Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2006-07

Ermanno Lanconelli

Stime Gaussiane e teoria del potenziale per operatori di diffusione

22 febbraio 2007

Abstract

Let $\mathcal{H}$ be a linear second order PDO with nonnegative characteristic form, in a strip $S \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Suppose $\mathcal{H}$ has a global fundamental solution Γ of class C^∞ out of the diagonal of $S \times S$. We assume Γ is bounded from above and from below by Gaussian kernels modeled on a sub-riemannian distance in $\mathbb{R}^N$. Then, we show that $\mathcal{H}$ endows S with a structure of β-harmonic space. This allows to study the Dirichlet problem for $\mathcal{H}$ with a Perron-Wiener-Brelot-Bauer method, and to obtain pointwise regularity estimates at the boundary in terms of Wiener series constructed with the Guassian kernels. Our study includes the proof of an invariant Harnack-Hadamard-Pini inequality for nonnegative solutions of the relevant equations. we also show a short application of our results to the real hypersurfaces of $\mathbb{C}^{n+1}$ with prescribed Levi curvatures.

1. Introduzione e principali risultati

In queste note presentiamo una serie di risultati ottenuti in collaborazione con Marco Bramanti, Luca Brandolini e Francesco Uguzzoni (si vedano [5],[6],[18]), relativi a una classe di operatori alle derivate parziali lineari del secondo ordine di tipo diffusivo, della forma seguente:

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j=1}^{N} q_{i,j}(z)\partial^2_{x_i,x_j} + \sum_{j=1}^{N} q_j(z)\partial_{x_j} - \partial_t.$$

I coefficienti $q_{i,j} = q_{j,i}, q_j$ sono di classe C^∞ nella striscia

$$S := \{z = (x,t) \ : \ x \in \mathbb{R}^N, \ T_1 < t < T_2\},$$

dove $-\infty \le T_1 < T_2 \le \infty$. La forma carateristica

$$q_{\mathcal{H}}(z,\xi) = \sum_{i,j=1}^{N} q_{i,j}(z)\xi_i\xi_j$$

é definita non-negativa, e non identicamente nulla, in ogni punto $z \in S$. Supponiamo che l'operatore $\mathcal{H}$ sia ipoellittico in S ed abbia una *soluzione fondamentale* Γ verificante le seguenti *stime Gaussiane*

$$\frac{1}{\Lambda} G_{b_0}(z,\zeta) \ \le \ \Gamma(z,\zeta) \le \Lambda\, G_{a_0}(z,\zeta),$$

ove $G_a(z,\zeta) = G_a(x,t;\xi,\tau) = 0$ se $t \le \tau$, e

$$G_a(x,t;\xi,\tau) = \frac{1}{|B(x,\sqrt{t-\tau})|}\exp\big(-a\frac{d^2(x,\xi)}{t}\big)$$

se $t > \tau$. Λ, a_0, b_0 sono costanti positive, d è una *metrica* in $\mathbb{R}^N$ e $|B(x,r)|$ denota la misura di Lebesgue del disco $B(x,r)$ nella metrica d. Sullo spazio metrico $(\mathbb{R}^N, d)$ facciamo le seguenti ipotesi:

- la topologia generata da d coincide con quella Euclidea
- $\mathrm{diam}_d(\mathbb{R}^N) = \infty$
- i dischi di d verificano la proprietá di duplicazione rispetto alla misura di Lebesgue:

$$0 < |B(0,2r)| \le c_d|B(0,r)| \quad \text{per ogni } \ x \in \mathbb{R}^N, \ \text{e } r > 0$$

- $(\mathbb{R}^N, d)$ ha la proprietá del segmento, i.e. per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$ esiste $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$, continua, con $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, e $d(x,y) = d(x,\gamma(t)) + d(\gamma(t), y)$ per ogni $t \in [0,1]$

Nel seguito denoteremo con $|\mathcal{H}|$ la costante

$$|\mathcal{H}| := \Lambda + a_0 + b_0 + c_d$$

Sotto le precedenti ipotesi, abbiamo dimostrato i seguenti risultati

(I) $\mathcal{H}$ induce in S una struttura di spazio β-armonico (nel senso di Constantinescu&Cornea [9]). Di conseguenza, per ogni aperto limitato $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset S$, e per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$, il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \mathcal{H}u = 0 & \text{in} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

ha una soluzione generalizzata $u = H_\varphi^\Omega$ nel senso di Perron-Wiener-Brelot-Bauer (soluzione PWBB).

