SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

Angelo Favini

UN SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI OPERATORIALI DI ORDINI DIVERSI IN SPAZI DI HILBERT

18 gennaio 2007

Sunto. Consideriamo un problema di Cauchy astratto per un sistema di equazioni differenziali in spazi di Hilbert. L'equazione "principale" è del secondo ordine e le equazioni "al bordo" sono del primo ordine. Viene provata l'esistenza di una soluzione. Vengono descritte applicazioni a problemi misti per equazioni iperboliche del secondo ordine unidimensionali e ad equazioni alle derivate parziali del quarto ordine con derivata temporale nelle condizioni al contorno.

Summary. We consider an abstract Cauchy problem for a system of nonhomogeneous differential equations in Hilbert spaces. The "main" equation is of the second order and "boundary" equations are of the first order. Existence of a solution is proved. Application to mixed (initial boundary value) problems for one-dimensional second order hyperbolic equations and for fourth order PDEs with the time derivative in boundary conditions has been shown.

1 Introduzione

Problemi con la derivata temporale nelle condizioni al bordo sorgono in molti problemi di fisica e meccanica. Menzioniamo solamente le monografie di A.N. Tikhonov e A.A. Samarskii [TS] e di A. Favini e A. Yagi [FY].

Nella monografia di S. Yakubov e Ya. Yakubov [YY] è stato considerato un nuovo approccio con un *sistema* di equazioni differenziali operatoriali di ordine superiore, invece del metodo standard di una unica equazione operatoriale. Questo metodo ha permesso di trattare una ampia classe di PDE con la derivata temporale nelle condizioni al bordo, in particolare per problemi iperbolici. Tuttavia, i risultati sono ottenuti in spazi di Gevrey, che non sono spazi di Banach.

Nei lavori [YY1], [Y1], [Y2] gli autori considerano un sistema di equazioni differenziali operatoriali dello (stesso) secondo ordine nell'equazione e nelle equazioni al bordo in spazi di Hilbert, dove le condizioni al bordo sono essenzialmente omogenee. Alcune trasformazioni speciali vengono applicate per ridurre il sistema ad una equazione astratta.

In questo lavoro, in collaborazione con Y. Yakubov [FYa], consideriamo un sistema di equazioni differenziali operatoriali, dove l'equazione principale è del secondo ordine e le condizioni al bordo sono del primo ordine rispetto alla variabile temporale, in spazi di Hilbert. Il problema è che l'equazione ridotta è degenere. Vengono allora trovate le condizioni sui dati, i corrispondenti operatori di trasformazione e gli spazi, in modo da utilizzare il corrispondente risultato su equazioni degeneri. Quest'ultimo è stato ottenuto da P. Colli e A. Favini in [CF], vedi anche Favini e Yagi [FY], per trattare equazioni iperboliche degeneri. In particolare, consente di risolvere problemi di tipo iperbolico-parabolico del tipo

$$\begin{aligned}
&m_1(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + m_2(x)\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x,t),\ (x,t) \in Q,\\
&u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Sigma,\\
&u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega,
\end{aligned}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con frontiera $\partial\Omega = \Gamma$, $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$, $m_1(x)$, $m_2(x)$ sono due funzioni continue non negative su $\bar{\Omega}$.

Notiamo che l'equazione è iperbolica dove $m_1(x) > 0$, $m_2(x) = 0$, parabolica dove $m_1(x) = 0$, $m_2(x) > 0$ ed ellittica dove $m_1(x) = m_2(x) = 0$.

Nella sezione 2 ricordiamo il risultato di esistenza per equazioni iperboliche degeneri in [CF], [FY]. La sezione 3 contiene i risultati astratti. Nella sezione 4 indichiamo alcune applicazioni ad equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico.

Soluzioni classiche per problemi di evoluzione legati a equazioni del secondo ordine unidimensionali con condizioni al bordo di tipo Dirichlet e Neumann sono state considerate, per esempio, da Yu. A. Mitropol'skii e L.G. Khoma [MK], S.N. Baranovskaya e C. Koku [BK]. N.L. Lazhetich [L] ha studiato anche il caso di condizioni al contorno nonlocali contenenti la soluzione u e la sua derivata u_x agli estremi di un intervallo.

Noi otteniamo l'esistenza di una soluzione classica nel caso in cui le condizioni al contorno contengono u_t e u_x.

Una ulteriore applicazione concerne PDE del quarto ordine con u_t nelle condizioni al bordo. La novità di questo lavoro è che il sistema astratto è completamente non omogeneo e viene studiato in uno spazio di Hilbert e non in uno spazio di Gevrey. Il problema trasformato è degenere e la sua soluzione è possibile con i risultati astratti di [FY] e [CF].

I teoremi sono applicati per risolvere alcune equazioni alle derivate parziali non standard.

