

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico 2005-06

Fabio Ancona

PROBLEMI DI STABILIZZAZIONE CON FEEDBACK
DISCONTINUI PER SISTEMI DI CONTROLLO

1 giugno 2006

ABSTRACT

The note is concerned with “patchy vector fields”, a class of discontinuous, piecewise smooth vector fields that were introduced to study feedback stabilization problems. Such vector fields result to be quite appropriate also for addressing the problem of constructing nearly-optimal feedbacks for general optimization problems. Definitions and basic properties of patchy vector fields are illustrated, together with application to control problems.

1. INTRODUZIONE

La costruzione di feedback discontinui per sistemi di controllo non lineari è stata al centro di un vasto programma di ricerca negli ultimi anni. Infatti, la presenza di certe ostruzioni topologiche può impedire l'esistenza di feedback continui stabilizzanti anche nel caso di sistemi di controllo globalmente asintoticamente controllabili. Questo fenomeno è stato fatto notare per la prima volta da Sussmann [19] per sistemi planari, e da Sontag e Sussmann [18] per sistemi unidimensionali, e successivamente è stato ulteriormente analizzato da Brockett [5] e Coron [8] per sistemi generali non lineari. Sfortunatamente, la presenza di feedback non regolari immediatamente determina una fondamentale difficoltà tecnica in quanto si è costretti ad analizzare la stabilità di E.D.O. discontinue che potrebbero non possedere nessuna soluzione (nel senso classico alla Carathéodory).

Per superare questa difficoltà sono state proposte in [7, 14, 16] delle definizioni opportune di “soluzioni generalizzate” (soluzioni a campionamento e soluzioni alla Eulero) originate dalla teoria dei giochi differenziali [10]. Nei lavori citati si mostra che ogni sistema asintoticamente controllabile può essere stabilizzato rispetto a tali soluzioni per mezzo di feedback costruiti con tecniche alla Lyapunov che fanno uso di funzioni non regolari di Lyapunov.

Una strategia alternativa è stata seguita in [1] dove abbiamo introdotto una particolare classe di campi vettoriali discontinui, regolari a pezzi (i campi vettoriali “patchy”), che ammettono sempre soluzioni alla Carathéodory. Si è mostrato che, incollando assieme controlli “open loop” di un sistema di controllo asintoticamente controllabile si può sempre costruire un feedback stabilizzante che dà luogo ad un campo vettoriale discontinuo appartenente a tale classe di campi “patchy”. In particolare, si può sviluppare la teoria concernente il problema della stabilizzazione studiando le corrispondenti E.D.O. discontinue all'interno dell'ambito classico delle soluzioni alla Carathéodory.

In questa nota si vogliono illustrare alcuni di questi concetti ed in particolare si vogliono discutere le proprietà di robustezza di un feedback discontinuo, le quali sono fondamentali in molte applicazioni poichè una delle ragioni principali per l'uso di un feedback è precisamente il fatto che i controlli “open loop” risultano essere particolarmente sensibili

alle perturbazioni.

I feedback costruiti in [7, 14, 16] sono robusti rispetto a perturbazioni della dinamica esterna, mentre potrebbero essere molto sensibili ad errori nella misura della variabile di stato. Al contrario, abbiamo mostrato in [2] che un feedback “patchy” risulta avere una robustezza piena anche rispetto a perturbazioni della dinamica interna che abbiano una variazione totale sufficientemente piccola in modo da evitare eventuali fenomeni di oscillazione infinita nelle vicinanze delle discontinuità. Questo risultato si ottiene mostrando la stabilità dell’insieme delle traiettorie di un campo vettoriale patchy rispetto ad una vasta classe di perturbazioni impulsive. Per una classe generica di campi patchy poligonali nel piano, si è anche mostrato che la distanza tra una traiettoria del sistema di controllo perturbato ed una di quello non perturbato è dello stesso ordine di grandezza della perturbazione impulsiva.

I risultati discussi nella presente nota sono stati ottenuti in [1, 2, 3].

