Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2006-07

Angelo Cavallucci

Regolarita' delle soluzioni per un problema di calcolo delle variazioni

5 giugno 2007

Abstract

We expose some recent results concerning the Lipschitz regularity of the minimizers for the problem (P), which is discussed in the next section.

1. Introduzione

Consideriamo il problema

$$(P) \qquad \begin{cases} \int_\Omega [F(Du(x)) + G(x,u(x))]\,dx \to \min \\ u \in U, \quad u|_{\partial\Omega} = \phi. \end{cases}$$

ove Ω e' un aperto limitato in R^n, U e' un sottoinsieme di $W^{1,1}(\Omega)$ e $u|_{\partial\Omega}$ rappresenta la traccia di u su $\partial\Omega$.

Ci proponiamo di esporre alcuni risultati di regolarita' di tipo Lipschitz per le soluzioni del problema (P) ottenuti da Clarke [4] e da Bousquet e Clarke [2], [3].

Introduciamo alcune condizioni sui dati del problema che sarano usate in seguito.

$(H\Omega)$ Ω e' aperto limitato convesso in R^n.

Da $(H\Omega)$ segue [5] che $\partial\Omega$ e' localmente lischitziana e quindi per $u \in W^{1,1}(\Omega)$ e' ben definita la traccia $u|_{\partial\Omega} \in L^1(\partial\Omega)$.

$(HF)_\mu$ Dato $\mu \geq 0$, si ha per la funzione

$$F : R^n \to R$$

$$\theta F(p) + (1-\theta)F(q) - F(\theta p + (1-\theta q)) > \frac{\mu}{2}\theta(1-\theta)|p-q|^2 \text{per } 0 < \theta < 1,\ p \neq q \text{ in } R^n.$$

Se $\mu > 0$ e F e' di classe $C^2(R^N)$, la condizione precedente e' equivalente alla seguente

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 F(x)}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j \geq \mu |z|^2 \text{ per ogni } x,\ z.$$

Dalla convessita' di F segue che e' ben definito $\int_\Omega [F(Du(x)) + G(x,u(x))]\,dx \in]-\infty, +\infty]$ per ogni $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

(HG) La funzione

$$\Omega \times R^n \ni (x,u) \to G(x,u) \in R$$

e' $x-$misurabile per ogni u, e' $u-$differenziabile per quasi ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$ esiste la costante $L = L_r$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ si ha

$$|G(x,u) - G(x,u')| \leq L|u-u'| \text{ per } |u|,\ |u'| \ \leq r;$$

inoltre esiste $b(.) \in L^\infty(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega |G(x,b(x))|\,dx < \infty.$$

Dalle condizioni $(H\Omega)$, $(HF)_\mu$ con $\mu > 0$, (HG) segue che nel problema (P) e' lecito prendere $u \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty$ e $\phi \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Consideriamo infine le seguenti condizioni sulla funzione

$$\phi : \partial(\Omega) \to R$$

$(BSC)_K$ (*Bounded Slope Condition*). Dato $K \geq 0$, per ogni $z \in \partial\Omega$ esistono $a_z^\pm \in R^n$ tali che

$$< a_z^-, z' - z > \leq \phi(z') - \phi(z) \leq < a_z^+, z' - z >, \quad \forall z' \in \partial\Omega,$$

$$|a_z^\pm| \leq K.$$

Se ϕ non e' una funzione affine, da questa condizione segue che Ω deve essere convesso(cfr. per esempio [8]).

D'altra parte, se Ω e' *uniformemente convesso*, ossia esistono $\delta > 0$ e $b_z \in R^n$ per ogni $z \in \partial\Omega$ tali che

$$< b_z, z' - z > \geq \delta |z' - z|^2, \quad \forall z' \in \partial\Omega,$$

allora ogni funzione $\phi \in C^{1,1}(\Omega)$ verifica la condizione $(BSC)_K$ per qualche $K > 0$ (cfr. [1], [14], [9]).