2 Equazioni degeneri del secondo ordine di tipo iperbolico.

Consideriamo il problema di Cauchy in uno spazio di Hilbert H

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} C\dfrac{d^2u}{dt^2} + B\dfrac{du}{dt} + Au = f(t), \quad 0 \le t \le T, \\ u(0) = u_0, \ \dfrac{du}{dt}(0) = u_1. \end{cases}$$

Introduciamo la seguente definizione di soluzione di (P).

Una **soluzione** di (P), corrispondente a $f \in C([0,T];H)$, $u_0 \in D(A)$, $u_1 \in D(B)$, è una funzione $u \in C^2([0,T];H)$ soddisfacente l'equazione e le condizioni iniziali in (P), con la regolarità $u \in C([0,T],D(A))$, $\frac{du}{dt} \in C([0,T],D(B))$, $\frac{d^u}{dt^2} \in C([0,T];D(C))$.

Assumiamo $C \in \mathcal{L}(H)$ e che esista uno spazio di Hilbert V immerso densamente con continuità in H, cosicché identificando H col suo duale H', risulti $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$. Denotiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare tra V e V'. Sugli operatori A, B, C facciamo le seguenti ipotesi:

(1) $A \in \mathcal{L}(V,V')$, con

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle \quad \forall u, v \in V,$$
$$\langle Au, u\rangle \ge \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V, \text{dove } \omega > 0.$$

È allora ben noto che se A_H denota l'operatore autoaggiunto in H con dominio

$$D(A_H) = \{u \in V; \ Au \in H\}, \ A_H u = Au, \ u \in D(A_H),$$

e $A^{1/2}$ è la radice quadrata di A_H, allora $D(A^{1/2}) = V$ e $\langle Au, v\rangle = \langle A^{1/2}u, A^{1/2}v\rangle_H$ per ogni $u, v \in V$.

Le ipotesi su B e C sono

(2) B è un operatore lineare chiuso in H,

$$D(B) \supset D(A^{1/2}) = V,$$

(3) $\mathrm{Re}\langle Bv, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in V$,

(4) $C = C^* \in \mathcal{L}(H), \quad C \geq 0$.

Vale allora il seguente risultato di esistenza per il problema (P). Vedi [CF] e [FY], Theorem 6.14, p. 213.

Teorema 1. Se gli operatori A, B, C soddisfano le assunzioni (1)$\sim$(4), allora per ogni $f \in C^3([0,T]; H)$, $u_0, u_1 \in D(A_H)$ tali che

$$f(0) - A_H u_0 - Bu_1 = Cu_2, \;\; f'(0) - A_H u_1 - Bu_2 = C^{1/2} u_3,$$

per certi $u_2 \in D(A^{1/2})$ e $u_3 \in H$, il problema (P) ha una soluzione.

3 Il risultato astratto.

Consideriamo il problema di Cauchy per un sistema di equazioni differenziali operatoriali

$$(\mathrm{Q}) \begin{cases} L(D_t)u := u''(t) + Bu(t) = h(t) \quad \text{in} \quad H, \\ L_\nu(D_t)u := (A_{\nu 0}u(t))' + A_{\nu 1}u(t) = h_\nu(t) \quad \text{in} \quad H^\nu, \;\; \nu = 1, \dots, s, \\ u(0) = u_0, \;\; u'(0) = u_1, \end{cases}$$

dove $t \in [0,T]$, B è un operatore lineare nello spazio di Hilbert H, a dominio $D(B)$ denso e $A_{\nu 0}$, $A_{\nu 1}$ sono operatori lineari da H allo spazio di Hilbert H^ν, $\nu = 1, \dots, s$.

Definizione 1. Dati $h \in C([0,T]; H)$, $h_\nu \in C([0,T]; H^\nu)$ e $u_0 \in D(B)$, $u_1 \in H$, chiamiamo *soluzione* di (Q) una funzione $u \in C^2([0,T]; H)$ soddisfacente le equazioni e le condizioni iniziali in (Q) con la regolarità $u \in C([0,T]; D(B))$, $(A_{\nu 0}u(t))' \in C([0,T]; H^\nu)$, $A_{\nu 1}u(t) \in C([0,T]; H^\nu)$, $\nu = 1, \dots, s$.

Nello spazio di Hilbert

$$\mathcal{H} := H \oplus H^1 \oplus \cdots \oplus H^s$$

introduciamo gli operatori $\mathbb{J}$, $\mathbb{A}$, e $\mathbb{B}$ mediante

$$\begin{cases} D(\mathbb{J}) := \mathcal{H}, \\ \mathbb{J}(u, v_1, \dots, v_s) := (u, 0, \dots, 0), \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(\mathbb{A}) := \mathcal{H}, \\ \mathbb{A}(u, v_1, \dots, v_s) := (0, v_1, \dots, v_s), \end{cases}$$

$$\begin{cases} D(\mathbb{B}) := \Big\{ (u, A_{10}u, \dots, A_{s0}u) \;\Big|\; u \in D(B) \Big\}, \\ \mathbb{B}(u, A_{10}u, \dots, A_{s0}u) := (Bu, A_{11}u, \dots, A_{s1}u). \end{cases}$$