1.1. Campi vettoriali patchy. Incominciamo col ricordare le principali definizioni introdotte in [1]:

Definizione 1.1. *Chiamiamo “patch” una coppia (Ω, g) in cui $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un dominio aperto connesso con una frontiera regolare $\partial\Omega$, e g è un campo vettoriale regolare definito in un intorno della chiusura $\overline{\Omega}$, che punta strettamente verso l’interno in ogni punto della frontiera $x \in \partial\Omega$. Chiamando $\mathbf{n}(x)$ la normale esterna al punto di frontiera x , richiediamo allora che*

$$(1) \quad \langle g(x), \mathbf{n}(x) \rangle < 0 \quad \text{per ogni } x \in \partial\Omega.$$

Definizione 1.2. *Diciamo che $g : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale “patchy” sul dominio aperto Ω se esiste una famiglia di patch $\{(\Omega_\alpha, g_\alpha); \alpha \in \mathcal{A}\}$ tali che*

- \mathcal{A} è un insieme totalmente ordinato di indici;
- gli insiemi aperti Ω_α formano una copertura localmente finita di Ω , i.e. $\Omega = \cup_{\alpha \in \mathcal{A}} \Omega_\alpha$ ed ogni insieme compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ interseca solo un numero finito di domini Ω_α , $\alpha \in \mathcal{A}$;
- il campo vettoriale g può essere scritto nella forma

$$(2) \quad g(x) = g_\alpha(x) \quad \text{se} \quad x \in \Omega_\alpha \setminus \bigcup_{\beta > \alpha} \Omega_\beta.$$

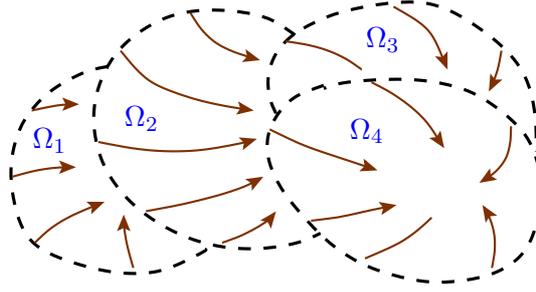


FIGURA 1

Ponendo

$$(3) \quad \alpha^*(x) \doteq \max \{ \alpha \in \mathcal{A} ; x \in \Omega_\alpha \},$$

possiamo riscrivere (2) nella forma equivalente

$$(4) \quad g(x) = g_{\alpha^*(x)}(x) \quad \text{per tutti gli } x \in \Omega.$$

OSSERVAZIONE 1. In alcune situazioni è utile adottare una definizione di campo vettoriale patchy più generale di quella formulata sopra. Infatti, si possono prendere in considerazione patch $(\Omega_\alpha, g_\alpha)$ in cui il dominio Ω_α ha una frontiera regolare a tratti (cfr. [3]). In questo caso, la condizione di incidenza interna (1) può essere espressa richiedendo che

$$(5) \quad g(x) \in \overset{\circ}{T}_\Omega(x)$$

dove $\overset{\circ}{T}_\Omega(x)$ denota l'interno del cono tangente (di Bouligand) all'insieme Ω nel punto x , definito da

$$(6) \quad T_\Omega(x) \doteq \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \liminf_{t \downarrow 0} \frac{d(x + tv, \Omega)}{t} = 0 \right\}.$$

Chiaramente, in ogni punto regolare $x \in \partial\Omega$, l'interno del cono tangente $T_\Omega(x)$ è precisamente l'insieme di tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano $\langle v, \mathbf{n}(x) \rangle < 0$ e quindi (5) coincide con la condizione di incidenza interna (1). Si può facilmente verificare che tutti i risultati concernenti i campi vettoriali patchy ottenuti in [1, 2] rimangono validi anche in questa formulazione più generale.