(II) H_φ^Ω soddisfa la stima al bordo

$$|H_\varphi^\Omega(z) - \varphi(z_0)| \le h(\varphi; z_0, z), \quad z_0 \in \partial\Omega,\ z \in \Omega$$

dove $h(\varphi; z_0, z) \to 0$ per $z \to z_o$, per ogni φ, *se e solo se* z_0 é un punto di frontiera $\mathcal{H}$-*regulare* per Ω.

Abbiamo costruito la funzione $h(\varphi; .)$ usando serie di Γ-*potenziali di tipo Wiener*. Di conseguenza $h(\varphi; .)$ puó essere stimata in termini delle funzioni Gaussiane G_a e di alcune *caratteristiche geometriche* di Ω.

(III) (disuguaglianza di Harnack-Hadamard-Pini invariante) Se $\mathcal{H}u = 0$ e $u \ge 0$ in un aperto contenente $B(x_0, R) \times [t_0 - R^2, t_0]$, dove $(x_0, t_0) =: z_0 \in S$, allora

$$\max_{C_R(z_0)} u \le M\, u(z_0).$$

Qui $C_R(z_0) := \overline{B_d(\xi_0, \gamma R)} \times [\tau_0 - \gamma R^2, \tau_0 - \frac{\gamma}{2} R^2]$

Le costanti $M > 0$ e $0 < \gamma < 1$ sono indipendenti da R e z_0. Esse dipendono *dall'operatore* $\mathcal{H}$ *solo attravero la costante* $|\mathcal{H}|$.

Per chiudere questa Introduzione confrontiamo il nostro risultato in (III) con un teorema ben noto in ambito *Riemanniano.* Sia (M, d) una varietá Riemanniana completa e sia $\mathcal{H}$ il suo operatore del calore, i.e. un operatore *parabolico classico in forma di divergenza.* Saloff-Coste e Grigoryan, partendo da alcune idee di Nash, Krylov e Safonov, e da alcune loro implementazioni operate da Fabes e Strook, hanno dimostrato il risultato seguente:

$$\text{disuguaglianza di Harnack-Hadamard-Pini } d\text{-invariante per } \mathcal{H}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{stime Gaussiane per il nucleo del calore .}$$

(si veda [24] e la bibliografia citata). Il nostro risultato (III) dimostra che anche in ambito *sub-Riemanniano* e per operatori paraboloci *degeneri* in forma di *non divergenza*

$$\text{stime Gaussiane}$$

$$\Downarrow$$

$$\text{disuguaglianza di Harnack-Hadamard-Pini invariante.}$$

Nel paragrafo 3 mostremo che tutti gli operatori di evoluzione a coefficienti regolari, in forma non variazionale, e modellati su *campi vettoriali di Hörmander* hanno una soluzione fondamentale stimata dall'alto e dal basso mediante Guassiane costruite con la metrica di controllo relativa ai campi. Le costanti nelle stime, e nelle stesse Gaussiane, dipendono solo dalle norme Hölderiane dei coefficienti dell'operatore.

2. Una motivazione

Nell'ambito della teoria geometrica delle funzioni di piú variabili complesse, alcuni problemi conducono ad equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, *totalmente non lineari,* le cui linearizzazioni sono di natura non variazionale, e possono essere strutturate su campi vettoriali verificanti condizioni di *rango massimo* di tipo Hörmander. Qui vogliamo richiamare uno di questi problemi, che sorge studiando una nozione di curvatura legata alla forma di Levi.

Sia M una ipersuperficie reale immersa nello spazio Euclideo complesso $\mathbb{C}^{n+1}$. La forma di Levi di M in un punto $p \in M$ è una forma Hermitiana sullo spazio tangente complesso a M in p i cui autovalori $\lambda_1(p), ..., \lambda_n(p)$ possono essere interpretati come una sorta di curvatura nelle direzioni complesse dei corrispondenti autovettori. Data una funzione simmetrica generalizzata s, nel senso di Caffarelli-Nirenberg-Spruck [7], appare naturale definire la s curvatuta di Levi di M in p, nel modo seguente:

$$S_p(M) = s(\lambda_1(p), ..., \lambda_n(p)),$$

si vedano [1], [26], [27],[20]. Quando M è il grafico di una funzione u e si impone che la sua s-curvatura di Levi sia una assegnata funzione, si ottiene una equazione alle derivate parziali del secondo ordine, totalmente non lineare, che puó essere considerata come la controparte pseudoconvessa delle usuali equazioni ellittiche totalmente non lineari di tipo Hessiano studiate, per esempio, in [7]. In forma *linearizzata* le equazioni di questa nuova classe posso essere scritte come segue:

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^{2n} a_{ij} X_i X_j u = K(x, u, Du) \text{ in } \mathbb{R}^{2n+1} \tag{1}$$

dove:

- gli X_j sono operatori differenziali del primo ordine, con coefficienti dipendenti dal gradiente di u, che formano una base reale dello spazio tangente complesso al grafico di u;
- la matrice $\{a_{ij}\}$ dipende dalla funzione s e i suoi elementi dipendono dalle derivate prime e seconde di u;
- K è una funzione assegnata.

L'operatore $\mathcal{L}$ non è ellittico: vive in uno spazio di dimensione $2n + 1$ mentre opera soltanto mediante $2n$ derivate direzionali. Tuttavia, sull'insieme delle funzioni strettamente s-pseudoconvesse, $\mathcal{L}$ diventa *ellittico* lungo le $2n$ direzioni linearmente indipendenti

$X_1, \ldots, X_{2n}$. La direzione mancante si recupera mediante commutazione. Precisamente:

$$\dim\left(\operatorname{span}\left\{X_j, [X_i, X_j], i, j = 1, ..., 2n\right\}\right) = 2n+1$$

in ogni punto. Questa è una condizione di rango massimo di tipo Hörmander, di passo due (si veda [20]).

La versione parabolica di $\mathcal{L}$, i.e. l' operatore

$$\mathcal{L} - \partial_t, \quad t \in \mathbb{R}, \;\; x \in \mathbb{R}^{2n+1} \tag{2}$$

si presenta nello studio del moto per s -curvatura di Levi di una ipersuperficie reale di $\mathbb{C}^{n+1}$, si vedano [13], [19].

Lo studio del contesto lineare nel quale si collocano le equazioni di curvatura di Levi, e le loro controparti paraboliche, è uno dei principali scopi del nostro lavoro.

Una semplice conseguenza della nostra disuguaglianza di Harnack, applicata alle soluzioni stazionarie di $\mathcal{H}u = 0$, è la seguente:
sia u una soluzione regolare e strettamente s-pseudoconessa dell'equazione di Levi $\mathcal{L}u = K$ con K di classe C^∞. Allora u soddisfa una disuguglianza di Harnack del tipo seguente:

$$\sup_{B_r} u \leq C \inf_{B_r} u$$

dove B_r è il disco nella metrica di Carnot-Carathéodory relativa ai campi vettoriali $X_1, X_2, ..., X_{2n}$.

Ciò che riduce la portata di questa disuguaglianza è la dipendenza della costante C dalla soluzione u in un modo per noi ancora non chiaro. La possibilitá di eliminare questa dipendenza è un problema aperto, di grande interesse, che tuttavia sembra presentare difficoltá molto elevate.

3. Operatori di evoluzione di tipo Hörmander in forma non variazionale

I nostri principali esempi di operatori di diffusione verificanti le ipotesi fissate nell' Introduzione, sono ispirati dagli argomenti presentati nel precedente paragrafo. Questi operatori hanno la forma seguente:

$$\mathcal{H} = \mathcal{L} - \partial_t = \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z) X_i X_j + \sum_{k=1}^{q} a_k(z) X_k - \partial_t$$

dove:

- $X_1, X_2, \ldots, X_q$ sono campi vettoriali con coefficienti regolari, definiti in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, e verificanti la condizione di Hörmander.

$$\text{rango Lie}\{X_i, i = 1, 2, ..., q\} = n \ \text{ in ogni punto } \Omega.$$

- $A(z) = (a_{ij}(z))_{i,j=1}^{q}$ è una matrice simmetrica tale che

$$\frac{1}{\lambda}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\xi_i\xi_j \leq \lambda|\xi|^2$$

per ogni $z = (x, t) \in S$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_q) \in \mathbb{R}^q$

L'operatore $\mathcal{H}$ è ipoellittico in Ω grazie al Teorema di H¨ormander in [12]. Una distanza naturale per l'operatore $\mathcal{H}$ è quella di *Carnot-Carathéodory* generata dai campi vettoriali $X_1, X_2, \ldots, X_q$. Questa distanza è ben definita poichè il sistema $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_q\}$ verifica la condizione di rango massimo di Hörmander.