Consideriamo il seguente problema di Cauchy associato al problema (Q):

$$(Q)' = \begin{cases} \mathbb{J}v''(t) + \mathbb{A}v'(t) + \mathbb{B}v(t) = f(t) \quad \text{in} \quad \mathcal{H}, \\ v(0) = v_0, \; v'(0) = v_1, \end{cases}$$

dove

$$\begin{aligned} v(t) \quad &:= (u(t), A_{10}u(t), \ldots, A_{s0}u(t)), \\ f(t) \quad &:= (h(t), h_1(t), \ldots, h_s(t)), \\ v_0 \quad &:= (u_0, A_{10}u_0, \ldots, A_{s0}u_0), \\ v_1 \quad &:= (u_1, h_1(0) - A_{11}u_0, \ldots, h_s(0) - A_{s1}u_0). \end{aligned}$$

Definizione 2. Dati $f \in C([0,T];\mathcal{H})$ e $v_0 \in D(\mathbb{B}), v_1 \in \mathcal{H}$, una funzione $v \in C^2([0,T];\mathcal{H})$ soddisfacente l'equazione e le condizioni iniziali in (Q)$'$, con la regolarità $v \in C([0,T];D(\mathbb{B}))$ è chiamata una *soluzione* di (Q)$'$.

Ovviamente, se $v(t) = (u(t), A_{10}u(t), \ldots, A_{s0}u(t))$ è una soluzione di (Q)$'$, allora $u(t)$ è una soluzione di (Q).

Se A è un operatore chiuso nello spazio di Hilbert H, il dominio $D(A)$, munito della norma

$$\|u\|_{H(A)} := (\|u\|^2 + \|Au\|^2)^{1/2},$$

è uno spazio di Hilbert e viene denotato con $H(A)$.

Ciò premesso, possiamo enunciare il seguente teorema di esistenza per il problema (Q).

Teorema 2. Valgano le seguenti condizioni:

i. B è un operatore lineare chiuso a dominio denso $D(B)$ in uno spazio di Hilbert H;

ii. gli operatori $A_{\nu 0}$, $\nu = 1, \ldots, s$, sono limitati da $(H(B), H)_{1/2,2}$ allo spazio di Hilbert H^ν e gli operatori $A_{\nu 1}$, $\nu = 1, \ldots, s$, sono limitati da $H(B)$ ad H^ν;

iii. la varietà lineare $\Big\{(u, A_{10}u, \ldots, A_{s0}u) \;\Big|\; u \in D(B)\Big\}$ è densa nello spazio di Hilbert $\mathcal{H} := H \oplus H^1 \oplus \cdots \oplus H^s$;

iv. $\forall u, v \in D(B)$

$$\begin{aligned} &(Bu, v)_H + (A_{11}u, A_{10}v)_{H^1} + \cdots + (A_{s1}u, A_{s0}v)_{H^s} \\ &= (u, Bv)_H + (A_{10}u, A_{11}v)_{H^1} + \cdots + (A_{s0}u, A_{s1}v)_{H^s}; \end{aligned}$$

v. $\exists C_1, C_2 > 0$ t.c. $\forall u \in D(B)$

$$\begin{aligned} C_1\|u\|^2_{(H(B),H)_{\frac{1}{2},2}} &\leq (Bu, u)_H + (A_{11}u, A_{10}u)_{H^1} + \cdots + (A_{s1}u, A_{s0}u)_{H^s} \\ &\leq C_2\|u\|^2_{(H(B),H)_{\frac{1}{2},2}}; \end{aligned}$$

vi. un numero reale λ_0 è un punto regolare per l'operatore $\mathbb{L}(\lambda)$: $u \to \mathbb{L}(\lambda)u := \Big((\lambda I + B)u, (\lambda A_{10} + A_{11})u, \dots, (\lambda A_{s0} + A_{s1})u\Big)$, che è limitato da $H(B)$ su $H \oplus H^1 \oplus \cdots \oplus H^s$: $\exists$ l'inverso limitato $\mathbb{L}^{-1}(\lambda_0)$;

vii. $h(t) \in C^3([0,T]; H)$, $h_\nu(t) \in C^3([0,T]; H^\nu)$, $u_0 \in D(B)$, $u_1 \in D(B)$ sono tali che per un certo $u_2 \in (H(B), H)_{1/2,2}$

$$\begin{gathered} h(0) - Bu_0 = u_2, \\ h'_\nu(0) - A_{\nu 1}u_1 - A_{\nu 0}u_2 = 0, \quad \nu = 1, \dots, s, \\ A_{\nu 0}u_1 = h_\nu(0) - A_{\nu 1}u_0, \quad \nu = 1, \dots, s. \end{gathered}$$

Allora il problema (Q) ammette una soluzione $u(t)$. Inoltre, $\exists (A_{\nu 0}u(t))'' \in C([0,T]; H^\nu)$, $\nu = 1, \dots, s$.