A volte, per indicare un campo vettoriale patchy, adatteremo la notazione più estesa $(\Omega, g, (\Omega_\alpha, g_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}})$ specificando sia il dominio, sia i singoli patch. Se g è un campo

vettoriale patchy, l'equazione differenziale

$$(7) \quad \dot{x} = g(x)$$

ha molte proprietà interessanti. Ricordiamo che una soluzione alla Carathéodory di (7) su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ è una funzione assolutamente continua $x : I \mapsto \Omega$ che soddisfa l'equazione (7) quasi ovunque in I . Questo è equivalente a richiedere che, per ogni fissato $t_0 \in I$, sia verificata l'equazione integrale

$$(8) \quad x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t g(x(s)) ds \quad \forall t \in I.$$

In particolare, abbiamo mostrato in [1] che l'insieme delle soluzioni alla Carathéodory di (7) è chiuso rispetto alla topologia della convergenza uniforme, ma in generale non è connesso. Utilizzando i campi vettoriali patchy si possono così evitare quelle ostruzioni topologiche che a volte impediscono l'esistenza di feedback continui stabilizzanti (quando interpretiamo $g(x)$ come il campo vettoriale $f(x, U(x))$ generato da un determinato feedback $u = U(x)$). Inoltre, assegnata una condizione iniziale

$$(9) \quad x(t_0) = x_0,$$

il problema di Cauchy (7)-(9) risulta avere almeno una soluzione alla Carathéodory in avanti, ed al più una soluzione alla Carathéodory all'indietro. Per ogni soluzione alla Carathéodory $x = x(t)$ di (7), la mappa $t \mapsto \alpha^*(x(t))$ è continua a sinistra e non decrescente.

1.2. Perturbazioni impulsive. Esaminiamo adesso il problema della stabilità dell'insieme delle soluzioni di (7) rispetto a vari tipi di perturbazione. La maggior parte della nostra analisi riguarderà perturbazioni impulsive descritte da

$$(10) \quad \dot{y} = g(y) + \dot{w}.$$

Qui $w = w(t)$ è una funzione con variazione totale limitata, continua a sinistra. Per soluzione del sistema perturbato (10), con condizione iniziale $y(t_0) = y_0$, intendiamo una funzione misurabile $t \mapsto y(t)$ che soddisfa l'uguaglianza

$$(11) \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t g(y(s)) ds + [w(t) - w(t_0)].$$

Se $w(\cdot)$ è discontinua, il sistema (10) ha un comportamento impulsivo e la soluzione $y(\cdot)$ risulterà essere essa pure discontinua. Scegliamo di lavorare col sistema (10) poichè fornisce una cornice semplice e generale per studiare le proprietà di robustezza di un sistema di controllo. Infatti, consideriamo un sistema soggetto a perturbazioni interne ed esterne della forma

$$(12) \quad \dot{x} = g(x + e_I(t)) + e_O(t).$$

La funzione $t \mapsto y(t) \doteq x(t) + e_I(t)$ allora soddisfa l'equazione impulsiva

$$\dot{y} = g(y) + e_O(t) + \dot{e}_I(t) = g(y) + \dot{w},$$

in cui

$$w(t) = e_I(t) + \int_{t_0}^t e_O(s) ds.$$

Pertanto, dalla stabilità delle soluzioni di (10) rispetto ad una perturbations w con variazione totale piccola, si può immediatamente dedurre un risultato sulla stabilità delle soluzioni di (12), quando $\text{Var.Tot.}\{e_I\}$ e $\|e_O\|_{\mathbf{L}^1}$ sono sufficientemente piccole. Qui, $\text{Var.Tot.}\{e_I\}$ denota la variazione totale della funzione e_I sull'intero intervallo in cui è definita, mentre $\text{Var.Tot.}\{e_I; J\}$ denota la variazione totale di e_I su un sottinsieme J . Denoteremo inoltre con BV lo spazio delle funzioni a variazione totale limitata. Ogni funzione a variazione totale limitata $w = w(t)$ può essere ridefinita a meno di classi di equivalenza in \mathbf{L}^1 . Per semplicità, in tutta la nota prenderemo in considerazione solo rappresentanti continui a sinistra, in modo tale che si abbia $w(t) = w(t^-) \doteq \lim_{s \rightarrow t^-} w(s)$ per ogni t .