Nel lavoro [6] abbiamo dimostrato che X si puo' prolungare ad un sistema di campi vettoriali di Hörmander defniti su tutto $\mathbb{R}^N$, in modo tale che la distanza di Carnot-Carathéodory ad essi associata soddisfi tutte le ipotesi fissate dell'Introduzione.

Abbiamo anche esteso l'operatore $\mathcal{H}$ all'intero $\mathbb{R}^{N+1}$ in modo tale che al di fuori di un insieme compatto nelle variabili spaziali, esso diventi il classico operatore del calore.

Denotando ancora con $\mathcal{H}$ l'operatore prolungato, nell'ipotesi $a_{i,j}, a_j \in C^\infty$, abbiamo dimostrato che $\mathcal{H}$ ha una soluzione fondamenale gloabale Γ tale che

$$\frac{1}{\Lambda} G_{b_0}(z, \zeta) \ \leq \ \Gamma(z, \zeta) \leq \Lambda\, G_{a_0}(z, \zeta)$$

e, per ogni $\alpha = (\alpha_i, \alpha_j.\alpha_k)$ con $|\alpha| \leq 2$,

$$|D^\alpha \Gamma(z, \zeta)| \ \leq \ \Lambda|t - \tau|^{-\frac{|\alpha|}{2}} G_{a_0}(z, \zeta).$$

Qui abbiamo usato la notazione $D^\alpha := X_i^{\alpha_i} X_j^{\alpha_j} \partial_t^{\alpha_k}$ e $|\alpha| := \alpha_i + \alpha_j + 2\alpha_k$.

In queste disuguaglianze,Λ, a_0, b_0 sono costanti strutturali positive: esse dipendono solo da

- la costante di duplicazione di d
- la cosatne λ in
$$\frac{1}{\lambda}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)\xi_i\xi_j \leq \lambda|\xi|^2$$
- la norma d-Hölderiana dei coefficienti $a_{i,j}$ e a_j.

Di conseguenza: *tutti i nostri risultati si estendono agli operatori*

$$\mathcal{H} := \mathcal{L} - \partial_t := \sum_{i,j=1}^{q} a_{ij}(z)X_iX_j + \sum_{k=1}^{q} a_k(z)X_k - \partial_t$$

con coefficienti d-Hölder continui $a_{i,j}$ e a_j.

La tecnica che abbiamo usato in questa parte del nostro lavoro, è basata su un adattamento del classico metodo della parametrice di Levi al presente contesto sub-Riemanniano, analogo a quello giá seguito in [2]. Per questo ci siamo serviti di una grande quantitá di idee, tecniche e risultati dovuti a Rotschild&Stein [23], Jerison&Sanchez-Calle [14], Fefferman&Sanchez-Calle [11], Kusuoka&Stroock [15], [16], [17].

4. Operatori di diffusione in forma generale

Consideriamo l'operatore

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j=1}^{N} q_{i,j}(z)\partial^2_{x_i,x_j} + \sum_{j=1}^{N} q_j(z)\partial_{x_j} - \partial_t$$

nella striscia $S = \mathbb{R}^N \times]T_1, T_2[, \ \ -\infty \leq T_1 < T_2 \leq \infty$.

Insieme con la regolaritá dei coefficienti e con la ipoellitticitá di $\mathcal{H}$, assumiamo l'esistenza di stime Gaussiane per Γ - la soluzione fondamentale di $\mathcal{H}$-, l'equivalenza fra la topologia di d e quella Euclidea, la proprieta' di duplicazione e la proprietá del segmento della distanza d, come affermato nella Introduzione. Tutti i risultati che presenteremo in questo paragrafo sono stati dimostrati in [18]. Una prima semplice osservazione è la seguente: l'applicazione

$$\Omega \longrightarrow \mathcal{H}(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \ : \ \mathcal{H}u = 0\}$$