$(LBSC)_K$ (*Lower Bounded Slope Condition*). Dato $K \geq 0$, per ogni $z \in \partial\Omega$ esiste $a_z \in R^n$ tale che

$$< a_z, z' - z > \leq \phi(z') - \phi(z), \quad \forall z' \in \partial\Omega,$$

$$|a_z| \leq K.$$

Da ciascuna delle due condizioni segue $\phi \in Lip_K(\partial\Omega)$, ossia

$$|\phi(z') - \phi(z)| \leq K|z - z'|, \quad \forall z,\, z' \in \partial\Omega.$$

Piu' precisamente si ha la seguente

Proposizione 1.1. *Sono equivalenti le affermazioni*

a) ϕ *verifica* $(LBSC)_K$ *;*

b) esiste $f \in Lip_K(R^n)$, f *convessa, tale che*

$$\phi(z) = f(z), \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [1], [4]

2. Risultati

La condizione $(BSC)_K$ e' classica per la trattazione del problema (P) (cfr. [6], [13], [14], [15], [8] ove si trovano anche notizie storiche) e risale ad HILBERT, con una formulazione equivalente.

Fra i risultati piu' recenti relativi alla condizione $(BSC)_K$ per il problema (P) con $G \equiv 0$ si trova il seguente

Teorema 2.1. *Supponiamo verificate le condizioni* $(H\Omega)$, $(HF)_0$, $G \equiv 0$, *e supponiamo che* ϕ *verifichi la condizione* $(BSC)_K$ *per un* $K > 0$. *Allora*

i) esiste il minimo per (P) *con* $U = Lip(\Omega)$, *assunto in* $u \in Lip(\Omega)$*;*

ii) tale u *e' anche l'unica soluzione per* (P) *con* $U = W^{1,p}(\Omega)$, *per* $1 \leq p \leq \infty$.

Per la dimostrazione di questo risultato e di altri risultati piu' generali rimandiamo a [13].

La condizione $(LBSC)_K$ e' stata introdotta in [4] da Clarke ed e' stata utilizzata nel seguente

Teorema 2.2. *Supponiamo verificate le condizioni* $(H\Omega)$, $(HF)_0$, $G \equiv 0$, *supponiamo che* ϕ *verifichi la condizione* $(LBSC)_K$ *e che* u *sia soluzione per* (P) *con* $U = W^{1,1}(\Omega)$. *Allora* $u \in L^\infty(\Omega)$, u *e' (uguale quasi dappertutto su* Ω *a una funzione) continua su* Ω *e e verifica le condizioni*

$$u(x) \geq \phi(y) - K|x-y| \ \textit{per} \ x \in \Omega, \ y \in \partial\Omega,$$

$$u(x) - u(y) \leq K_1 \frac{|x-y|}{d_\Gamma(x|y)} \ \textit{per} \ x, \ y \in \Omega, \ x \neq y,$$

ove $K_1 = 2||\phi, L^\infty(\Gamma)|| + K diam(\Omega)$, $\Gamma = \partial\Omega$,

$$d_\Gamma(x|y) = dist(x, \{x + t(y-x))|t > 0\} \cap \Gamma).$$

La funzione u *e' continua su* $\bar{\Omega}$ *se si aggiunge alle precedenti* _una_ *delle condizioni seguenti*

a) $\partial\Omega$ *e' un poliedro;*

b) Ω *e' uniformemente convesso;*

c) $\partial\Omega$ *e' di classe* $C^{1,1}$ *ed esistono le costanti* $s > \frac{n+1}{2}$, $a > 0$, $b \in R$ *tali che*

$$F(p) \geq a|p|^s + b, \quad \forall p \in R^n$$

e in questo caso u e' anche hölderiana su $\bar{\Omega}$*.*

Nella dimostrazione in [4] della condizione di Lipschitz locale vengono utilizzati risultati e metodi di [12], in particolare la seguente