2. STABILITÀ DI CAMPI VETTORIALI PATCHY

Osserviamo innanzitutto che, poichè il problema di Cauchy associato all'equazione (7) non ha unicità in avanti e dipendenza continua delle soluzioni, chiaramente non ci si può aspettare che una singola soluzione di (7) sia stabile rispetto a piccole perturbazioni. Il risultato che abbiamo ottenuto in [2] fornisce una proprietà differente di stabilità, che non coinvolge una singola traiettoria ma l'intero insieme delle soluzioni: si mostra cioè che, se la perturbazione w è piccola in norma BV, allora ogni soluzione di (10) risulta essere vicina

a qualche soluzione di (7). Si tratta essenzialmente di una proprietà di semicontinuità superiore dell'insieme delle soluzioni. Più precisamente si ha il seguente risultato.

Teorema 2.1. *Sia g un campo vettoriale patchy su un dominio aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Consideriamo una successione di soluzioni $y_\nu(\cdot)$ del sistema perturbato*

$$(13) \quad \dot{y}_\nu = g(y_\nu) + \dot{w}_\nu \quad t \in [0, T],$$

con $\text{Var.Tot.}\{w_\nu\} \rightarrow 0$ quando $\nu \rightarrow \infty$. Se la successione $y_\nu : [0, T] \mapsto \Omega$ converge ad una funzione $y : [0, T] \mapsto \Omega$, uniformemente su $[0, T]$, allora $y(\cdot)$ è soluzione alla Carathéodory dell'equazione (7) su $[0, T]$.

Corollario 2.1. *Sia g un campo vettoriale patchy su un dominio aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Fissato un qualunque insieme compatto $K \subset \Omega$, ed una costante $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$ tale che valgono le affermazioni seguenti. Se $y : [0, T] \mapsto K$ è una soluzione del sistema perturbato (10), con $\text{Var.Tot.}\{w\} < \delta$, allora esiste una soluzione $x : [0, T] \mapsto \Omega$ dell'equazione imperturbata (7) che soddisfa*

$$(14) \quad \|x - y\|_{\mathbf{L}^\infty} < \varepsilon.$$

3. STIME DI STABILITÀ PER CAMPI VETTORIALI PATCHY

Affrontiamo in questa sezione il problema di derivare una stima della distanza nella norma \mathbf{L}^∞ tra soluzioni del problema di Cauchy del sistema perturbato e di quello imperturbato. È ben noto che, nel caso di un campo vettoriale Lipschitziano g , i problemi di Cauchy

$$(15) \quad \begin{cases} \dot{x} = g(x), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y} = g(y) + \dot{w}, \\ y(0) = x_0, \end{cases}$$

ammettono una soluzione unica che si può ottenere con argomenti di punto fisso (si veda [4]). La loro distanza cresce linearmente con la $\text{Var.Tot.}\{w\}$ e può essere stimata da

$$(16) \quad |y(t) - x(t)| \leq \int_0^t e^{L(t-s)} |dw(s)| \leq e^{Lt} \cdot \text{Var.Tot.}\{w\},$$

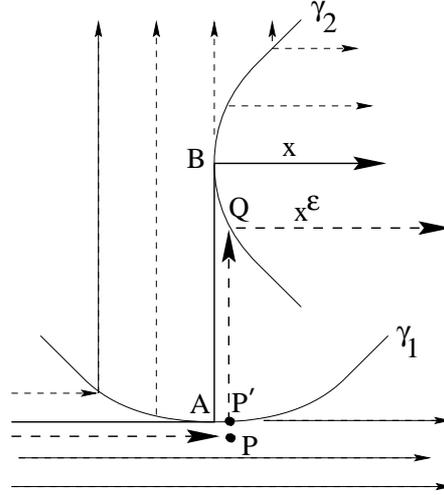


FIGURA 2

dove L denota la costante di Lipschitz di g . Al contrario, nel caso di un campo vettoriale patchy, non ci si può aspettare in generale una dipendenza lineare. Per comprendere questo comportamento, si consideri il seguente