Dimostrazione. Utilizziamo il Teorema 1. Si comincia mostrando che $\mathbb{B}$ è un operatore autoaggiunto e definito positivo in $\mathcal{H}$. Ora, per la condizione iii), $D(\mathbb{B})$ è denso in $\mathcal{H}$. Per la condizione iv), è facile vedere che $\mathbb{B}$ è simmetrico. L'equazione

$$\lambda v + \mathbb{B}v = F, \quad F := (f, f_1, \dots, f_s),$$

con $v = (u, A_{10}u, \dots, A_{s0}u)$, è equivalente al sistema

$$\begin{cases} L(\lambda)u = \lambda u + Bu = f, \\ L_\nu(\lambda)u = \lambda A_{\nu 0}u + A_{\nu 1}u = f_\nu, \quad \nu = 1, \dots, s. \end{cases}$$

Si applica allora la condizione vi) : $\exists \lambda_0$ reale tale che $\mathrm{Im}(\lambda_0 I + \mathbb{B}) = \mathcal{H}$. Quindi $\mathbb{B}$ è autoaggiunto in $\mathcal{H}$. La condizione v) garantisce che $\mathbb{B}$ è definito positivo. Dunque le condizioni su $\mathbb{B}$ nel Teorema 1 sono soddisfatte (si noti che $V = D(\mathbb{B}^{1/2})$).

$\mathbb{A}$ è un operatore limitato in $\mathcal{H}$. Inoltre,

$$\mathrm{Re}(\mathbb{A}v, v) = \|v_1\|^2_{H^1} + \cdots + \|v_s\|^2_{H^s} \geq 0$$

per ogni $v = (u, v_1, \dots, v_s) \in \mathcal{H}$ e, quindi, $\forall v \in D(\mathbb{B}^{1/2})$. Poi, $\mathbb{J} = \mathbb{J}^*$ in $\mathcal{H}$ è un operatore limitato, con $(\mathbb{J}v, v) = (u, u) \geq 0$, $\forall v = (u, v_1, \dots, v_s) \in \mathcal{H}$.

Il dominio $\mathcal{H}(\mathbb{B})$ di $\mathbb{B}$ è equivalentemente definito mediante

$$\{v \mid v = (u, A_{10}u, \dots, A_{s0}u), \quad u \in D(B)\}.$$

Ciò segue dalla condizione ii). Essa anche implica che

$$\|v\|_{\mathcal{H}(\mathbb{B})} = \|\mathbb{B}v\|_{\mathcal{H}}.$$

Si riconosce poi che

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbb{B}) \quad &= \{v \mid v = (u, A_{10}u, \dots, A_{s0}u), \quad u \in (H(B), H)_{\frac{1}{2},2}, \\ \|v\|^2_{\mathcal{H}(\mathbb{B}^{1/2})} &= \|\mathbb{B}^{1/2}v\|^2_{\mathcal{H}}\} = (\mathcal{H}(\mathbb{B}), \mathcal{H})_{\frac{1}{2},2} \end{aligned}$$

e $\exists c_1, c_2 > 0$ tali che

$$c_1\|v\|_{(H(B),H)_{\frac{1}{2},2}} \leq \|v\|_{\mathcal{H}(\mathbb{B}^{1/2})} \leq c_2\|u\|_{(H(B),H)_{\frac{1}{2},2}}.$$

Precisati $\mathcal{H}(\mathbb{B})$ e $\mathcal{H}(\mathbb{B}^{1/2})$, dalla condizione vii) concludiamo, per il problema (Q)$'$, che le ipotesi sui dati si leggono

$$\begin{aligned}
&f \in C^3([0,T];\mathcal{H}), \quad v_0, v_1 \in D(\mathbb{B}),\\
&f(0) - \mathbb{B}v_0 - \mathbb{A}v_1 = (h(0) - Bu_0, h_1(0) - A_{11}u_0 - A_{10}u_1, \ldots,\\
&\ldots, h_s(0) - A_{s1}u_0 - A_{s0}u_1) = (u_2, 0, \ldots, 0) = \mathbb{J}v_2
\end{aligned}$$

per un $v_2 = (u_2, A_{10}u_2, \ldots, A_{s0}u_2) \in D(\mathbb{B}^{1/2})$ e

$$\begin{aligned}
&f'(0) - \mathbb{B}v_1 - \mathbb{A}v_2\\
&= (h'(0) - Bu_1, u_1'(0) - A_{11}u_1 - A_{10}u_2, \ldots, h_s'(0) - A_{s1}u_1 - A_{s0}u_2)\\
&= (u_3, 0, \ldots, 0) = \mathbb{J}^{1/2}v_3
\end{aligned}$$

con $v_3 = (u_3, v_1^3, \ldots, v_s^3) \in \mathcal{H}$. Dunque, sotto queste condizioni, il problema (Q)$'$ ammette una soluzione $v(t) = (u(t), A_{10}u(t), \ldots, A_{s0}u(t))$ e ciò a sua volta significa che $u(t)$ è soluzione del problema (Q).