Proposizione 2.1. *Supponiamo verificate le condizioni* $(H\Omega)$, $(HF)_0$, $G \equiv 0$*, supponiamo che* v *e* w *siano soluzioni per il problema* (P) *con* $U = W^{1,1}$ *e con (*H^α *= misura di Hausdorff)*

$$v|_{\partial\Omega} \leq w|_{\partial\Omega} \quad H^{n-1} \ q.d. \ su \ \partial\Omega$$

Allora si ha

$$v \leq w \quad H^n \ q.d. \ su \ \Omega.$$

La novita' sostanziale in [4] consiste nel fatto che al ″metodo delle traslazioni″ utilizzato in [12] viene sostituito il ″metodo delle dilatazioni″, che consiste in questo:

si fissano $z \in \Omega,\ 0 < \lambda < 1$ e si pone

$$\Omega_\lambda = z + \lambda(\Omega - z),$$

$$u_\lambda(x) = \lambda u(z + \frac{1}{\lambda}(x - z)), \quad x \in \Omega_\lambda,$$

e poi si cofrontano, utilizzando la Proposizione 2.1, le funzioni u e u_λ prima su $\partial\Omega_\lambda$ e poi su Ω_λ e si ottiene infine per ogni coppia di punti x, $y \in \Omega$, $x \neq y$, punti di Lebesgue per la funzione u,

$$u(x) - u(y) \leq K_1 \frac{|x - y|}{d_\Gamma(x|y)},$$

ove $K_1 > K$ e' una costante opportuna.

Metodi analoghi vengono utilizzati anche per ottenere in [2] la seguente generalizzazione di un classico risultato di Stampacchia [15]

Teorema 2.3. *Supponiamo verificate le condizioni* $(H\Omega)$, $(HF)_\mu$*, con* $\mu > 0$*,* (HG)*, supponiamo che* ϕ *verifichi la condizione* $(LBSC)_K$ *e che* u *sia soluzione per* (P) *con* $U = W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$*. Allora si ha* $u \in Lip_{loc}(\Omega)$*.*

Per la dimostrazione in [2], prima si utilizza la condizione $(LBSC)_K$ per costruire le funzioni (per una certa costante $K_2 > K$)

$$\partial\Omega \ni y \to w_y \in Lip_{K_2}(R^n)$$

tali che

$$w_y(y) = \phi(y) \quad \text{ per } y \in \partial\Omega,$$

$$w_y(x) \le u(x) \quad \text{ q.d. su } \Omega,$$

poi si prova successivamente

$$u_\lambda \le u \quad \text{ q.d. su } \partial\Omega_\lambda,$$

$$u_\lambda \le u \quad \text{ q.d. su } \Omega_\lambda,$$

$$u(x) \le u(y) + K_3 \frac{|x-y|}{d_\Gamma(x|y)}$$

per $x \neq y$ punti di Lebesgue per u in Ω e con K_3 costante opportuna.

In [2] viene considerata anche la seguente condizione su G

(HG') La funzione G e' misurabile su $\Omega \times R^n$ e

$$G(x,v) \ge -q|v|^2 - Q(x)|v|^\delta - R(x),$$

ove

$$R(\cdot) \in L^1(\Omega), \quad 0 < \delta < 2, \quad Q(\cdot) \in L^t(\Omega),$$

con

$$\frac{1}{t} = 1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{n}, \quad q < \frac{\Lambda\mu}{2},$$

$$\Lambda = \inf_{u \in W_0^{1,2}} \frac{||Du, L^2(\Omega)||^2}{||u, L^2(\Omega)||^2};$$

inoltre esiste $M > 0$ tale che per quasi ogni $x \in \Omega$ e ogni $u, u' \in R^n$

$$|G(x,u) - G(x,u')| \le M|u-u'|(1 + |u|^\beta + |u'|^\beta),$$

con $0 \le \beta < \frac{n+2}{n-2}$ se $n \ge 3$, $0 \le \beta$ se $n = 2$;

infine esiste $\bar{u} \in W^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega [F(D\bar{u}(x)) + G(x,\bar{u}(x))]\,dx < \infty,$$