è un fascio lineare di funzioni su S. Conveniamo di chiamare $\mathcal{H}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $\mathcal{H}$-armoniche in Ω. Abbiamo anzitutto dimostrato che $(S, \mathcal{H})$ é uno spazio β-armonico. Precisamente:

- Esiste una funzione strettamente positiva e $\mathcal{H}$-armonica su ogni striscia $\mathbb{R}^N \times]T, T_2[$, $T_1 < T < T_2$. Questa funzione data da

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}}^{N} \Gamma(x,t;\xi,T) d\xi,$$

- Esiste una famiglia di aperti limitati $\{V\}$, che forma una base della topologia Euclidea di S, tale che il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \mathcal{H}u = 0 \quad \text{in} \quad V \\ u|_{\partial V} = \varphi \end{cases}$$

  ha una soluzione classica per ogni $\varphi \in C(\partial V)$. Questo si dimostra con un argomento dovuto Bony e che utilizza la non totale degenerazione di $q_{\mathcal{H}}$, la forma caratteristica di $\mathcal{H}$ [4].
- $\{\Gamma(.,\zeta) : \zeta \in S\}$ è una famiglia di funzioni $\mathcal{H}$-superarmoniche che separa i punti di S.
- (proprietá di convergenza di Doob)
  $\mathcal{H}(\Omega) \ni u_n \nearrow u, \quad u < \infty$ in un sottoinsieme denso di Ω

$$\Downarrow$$

$$u \in \mathcal{H}(\Omega)$$

  Questo segue dalla ipoellitticitá di $\mathcal{H}$, con un procedimento ancora dovuto a Bony [4].

Queste premesse consentono di utilizzare risultati generali della Teoria Astratta del potenziale, [9], per concludere che

$$H_\varphi^\Omega := \inf\{u \ : u \text{ è } \mathcal{H} - \text{superarmonica in } \Omega, \liminf u \geq \varphi \text{ on } \partial\Omega\}$$

è $\mathcal{H}$-armonica in Ω, per ogni insieme aperto limitato $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset S$, e per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$. H_φ^Ω è la PWBB-soluzione generalizzata del problema

$$\begin{cases} \mathcal{H}u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

Usando varie tecniche e risultati della teoria del balayage in spazi Armonici astratti, abbiamo anche analizzato il comportamento di H_φ^Ω in ogni punto di $\partial\Omega$. Infatti, abbiamo dimostrato che

$$|H_\varphi^\Omega(z) - \varphi(z_0)| \le h(\varphi; z_0, z), \quad z_0 \in \partial\Omega, \ z \in \Omega.$$

Abiamo costruito la funzione $h(\varphi; .)$ usando *serie di tipo Wiener* di Γ *potenziali.* Di conseguenza, $h(\varphi; .)$ si puó stimare in termini delle funzioni Gaussiane G_a, e di alcune *proprietà geometriche* dell'aperto Ω. In particolare, risulta $h(\varphi; z_0, z) \to 0$ per $z \to z_o$, per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$, *se e solo se* z_0 è un punto di frontiera $\mathcal{H}$- *regulare* per Ω.

Come ci si puó aspettare la funzione $h(\varphi; .)$ assume forme piú semplici quando Ω è un dominio cilindrico. Per esempio, si consideri un insieme aperto $\Omega = D \times]a, b[$, ove $D \subset \mathbb{R}^N$ e $T_1 < a < b < T_2$. Supponiamo che, per un opportuno $\theta \in]0, 1[$ e per ogni r sufficientemente piccolo,

$$|B(x_0, r) \setminus D| \ge \theta |B(x_0, r)|, \quad x_0 \in \partial D.$$

Allora, per ogni $t_0 \in]a, b[$, il punto $z_0 = (x_0, t_0)$ è $\mathcal{H}$-regulare per il problema di Dirichlet. Inoltre, se la funzione φ è d-Hölder continua nel punto $z_0 = (x_0, t_0)$, esiste $\gamma \in]0, 1[$ tale che

$$|H_\varphi^\Omega(z) - \varphi(z_0)| \le C_\varphi((d(x_0, x))^4 + (t - t_0)^2)^{\frac{\gamma}{4}}.$$

Questo particolare risultato di regolarità alla frontiera è stato di cruciale importanza nella nostra dimostrazione della disuguaglianza di Harnack-Hadamard-Pini per le soluzioni non negative di $\mathcal{H}u = 0$. Qui, come in [3], noi abbiamo adattato al nostro contesto l'implementazione di Fabes&Strook [10] della idea originaria di Nash [22]. La principale difficoltá che abbiamo incontrato è stata la costruzione, e le stime dall'alto e dal basso, della funzione di Green per i domini cilindrici del tipo $C(z_0, r) := B(x_0, r) \times]t_0 - r^2, t_0 + r^2[$.