Poiché $v'' \in C([0,T];\mathcal{H})$, concludiamo che $(A_{\nu 0}u(t))'' \in C([0,T];H^\nu)$, $\nu = 1, \ldots, s$.

4 Applicazioni a PDE.

Abbiamo bisogno di alcuni risultati preliminari. Siano m_ν, m interi con $0 \leq m_\nu \leq m-1$ e $u \in W_2^m(0,1)$. Poniamo

$$(*) \qquad A_{\nu_0}u := \alpha_\nu u^{m_\nu}(0) + \beta_\nu u^{(m_\nu)}(1).$$

Vale il seguente teorema, cfr. [YY], Theorem 3.6.2.

Proposizione 1. Assumiamo

1. $m \geq 1$, $m_\nu \geq 0$, $0 \leq s \leq m$;
2. il sistema di funzionali $(*)$ è p-regolare rispetto al sistema

$$\omega_j = e^{2\pi i \frac{j-1}{m}},\ j = 1, \ldots, m,\ \text{cioè}$$

$$\begin{vmatrix}
\alpha_1\omega_1^{m_1} & \ldots & \alpha_1\omega_p^{m_1} & \beta_1\omega_{p+1}^{m_1} & \ldots & \beta_1\omega_m^{m_1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\alpha_m\omega_1^{m_1} & \ldots & \alpha_m\omega_p^{m_m} & \beta_m\omega_{p+1}^{m_m} & \ldots & \beta_m\omega_m^{m_m}
\end{vmatrix} \neq i$$

dove $p = \frac{m}{2}$ se m è pari, $p = \left[\frac{m}{2}\right]$ o $p = \left[\frac{m}{2}\right] + 1$ se m è dispari.

Allora la varietà lineare

$$\left\{ (u,v) \;\middle|\; u \in C^\infty[0,1],\ A_{\nu 0}u = 0,\ \nu = s+1,\dots,m,\ v := (A_{10}u,\dots,A_{s0}u) \right\},$$

è *densa* nello spazio $W_q^\ell(0,1) \dotplus \mathbb{C}^s$, $\ell \le \min\{m_\nu\}$, $q \in (1,\infty)$.

Consideriamo poi un problema al contorno in cui un parametro spettrale figura linearmente e può essere presente nelle condizioni al bordo, cioè

$$\begin{aligned}
L(\lambda)u \quad &:= \lambda u(x) + a(x)u^{(m)}(x) + Bu|_x = f(x), \quad x \in (0,1),\\
L_\nu(\lambda)u \quad &:= \lambda\Big(\alpha_\nu u^{(m_\nu)}(0) + \beta_\nu u^{(m_\nu)}(1) + \sum_{j=1}^{N_\nu} \delta_{\nu j} u^{(m_\nu)}(x_{\nu j}) + T_\nu u\Big) + T_{\nu 0}u\\
&= g_\nu, \quad \nu = 1,\dots,s,\\
L_\nu u \quad &:= \alpha_\nu u^{(m_\nu)}(0) + \beta_\nu u^{(m_\nu)}(1) + \sum_{j=1}^{N_\nu} \delta_{\nu j} u^{(m_\nu)}(x_{\nu j}) + T_\nu u = 0,\\
&\qquad \nu = s+1,\dots,m,
\end{aligned}$$

dove $m \ge 1$, $m_\nu \le m-1$, $x_{\nu j} \in (0,1)$, $0 \le s \le m$, B è un operatore in $L_2(0,1)$, T_ν e $T_{\nu 0}$ sono operatori in $L_2(0,1)$.

Vale il seguente teorema, cfr. [YY2].

Proposizione 2. Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

1. $m \ge 1$; $m_\nu \le m-1$; $0 \le s \le m$;
2. $a \in C[0,1]$; $a(x) \ne 0$; $a(0) = a(1)$ (se $\alpha_\nu = 0$ o $\beta_\nu = 0$ per ogni $\nu = 1,\dots,m$, tale condizione è omessa);

$$\sup_{[0,1]} \arg a(x) - \inf_{[0,1]} \arg a(x) < 2\pi, \text{ se } m \text{ è pari;}$$
$$\sup_{[0,1]} \arg a(x) - \inf_{[0,1]} \arg a(x) < \pi, \text{ se } m \text{ è dispari;}$$

3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists C(\varepsilon) \ge 0$ t.c.

$$\|Bu\|_{L_2(0,1)} \le \varepsilon \|u\|_{W_2^m(0,1)} + C(\varepsilon)\|u\|_{L_2(0,1)}, \quad u \in W_2^m(0,1);$$

4. i funzionali T_ν in $W_2^{m_\nu}(0,1)$ e i funzionali $T_{\nu 0}$ in $W_2^{m-\varepsilon}(0,1)$, per un $\varepsilon > 0$, sono continui;
5. il sistema $(*)$ è p-regolare rispetto ai numeri $\omega_j = \mathrm{e}^{2\pi i \frac{j-1}{m}}$, $j = 1,\dots,m$.