ESEMPIO 1. Si consideri un campo vettoriale definito su \mathbb{R}^2 come in figura 2. Assumiamo cioè che $g = (1, 0)$ al di sotto della curva γ_1 ed alla destra della curva γ_2 , mentre $g = (0, 1)$ al di sopra della curva γ_1 . Si noti che c'è una soluzione alla Carathéodory $x(\cdot)$ di (7) passante attraverso i punti A e B . Successivamente si consideri una soluzione perturbata x^ε che segue orizzontalmente il campo vettoriale fino al punto P , poi salta dal punto P al punto P' , quindi si muove verticalmente fino al punto Q , e orizzontalmente da quel punto in poi. Per fissare le idee, supponiamo che

$$(17) \quad A = (0, 0), \quad B = (0, 1), \quad P = (\varepsilon, -\varepsilon^\alpha), \quad P' = (\varepsilon, \varepsilon^\alpha),$$

$$(18) \quad \gamma_1 = \{x_2 = |x_1|^\alpha\}, \quad \gamma_2 = \{x_1 = |x_2 - 1|^\beta\},$$

In questo caso la traiettoria x^ε è una soluzione del sistema perturbato (10) in cui w è una singola delta di Dirac di massa $|P' - P| = 2|\varepsilon|^\alpha$. D'altra parte, quando entrambe le traiettorie sono passate a destra della curva γ_2 la loro distanza è $\|x^\varepsilon - x\| = \varepsilon^{1/\beta}$. In

questo esempio, la distanza tra soluzioni cresce molto più che linearmente rispetto alla grandezza della perturbazione. In effetti, l'unica stima possibile è

$$(19) \quad \|y - x\|_{\mathbf{L}^\infty} = \mathcal{O}(1) \cdot (\text{Var.Tot.}\{w\})^{1/\alpha\beta}.$$

La situazione migliora quando i patchy si trovano in una posizione “generica”. Si noti che in (19) la presenza dei coefficienti α e β è determinata dall'ordine di tangenza delle curve γ_1, γ_2 con il campo vettoriale g . Possiamo modificare la configurazione con uno spostamento arbitrariamente piccolo delle curve γ_1, γ_2 in modo tale che non ci sia alcuna traiettoria congiungente i due punti di tangenza A e B (figura 3). Inoltre, possiamo supporre che ci sia solamente una tangenza del primo ordine tra il campo vettoriale e le curve γ_1, γ_2 . Ci si aspetta allora che per campi vettoriali patchy generici su \mathbb{R}^2 nel Corollario 2.1 valga una stima della forma

$$(20) \quad \|y - x\|_{\mathbf{L}^\infty}^\infty = \mathcal{O}(1) \cdot (\text{Var.Tot.}\{w\})^{1/2}.$$

Qui la presenza dell'esponente $1/2$ è dovuta al fatto che tangenze del primo ordine non sono eliminabili tramite piccole perturbazioni. In dimensioni maggiori ci si aspetta un esponente anche più basso. Per ottenere una stima d'errore lineare rispetto alla grandezza della perturbazione è allora necessario eliminare tutti questi punti di tangenza. Questo obiettivo non può essere conseguito lavorando con patch associati a domini con frontiera regolare, ma è realizzabile se prendiamo in considerazione patch “poliedrici”, i.e. patch (Ω, g) definiti su domini Ω la cui frontiera sia contenuta in un numero finito di iperpiani (figura 4). Sostituendo il termine “patch” con “patch poligonali” nella Definizione 1.2 (si veda l'Osservazione 1) otteniamo la nozione di *campo vettoriale patchy poliedrico*. Per tali campi vettoriali ci si aspetta che perturbazioni impulsive della forma (10) producano genericamente una perturbazione sull'insieme delle traiettorie che sia esattamente dello stesso ordine di grandezza della forza dell'impulso che compare nel termine destro dell'equazione.