La difficoltá è dovuta al fatto che, in generale, la *frontiera parabolica* di questi domini non è $\mathcal{H}$-regulare per il problemadi Dirichlet.

Abbiamo superato questa difficoltá costruendo, fissato ad arbitrio $\delta\ \in]0,1[$, un domino $A(x_0, r)$ tale che

- $B(x_0, \delta r) \subset A(x_0, r) \subset B(x_0, r)$,
- $|B(y,r) \setminus A(y,r)| \geq \theta |B(x_0, r)|, \quad \text{per ogni } \ y \in \partial A(x_0, r), \quad \text{per un opportuno } \theta \in]0,1[$

Il precedente risultato di regolarità al bordo per domini cilindrici,assicura che la frontiera parabolicaa del cilindro

$$\mathbf{C}(z_0, r) = A(x_0, r) \times]t_0 - r^2, t_0 + r^2[$$

è $\mathcal{H}$-regulare per il problema di Dirichlet. Di conseguenza, la funzione di Green di tale dominio esiste e verifica adeguate stime Gaussiane dall'alto e dal basso. In questa parte del lavoro la *proprietá del segmento* della metrica d ha svolto un ruolo essenziale. Vogliamo concludere questo paragrafo osservando che quando i coefficienti di $\mathcal{H}$ sono indipendenti da t , i.e.

$$\mathcal{H} = \sum_{i,j=1}^{N} q_{i,j}(x) \partial^2_{x_i, x_j} + \sum_{j=1}^{N} q_j(x) \partial_{x_j} - \partial_t =: \mathcal{L} - \partial_t$$

allora ogni soluzione di $\mathcal{L}u = 0$ risolve anche $\mathcal{H}u = 0$. Di conseguenza, la nostra disuguaglianza di Harnack si estende immediatamente a $\mathcal{L}$. Precisamente, sia

$$\mathcal{L}u = 0, u \geq 0 \ \text{ in un insieme aperto } \ D \subset \mathbb{R}^N, \ \text{ tale che } \ B(x_0, 2r) \subset D$$

Allora

$$\max_{B(x_0,r)} u \leq M \inf_{B(x_0,r)} u(x_0),$$

dove $M > 0$ dipende solo dalle costanti strutturali.

5. Una applicazione : grafici con uguali curvature di Levi

(1) Siano $u, \ v : D \to \mathbb{R}$ due funzioni regolari, ove

D è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Se

- $u \leq v \quad$ in $\quad D$,
- u e v sono s-strettamente pseudoconvesse,
- i grafici di u e v hanno la stessa s-curvatura di Levi,

allora $w := v - u \geq 0$ e soddisfa

$$\mathcal{L}w \equiv \sum_{i,j=1}^{2n} b_{ij} X_i X_j w = 0 \text{ in } D$$

I campi vettoriali X_j hanno la forma $X_j \partial_{x_j} + a_j(\nabla u)\partial_{x_{2n+1}}$, e soddisfano la condizione del rango

$$\dim(\mathrm{span}(\{X_j, [X_i, X_j] : i, j = 1, \dots, 2n+1\})) = 2n+1$$

in ogni punto di D [20]. Allora, se $B(x_0, 2r) \subset D$,

$$\max_{B(x_0,r)} w \leq M \inf_{B(x_0,r)} w(x_0).$$

dove $B(x_0, r)$ è la distanza di Carnot-Carathéodory relativa ai campi X_j.

In particolare, se $u(x_0) = v(x_0)$ in un punto $x_0 \in D$ e D è connesso, allora

$$u \equiv v \text{ in } \Omega$$

Quest'ultimo risultato è apparso dapprima in [20], ove è stato dimostrato utilizzando un principio di confronto forte per le equazioni di curvatura di Levi. Una versione ancora precedente, per l'equazione della curvatura media di Levi, è contenuta in [8].

6. Principio del massimo

Teorema 6.1.