Allora $\forall \varepsilon > 0\ \exists R_\varepsilon > 0$ tale che per tutti i numeri complessi λ che soddisfano $|\lambda| > R_\varepsilon$ e per $m = 2p$ situati all'interno dell'angolo

$$\frac{\pi m}{2} - \pi + \sup_{[0,1]} \arg a(x) + \varepsilon < \arg\lambda < \frac{\pi m}{2} + \inf_{[0,1]} \arg a(x) - \varepsilon,$$

per $m = 2p+1$ all'interno dell'angolo

$$\frac{\pi m}{2} + \sup_{[0,1]} \arg a(x) + \varepsilon < \arg \lambda < \frac{\pi m}{2} + \pi + \inf_{[0,1]} \arg a(x) - \varepsilon,$$

per $m = 2p-1$ all'interno dell'angolo

$$\frac{\pi m}{2} - \pi + \sup_{x\in[0,1]} \arg a(x) + \varepsilon < \arg \lambda < \frac{\pi m}{2} + \inf_{x\in[0,1]} \arg a(x) - \varepsilon,$$

l'operatore $\mathbb{L}(\lambda): \ u \to \mathbb{L}(\lambda)u := \Big(L(\lambda)u, L_1(\lambda)u, \ldots, L_s(\lambda)u\Big)$ da $W_2^m((0,1); L_\nu u = 0, \nu = s+1, \ldots, m)$ su $L_2(0,1)\dot{+}\mathbb{C}^s$ è un isomorfismo e per tali λ si ha la stima

$$\|u\|_{W_2^m(0,1)} + |\lambda|\Big(\|u\|_{L_2(0,1)} + \sum_{\nu=1}^{s} |A_{\nu 0} u|\Big) \le C(\varepsilon)\Big(\|f\|_{L_2(0,1)} + \sum_{\nu=1}^{s} |g_\nu|\Big),$$

u essendo la soluzione del sistema.

Applicazione 1. Nel dominio $[0,T] \times [0,1]$ si consideri il problema

$$(\mathrm{R}) \begin{cases} L(D_t)u := \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) - b\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) + cu(t,x) = h(t,x), \ (t,x) \in [0,T] \times [0,1], \\ L_1(D_t)u := \alpha \dfrac{\partial}{\partial t}[u(t,0)] - \dfrac{\partial}{\partial x} u(t,0) = h_1(t), \quad t \in [0,T], \\ L_2(D_t)u := \beta \dfrac{\partial}{\partial t}[u(t,1)] - \dfrac{\partial}{\partial x} u(t,1) = h_2(t), \quad t \in [0,T], \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \dfrac{\partial}{\partial t} u(0,x) = u_1(x), \quad x \in [0,1]. \end{cases}$$

Teorema 3. Valgano

1. $b > 0, c > 0, \alpha > 0, \beta < 0$;
2. $h(t,\cdot) \in C^3([0,T]; L_2(0,1))$, $h_\nu(t) \in C^3[0,T]$, $u_0(x), u_1(x) \in W_2^2(0,1)$ tali che per qualche $u_2(x) \in W_2^1(0,1)$ risulti $h(0,x) + bu_0''(x) - cu_0(x) = u_2(x)$ e

$$\begin{aligned} &h_1'(0) + u_1'(0) - \alpha u_2(0) = 0, \quad h_2'(0) + u_1'(1) - \beta u_2(1) = 0, \\ &\alpha u_1(0) = h_1(0) + u_0'(0), \quad \beta u_1(1) = h_2(0) + u_0'(1). \end{aligned}$$

Allora il problema (R) ha una soluzione $u(t,x) \in C^2([0,T]; L_2(0,1))$ con regolarità $u(t,x) \in C([0,T]; W_2^2(0,1))$. Inoltre, esistono $\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u(t,0)]$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u(t,1)]$ e sono in $C[0,T]$.

Dimostrazione. Si applica il Teorema 2. Qui,

$$\begin{aligned} &H := L_2(0,1), \\ &D(B) := W_2^2(0,1), \quad Bu := -bu''(x) + cu(x). \end{aligned}$$

Si prende

$$H^1 := \frac{b}{\alpha}\mathbb{C} \text{ con prodotto scalare } (u,v)_{H^1} := \frac{b}{\alpha}u\bar{v},$$
$$H^2 := -\frac{b}{\beta}\mathbb{C},\ (u,v)_{H^2} := -\frac{b}{\beta}u\bar{v}.$$

Inoltre,

$$A_{10}u := \alpha u(0),\ A_{20}u := \beta u(1),\ A_{11}u := -u'(0),\ A_{21}u := -u'(1).$$

Si utilizza Triebel [T, §3.2.5] per vedere che $D(B)$ è denso in H. Per [T, §4.3.1], $(W_2^2(0,1), L_2(0,1))_{\frac{1}{2},2} = W_2^1(0,1)$.