Per evitare complicazioni tecniche, abbiamo preso in considerazione in [3] solo il caso planare, cioè il caso di *campi vettoriali patchy poligonali*, per i quali abbiamo ottenuto il seguente

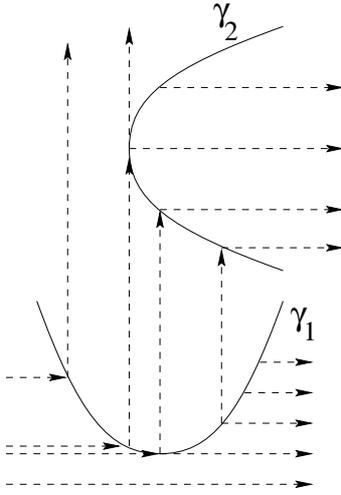


FIGURA 3.

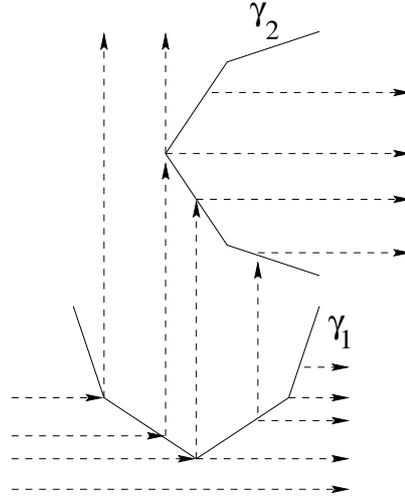


FIGURA 4.

Teorema 3.1. *Per un generico campo vettoriale patchy poligonale g su \mathbb{R}^2 , che assuma valori uniformemente lontani da zero, si ha la seguente proprietà di stabilità.*

Dato un insieme compatto $K \subset \mathbb{R}^2$, esistono delle costanti C , $\delta > 0$, tali che valgono le affermazioni seguenti. Per ogni soluzione $y : [0, T] \mapsto K$ di (10), in cui $\text{Tot.Var.}\{w\} < \delta$, esiste una soluzione $x : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^2$ di (7) tale che

$$(21) \quad \|x - y\|_{L^\infty} \leq C \cdot \text{Tot.Var.}\{w\}.$$

La condizione generica che garantisce la validità della stima (21) richiede che la frontiera di ogni singolo patch Ω_α sia trasversale a tutti i campi g_β , in cui $\beta \leq \alpha$. Si congettura che lo stesso tipo di risultato valga per generici campi vettoriali patchy poliedrici su \mathbb{R}^n .

4. ROBUSTEZZA DI PATCHY FEEDBACK

Il tipo di stabilità descritto nelle sezioni precedenti è precisamente quello necessario in molte applicazioni relative a controlli feedback. Consideriamo il problema della stabilizzazione di un sistema di controllo non lineare su \mathbb{R}^n della forma

$$(22) \quad \dot{x} = f(x, u) \quad u(t) \in \mathcal{U},$$

in cui l'insieme dei valori di controllo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ sia compatto e la mappa $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ sia regolare. Supponiamo che il sistema (22) sia globalmente asintoticamente controllabile

(a zero), cioè che si possa associare ad ogni stato iniziale $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ un controllo open-loop $u = u^{\bar{x}}(t)$ in modo tale che la corrispondente traiettoria di (22), con punto iniziale \bar{x} , raggiunga asintoticamente l'origine. Il nostro obiettivo è quello di costruire un controllo feedback $u = U(x) \in \mathcal{U}$ che stabilizzi nell'origine tutte le traiettorie del sistema a circuito chiuso

$$(23) \quad \dot{x} = f(x, U(x)).$$

Come osservato nell'introduzione, in generale non esisterà un feedback stabilizzante continuo, e quindi si è spesso costretti a cercare un controllo stabilizzante nella classe delle funzioni discontinue. Consideriamo per il momento il problema della stabilizzazione “pratica” semi-globale del sistema (22) (che permetta di raggiungere un assegnato intorno dell'origine partendo da un qualunque stato appartenente ad un dato insieme compatto di valori iniziali). Dato $r > \varepsilon > 0$, ed un insieme compatto $K \supset B_r$, supponiamo di aver costruito un feedback costante a pezzi $u = U(x)$ in modo tale che $g(x) \doteq f(x, U(x))$ risulti essere un campo vettoriale patchy su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ed ogni soluzione $t \mapsto x(t)$ di (7) di punto iniziale $x(0) \in B_r$ raggiunga la palla B_ε entro un tempo T , e soddisfi $x(t) \in K$ per ogni $t \in [0, T]$ (qui B_r, B_ε denotano le palle chiuse di centro l'origine e raggio r, ε , rispettivamente). Il nostro obiettivo è quello di disegnare un feedback $u = U(x)$ che risulti essere robusto relativamente a persistenti piccole perturbazioni interne ed esterne. Consideriamo dunque il sistema perturbato