(3)

Dimostrazione. Prova dell'equazione (3) del Teorema 6.1 □

Lemma 6.1.

(4)

Lemma 6.2.

(5)

Proposizione 6.1.

(6)

Riferimenti bibliografici

[1] E. Bedford, B. Gaveau: Hypersurfaces with bounded Levi form. Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), no. 5, 867–873.

[2] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Fundamental solutions for non-divergence form operators on stratified groups. Trans. Amer. Math. Soc. 356 (2004), no. 7, 2709-2737

[3] A. Bonfiglioli, F. Uguzzoni: Harnack inequality for non-divergence form operators on stratified groups, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[4] J.-M. Bony: Principe du maximum, inégalite de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 19 1969 fasc. 1, 277-304 xii.

[5] M. Bramanti, L. Brandolini, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Heat kernels for non-divergence operators of Hörmander type. C.R. Acad. Sci. Paris, Mathematique, 343(2006) 463-466.

[6] M. Bramanti, L. Brandolini, E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Non-divergence equations structured on Hörmander vector fields: heat kernels and Harnack inequalities, preprint.

[7] L. Caffarelli, L. Nirenberg, J. Spruck: The Dirichlet problem for nonlinear second-order elliptic equations. III. Functions of the eigenvalues of the Hessian. Acta Math. 155 (1985), no. 3-4, 261–301.

[8] G.Citti, A comparison Theorem for the Levi Equation, Rend Mat.Accad. Lincei, 4 (1993), 207-212.

[9] C.Constantinescu, A. Cornea: Potential Theory on Harmonic Spaces, Springer-Verlag, Berlin, (1972)

[10] E. B. Fabes, D. W. Stroock, A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality using the old ideas of Nash, Arch. Rational Mech. Anal. **96** (1986), 327–338.

[11] C. Fefferman, A. Sánchez-Calle: Fundamental solutions for second order subelliptic operators. Ann. of Math. (2) 124 (1986), no. 2, 247-272.

[12] L. Hörmander: Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math. 119 (1967) 147–171.

[13] G. Huisken, W. Klingenberg: Flow of real hypersurfaces by the trace of the Levi form. Math. Res. Lett. 6 (1999), no. 5-6, 645–661.

[14] D. S. Jerison, A. Sánchez-Calle: Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields. Indiana Univ. Math. J. 35 (1986), no. 4, 835-854.

[15] S. Kusuoka, D. Stroock: Applications of the Malliavin calculus. II. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 32 (1985), no. 1, 1–76.

[16] S. Kusuoka, D. Stroock: Applications of the Malliavin calculus. III. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 34 (1987), no. 2, 391-442.

[17] S. Kusuoka, D. Stroock: Long time estimates for the heat kernel associated with a uniformly subelliptic symmetric second order operator. Ann. of Math. (2) 127 (1988), no. 1, 165-189.

[18] E. Lanconelli, F. Uguzzoni: Potential Analysis for a Class of Diffusion Equations: a Gaussian Bounds Approach, Preprint.

[19] A. Montanari: Real hypersurfaces evolving by Levi curvature: smooth regularity of solutions to the parabolic Levi equation. Comm. Partial Differential Equations 26 (2001), no. 9-10, 1633–1664.

[20] A. Montanari, E. Lanconelli: Pseudoconvex fully nonlinear partial differential operators: strong comparison theorems. J. Differential Equations 202 (2004), no. 2, 306–331.

[21] A. Nagel, E. M. Stein, S. Wainger: Balls and metrics defined by vector fields I: Basic properties. Acta Mathematica, 155 (1985), 130-147.

[22] J. Nash: Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Amer. J. Math. 80 (1958) 931–954.

[23] L. P. Rothschild, E. M. Stein: Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math., 137 (1976), 247-320.

[24] L. Saloff-Coste, Aspects of Sobolev-type inequalities. London Mathematical Society Lecture Note Series, 289. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[25] A. Sanchez-Calle: Fundamental solutions and geometry of sum of squares of vector fields. Inv. Math., 78 (1984), 143-160.

[26] Z. Slodkowski, G. Tomassini: Weak solutions for the Levi equation and envelope of holomorphy. J. Funct. Anal. 101 (1991), no. 2, 392–407.

[27] G. Tomassini: Geometric properties of solutions of the Levi-equation. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 152 (1988), 331–344.