La condizione iii) del Teorema 2 segue dalla Proposizione 1. La condizione iv) è conseguenza di una facile verifica diretta, come per la v). La condizione vi) segue dalla Proposizione 2 applicata a

$$\begin{aligned} L(\lambda)u &:= (\lambda I + B)u = \lambda u(x) - bu''(x) + cu(x), \\ L_1(\lambda)u &:= (\lambda A_{10} + A_{11})u = \lambda\alpha u(0) - u'(0), \\ L_2(\lambda)u &:= (\lambda A_{20} + A_{21})u = \lambda\beta u(1) - u'(1). \end{aligned}$$

Infatti, essa implica che $\forall\varepsilon > 0\ \exists R_\varepsilon > 0$ t.c. per ogni numero complesso λ, con $|\lambda| > R_\varepsilon$ e

$$-\pi + \varepsilon < \arg\lambda < \pi - \varepsilon,$$

l'operatore $\mathbb{L}(\lambda):\ u \to \mathbb{L}(\lambda)u := \Big(L(\lambda)u, L_1(\lambda)u, L_2(\lambda)u\Big)$ è un isomorfismo da $W_2^2(0,1)$ su $L_2(0,1) \oplus \frac{b}{\alpha}\mathbb{C} \oplus -\frac{b}{\beta}\mathbb{C}$.

La condizione vii) segue dalla attuale assunzione (2).

Applicazione 2. Nel dominio $[0,T] \times [0,1]$ consideriamo

$$\text{(S)} \begin{cases} L(D_t)u := \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x) + b\dfrac{\partial^4}{\partial x^4}u(t,x) + cu(t,x) = h(t,x),\ (t,x) \in [0,T]\times[0,1], \\ L_1(D_t)u := \alpha\dfrac{\partial}{\partial t}[u(t,0)] + \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}u(t,0) = h_1(t), \quad t \in [0,T], \\ L_2(D_t)u := \beta\dfrac{\partial}{\partial t}[u(t,1)] + \dfrac{\partial^3}{\partial x^3}u(t,1) = h_2(t), \quad t \in [0,T], \\ L_3(D_t)u := \gamma\dfrac{\partial}{\partial t}\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}u(t,0)\Big] + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,0) = h_3(t), \quad t \in [0,T], \\ L_4(D_t)u := \delta\dfrac{\partial}{\partial t}\Big[\dfrac{\partial}{\partial x}u(t,1)\Big] + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,1) = h_4(t), \quad t \in [0,T], \end{cases}$$

$$u(0,x) = u_0(x),\ \ \frac{\partial}{\partial t}u(0,x) = u_1(x), \quad x \in [0,1],$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono numeri reali.

Teorema 4. Supponiamo

1. $b > 0, c > 0, \alpha > 0, \beta < 0, \gamma < 0, \delta > 0$;

2. $h(t,\cdot) \in C^3([0,T]; L_2(0,1))$, $h_\nu(t) \in C^3[0,T]$, $u_0(x), u_1(x) \in W_2^4(0,1)$ per cui $\exists u_2(x) \in W_2^2(0,1)$ t.c.

$$\begin{aligned}
&h(0,x) - bu_0''''(x) - cu_0(x) = u_2(x),\\
&h_1'(0) - u_1'''(0) - \alpha u_2(0) = 0, \quad h_2'(0) - u_1'''(1) - \beta u_2(1) = 0,\\
&h_3'(0) - u_1''(0) - \gamma u_2'(0) = 0, \quad h_4'(0) - u_1''(1) - \delta u_2'(1) = 0,\\
&\alpha u_1(0) = h_1(0) - u_0'''(0), \quad \beta u_1(1) = h_2(0) - u_0'''(1),\\
&\gamma u_1'(0) = h_3(0) - u_0''(0), \quad \delta u_1'(1) = h_4(0) - u_0''(1).
\end{aligned}$$

Allora il problema (S) ha una soluzione $u(t,x) \in C^2([0,T]; L_2(0,1))$ con la regolarità $u(t,x) \in C([0,T]; W_2^4(0,1))$. Inoltre, esistono $\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u(t,0)]$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u(t,1)]$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}u(t,0)\right]$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial}{\partial x}u(t,1)\right]$ e sono in $C[0,T]$.

Dimostrazione. Anche qui $H := L_2(0,1)$. Si prende

$$\begin{aligned}
&D(B) := W_2^4(0,1), \quad Bu := bu''''(x) + cu(x),\\
&H^1 := \frac{b}{\alpha}\mathbb{C} \text{ con } (u,v)_{H^1} := \frac{b}{\alpha}u\bar{v},\\
&H^2 := -\frac{b}{\beta}\mathbb{C} \text{ con } (u,v)_{H^2} := -\frac{b}{\beta}u\bar{v},\\
&H^3 := -\frac{b}{\gamma}\mathbb{C} \text{ con } (u,v)_{H^3} := -\frac{b}{\gamma}u\bar{v},\\
&H^4 := \frac{b}{\delta}\mathbb{C} \text{ con } (u,v)_{H^4} := \frac{b}{\delta}u\bar{v},\\
&A_{10}u := \alpha u(0),\ A_{20}u := \beta u(1),\ A_{30}u := \gamma u'(0),\ A_{40}u := \delta u'(1),\\
&A_{11}u := u'''(0),\ A_{21}u := u'''(1),\ A_{31}u := u''(0),\ A_{41}u := u''(1).
\end{aligned}$$