$$(24) \quad \dot{x} = f(x, U(x + \zeta(t))) + d(t),$$

in cui $\zeta = \zeta(t)$ rappresenta un errore nella misura della variabile di stato, mentre $d = d(t)$ rappresenta un disturbo esterno della dinamica del sistema (23). Poichè abbiamo a che fare con una E.D.O. discontinua, non ci possiamo aspettare una robustezza piena del feedback $U(x)$ rispetto ad arbitrari errori di misura interna, in quanto si possono verificare dei fenomeni di oscillazione infinita nelle vicinanze dei punti di discontinuità (si veda [11], [15], [16], [9]). Pertanto, prenderemo in considerazione errori nella misura della variabile di stato che sono piccoli in norma BV, in modo da precludere questi fenomeni, mentre supporremo che i disturbi esterni siano piccoli in norma \mathbf{L}^1 . Allora, grazie al Corollario 2.1,

ogni soluzione del sistema perturbato (10) raggiungerà la palla $B_{2\varepsilon}$ entro il tempo T . In altre parole, il feedback si comporta ancora bene in presenza di piccole perturbazioni (interne ed esterne).

Prima di enunciare il risultato principale in questa direzione ricordiamo alcune definizioni fondamentali e la Proposizione 4.2 in [1] che garantisce la stabilizzazione pratica semi-globale di un sistema asintoticamente controllabile, per mezzo di un feedback che genera un campo vettoriale patchy. Una tale classe di feedback costante a pezzi era stata introdotta in [1] proprio per produrre una classe di feedback discontinui che ammettano sempre soluzioni alla Carathéodory.

Definizione 4.1. *Sia $(\Omega, g, (\Omega_\alpha, g_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}})$ un campo vettoriale patchy. Supponiamo che esistano dei valori di controllo $k_\alpha \in \mathcal{U}$ tali che, per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$, valga*

$$(25) \quad g_\alpha(x) \doteq f(x, k_\alpha) \quad \forall x \in D_\alpha \doteq \Omega_\alpha \setminus \bigcup_{\beta > \alpha} \Omega_\beta.$$

Allora diremo che la mappa costante a pezzi

$$(26) \quad U(x) \doteq k_\alpha \quad \text{if} \quad x \in D_\alpha$$

è un patchy feedback su Ω , e lo denoteremo con $(\Omega, U, (\Omega_\alpha, k_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}})$.

REMARK 3. Dalle Definizioni 1.2 e 4.1 segue che il campo vettoriale

$$g(x) = f(x, U(x))$$

definito a partire da un dato patchy feedback $(\Omega, U, (\Omega_\alpha, k_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}})$ è precisamente un campo vettoriale patchy $(\Omega, g, (\Omega_\alpha, g_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}})$ associato alla famiglia di campi vettoriali $\{g_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ definiti in (25). Chiaramente, i patch $(\Omega_\alpha, g_\alpha)$ non sono univocamente determinati dal patchy feedback U . Infatti, per la definizione (25), i valori di g_α sull'insieme $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$ risultano essere irrilevanti per ogni indice $\beta > \alpha$. Ricordando la notazione (3) si avrà

$$(27) \quad U(x) = k_{\alpha^*(x)} \quad \forall x \in \Omega.$$

Come al solito, prenderemo in considerazione come *controlli ammissibili* (open-loop) tutte le funzioni misurabili $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ tali che $u(t) \in \mathcal{U}$ per q.o. $t \geq 0$.