$$\bar{u}|_{\partial\Omega} = \phi.$$

In [2] si prova anche il seguente

Teorema 2.4. *Se valgono le condizioni* $(H\Omega)$, $(HF)_\mu$ *con* $\mu > 0$, (HG') *e se* ϕ *verifica la condizione* $(LBSC)_K$ *, allora esistono soluzioni per il problema* (P) *con* $U = W^{1,2}(\Omega)$. *Ogni soluzione* u *appartiene a* $L^\infty(\Omega)$ *e risolve il problema* (P) *anche con* $U = W^{1,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. *Inoltre* $u \in Lip_{loc}(\Omega)$.

In [2] si trovano anche risultati di regolarita' su tutto $\bar{\Omega}$ analoghi a quelli indicati nel Teorema 2.2.

Tutti i risultati precedenti continuano a valere se si sostituisce la condizione $(LBSC)_K$ con la seguente

$(UBSC)_K$ (*Upper Bounded Slope Condition*). Dato $K \geq 0$, per ogni $z \in \partial\Omega$ esiste $a_z \in R^n$ tale che

$$< a_z, z' - z > \geq \phi(z') - \phi(z), \quad \forall z' \in \partial\Omega$$

$$|a_z| \leq K.$$

In [4] e' indicato un esempio in cui si ha per il problema (P)

$G = 0,\ F(p) = |p|^2,\ n = 2$;

$\Omega = \{x \in R^2 | |x| < 1\}$;

u risolve (P) con $U = W^{1,1} \cap L^\infty$;

u e' hölderiana su $\bar{\Omega}$, ma non lipschitziana;

u e' armonica e quindi appartiene a $Lip_{loc}(\Omega)$;

vale la condizione $(LBSC)_K$, ma non la condizione $(BSC)_K$.

Riferimenti bibliografici

[1] P. Bousquet. *The lower bounded slope condition.* J. Convex Anal., **14**(2007) 119-136.

[2] P. Bousquet, F. Clarke. *Local Lipschitz continuity of solutions to a problem in the calculus of variations.* Submitted for publication.

[3] P. Bousquet. F. Clarke. *Continuitè lipschitzienne des solutions d'un probleme en calcul des variations.* C.R.Acad.Sci.Paris, Ser.I **343** (2006) 225-228.

[4] A. Cellina. *On the bounded slope condition and the validity of the Euler-Lagrange equation.* SIAM J. Control Optim., **40**(2001/02) 1270-1279.

[5] F. Clarke. *Continuity of solutions to a basic problem in the calculus of variations.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), **4**(2005)(3) 511-530.

[6] F. Clarke. Optimization and Nonsmooth Optimization, Wiley Interscience, New York (1983).

[7] L. Evans, R. Gariepy. Direct Methods in the Calculus of Variations, Stud. Adv. Math., Boca Raton: CRC Press (1992).

[8] E. Giusti. Elliptic partial differential equations of second order, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ (2003).

[9] P. Hartman. *On the bounded slope condition.* Pacific J. Math., **18**(1966) 495-511.

[10] P. Hartman. *Convex sets and the bounded slope condition.* Pacific J. Math., **25**(1968) 511-522

[11] P. Hartman, G. Stampacchia. *On some non-linear elliptic differential-functional equations.* Acta Math., **115**(1966) 271-310.

[12] C. Mariconda, G. Treu. *Gradient maximum principle for minima* . J. Optim. Theory Appl., **112**(2002)(1) 166-186.

[13] C. Mariconda, G. Treu. *Existence and Lipschitz regularity for minima* . Proc. Amer. Math. Soc., **130**(2002)(2) 395-249.

[14] M. Miranda. *Un teorema di esistenza e unicita' per il problema dell'area minima in n variabili.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (3), **19**(1965) 233-530.

[15] G. Stampacchia. *On some regular multiple integral problems in the calculus of variations.* Comm. Pure Appl, Math., **16**(1963) 383-421.