Il problema (S) è scritto nella nostra forma astratta. Da Triebel [T, §3.2.5] segue che $D(B)$ è denso in H e da [T, §4.3.1] si ha $(W_2^4(0,1), L_2(0,1))_{\frac{1}{2},2} = W_2^2(0,1)$. Inoltre $W_2^k(0,1) \subset C^m[0,1]$, $k > m \geq 0$ con continuità. Quindi la i) e la ii) sono verificate.

La iii) segue dalla Proposizione 1. iv) e v) seguono da computazione diretta. Per la v) si deve anche utilizzare la immersione compatta di $W_2^2(0,1)$ in $W_2^1(0,1)$, [T], Theorem 3.2.5.

Per provare la vi), si applica la Proposizione 2 agli operatori

$$\begin{aligned}
L(\lambda)u &:= (\lambda I + B)u = \lambda u(x) + bu''''(x) + cu(x),\\
L_1(\lambda)u &:= (\lambda A_{10} + A_{11})u = \lambda\alpha u(0) + u'''(0),\\
L_2(\lambda)u &:= (\lambda A_{20} + A_{21})u = \lambda\beta u(1) + u'''(1),\\
L_3(\lambda)u &:= (\lambda A_{30} + A_{31})u = \lambda\gamma u'(0) + u''(0),\\
L_4(\lambda)u &:= (\lambda A_{40} + A_{41})u = \lambda\delta u'(1) + u''(1).
\end{aligned}$$

Segue che $\forall \varepsilon > 0 \; \exists R_\varepsilon > 0$ t.c. per ogni numero complesso λ con $|\lambda| > R_\varepsilon$ e

$$-\pi + \varepsilon < \arg \lambda < \pi - \varepsilon,$$

l'operatore $\mathbb{L}(\lambda): \; u \to \mathbb{L}(\lambda)u := \Big(L(\lambda)u, L_1(\lambda)u, L_2(\lambda)u, L_3(\lambda)u, L_4(\lambda)u\Big)$ è un isomorfismo da $W_2^4(0,1)$ su $L_2(0,1) \oplus \frac{b}{\alpha}\mathbb{C} \oplus -\frac{b}{\beta}\mathbb{C} \oplus -\frac{b}{\gamma}\mathbb{C} \oplus \frac{b}{\delta}\mathbb{C}$. La vi) segue. La vii) è allora assicurata dalla assunzione 2.

BIBLIOGRAFIA

[BK] Baranovskaya, S. N. e Koku, Charie, *On a classical solution of the mixed problem for a one-dimensional second-order hyperbolic equation*, Differential Equations, **35**, 8 (1999), 1144–1147.

[CF] Colli, P. e Favini, A., *On some degenerate second order equations of mixed type*, Funkc. Ekv., **38** (1995), 473–489.

[FY] Favini, A. e Yagi, A., "Degenerate Differential Equations in Banach Spaces", Marcel Dekker, New York, 1999.

[FYa] Favini, A. e Yakubov, Ya., *A system of differential-operator equations of different orders in Hilbert spaces*, in corso di stampa su "Mediterr. J. Math."

[L] Lazhetich, N. L., *The existence of a classical solution of the mixed problem for a one-dimensional second-order hyperbolic equation*, Differential Equations, **34**, 5 (1998), 683–695.

[MK] Mitropol'skii, Yu. A. e Khoma, L. G., *The existence of a classical solution to the mixed problem for a linear second-order hyperbolic equation*, Ukrainian Mathematical Journal, **45**, 9 (1993), 1382–1389.

[TS] Tikhonov, A. N. e Samarskii, A. A., "Equations of Mathematical Physics, Oxford, Pergamon Press, 1963 (translated from Russian).

[T] Triebel, H., "Interpolation Theory. Function Spaces. Differential Operators, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[YY] Yakubov, S. e Yakubov, Ya., "Differential-Operator Equations. Ordinary and Partial Differential Equations, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2000.

[YY1] Yakubov, S. e Yakubov, Ya., *An initial-boundary-value problem for hyperbolic differential-operator equations on a finite interval*, Differential and Integral Equations, **17**, 1-2 (2004), 53-72.

[YY2] Yakubov, S. e Yakubov, Ya., *Abel basis of root functions of regular boundary value problems*, Mathematischten Nachrichten, **197** (1999), 157-187.

[Y1] Yakubov, Ya., *Almost periodic solutions and oscillations decay for hyperbolic differential-operator equations*, Functional Differential Equations, **10**, 1-2 (2003), 315-330.

[Y2] Yakubov, Ya., *Hyperbolic differential-operator equations on a whole axis*, Abstract and Applied Analysis, **2** (2004), 99-113.