. Hermann, *The Second Variation for Minimal Submanifolds*, Jour.Math.Mech., **16**, 1966.

[25] ———, *"Differential Geometry and the Calculus of Variations"*, Academic Press, **49**, New York & London, 1968.

[26] S. Helgason, *"Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces"*, Academic Press, New York, 1978.

[27] N.J Hicks, *"Notes on Differential geometry"*, Van Nostrand Reinholds Company, London, 1971.

[28] R.H Hladky, S.D. Pauls, *Variation of Perimeter Measure in sub-Riemannian geometry*, preprint 2007.

[29] J. Koiller, P.R. Rodrigues & P. Pitanga, *Non-holonomic connections following Élie Cartan*, An. Acad. Bras. Cienc. 2001, **7** (2), pp. 165-190.

[30] V. Magnani, *"Elements of Geometric Measure Theory on sub-Riemannian groups"*, PHD Thesis, Scuola Normale Superiore di Pisa, 2002.

[31] ———, *Blow-up of regular submanifolds in Heisenberg groups and applications*, preprint 2005.

[32] ———, *Measure of non-horizontal submanifolds*, preprint (CVGMT), 2005.

[33] J. Milnor, Curvatures of left invariant Riemannian metrics, Adv. Math., **21**, 293–329, 1976.

[34] J. Mitchell, *On Carnot-Carathèodory metrics*, J.Differ. Geom. **21**, 35-45, 1985.

[35] F. Montefalcone, *"Some Remarks in Differential and Integral Geometry of Carnot Groups"*, Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Bologna, 2004.

[36] ———,*Hypersurfaces and variational formulas in sub-Riemannian Carnot groups,* to appear in Jour. Math. Pures et Appl. (2006)

[37] R. Montgomery, *"A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications"*, AMS, Math. Surveys and Monographs, Vol. 91, 2002.

[38] P. Pansu, *"Geometrie du Group d'Heisenberg"*, These pour le titre de Docteur, 3ème cycle, Universite Paris VII, 1982.

[39] ———,*Métriques de Carnot Carathéodory et quasi-isométries des espaces symmétriques de rang un* , Ann. of Math. 2 **129**, 1-60, 1989.

[40] ———,*Differential forms and connections adapted to a contact structure, after Rumin.* Salamon, Dietmar (ed.), Symplectic geometry. Proc. Warwick, August 1990. Cambridge University Press, Cambridge. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 192, 183-195 (1993).

[41] ———,*Submanifolds and differential forms in Carnot manifolds, after M. Gromov et M. Rumin.* (2005). 41 pages.

[42] S.D. Pauls, *Minimal surfaces in the Heisenberg group*, Geom. Dedicata, **104**, 201-231, 2004.

[43] M.Ritoré, C.Rosales, *Area stationary surfaces in the Heisenberg group* $\mathbb{H}^1$, preprint 2006.

[44] M. Spivak, *"Differential Geometry"*, vol. IV, Publisch or Perish, 1964.

[45] R.S. Strichartz, *Sub-Riemannian geometry*, J. Diff. Geom., **24**, 221-263, 1986. Corrections: J. Diff. Geom., **30**, 595-596, 1989.

[46] K. Yano, *Integral formulas in Riemannian Geometry*, Pure and Applied Mathematics, No. 1 Marcel Dekker, Inc., New York 1970.

Francescopaolo Montefalcone:
Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bologna,
Piazza di P.ta S.Donato, 5, 40126 Bologna, Italia
E-mail address: montefal@dm.unibo.it