Definizione 4.2. *Il sistema (22) è globalmente asintoticamente controllabile nell'origine se valgono le affermazioni seguenti.*

- 1. Attrattività:** *per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ esiste un qualche controllo ammissibile (open-loop) $u = u^{\bar{x}}(t)$ tale che la traiettoria corrispondente di*

$$(28) \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u^{\bar{x}}(t)), \quad x(0) = \bar{x},$$

o raggiunge l'origine in tempo finito o vi tende per $t \rightarrow \infty$.

- 2. Stabilità alla Lyapunov:** *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che valgono le affermazioni seguenti. Per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ con $|\bar{x}| < \delta$, c'è un controllo ammissibile $u^{\bar{x}}$ come in 1., in modo tale che la traiettoria corrispondente di (28) (che parte da \bar{x} e raggiunge l'origine in tempo finito o asintoticamente) soddisfa $|x(t)| < \varepsilon$ per tutti i $t \geq 0$.*

Proposizione 4.1. *Supponiamo che il sistema (22) sia globalmente asintoticamente controllabile nell'origine. Allora, per ogni $0 < r < s$, si possono determinare $T > 0$, ed un patchy feedback $U : D \mapsto \mathcal{U}$, definito su un dominio*

$$(29) \quad D \supset \{x \in \mathbb{R}^n ; r \leq |x| \leq s\}$$

in modo tale che valgono le affermazioni seguenti. Per ogni stato iniziale x_0 con $r \leq |x_0| \leq s$, e per ogni traiettoria alla Carathéodory (in avanti) di (23) che parte da x_0 , si ha

$$(30) \quad \gamma(t) \in D \quad \forall t \geq 0,$$

ed esiste un tempo $\bar{t}_\gamma < T$ tale che

$$(31) \quad |\gamma(\bar{t}_\gamma)| < r.$$

Basandoci sul Corollario 2.1 del Teorema 2.1 e sulla Proposizione 4.1, abbiamo ottenuto in [2] il risultato seguente concernente la robustezza di un feedback stabilizzante rispetto a perturbazioni sia interne che esterne.

Teorema 4.1. *Supponiamo che il sistema (22) sia globalmente asintoticamente controllabile nell'origine. Allora, per ogni $0 < r < s$, si possono determinare $T' > 0$, $\chi' > 0$,*

ed un patchy feedback $U' : D' \mapsto \mathcal{U}$ definito su un dominio D' che soddisfa (29), in modo tale che valgono le affermazioni seguenti. Data una coppia di mappe $\zeta \in BV([0, T'])$, $d \in \mathbf{L}^1([0, T'])$, tali che

$$(32) \quad \text{Tot.Var.}\{\zeta\} \leq \chi', \quad \|d\|_{\mathbf{L}^1([0, T'])} \leq \chi',$$

ed uno stato iniziale x_0 con $r \leq |x_0| \leq s$, per ogni soluzione $t \mapsto x(t)$, $t \geq 0$, del sistema perturbato (24), che parte da x_0 , si ha

$$(33) \quad x(t) \in D' \quad \forall t \in [0, T'],$$

ed esiste un tempo $\bar{t}_x < T'$, tale che

$$(34) \quad |x(\bar{t}_x)| < r.$$

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] F. Ancona and A. Bressan, (1999) Patchy vector fields and asymptotic stabilization, ESAIM - Control, Optimiz. Calc. Var., vol. **4**:445-471.
- [2] F. Ancona and A. Bressan, (2003) Flow Stability of Patchy vector fields and Robust Feedback Stabilization, SIAM J. Control Optim., Vol. **41**, n. 5:1455-1476.
- [3] F. Ancona and A. Bressan, (2003) Stability rates for Patchy vector fields, ESAIM - Control, Optimiz. Calc. Var., vol. **10**.
- [4] A. Bressan, (1987) On differential systems with impulsive controls, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. **78**:227-235.
- [5] R.W. Brockett, (1983) Asymptotic stability and feedback stabilization. In: R.W. Brockett, R.S. Millman, and H.J. Sussmann eds. Differential Geometric Control Theory:181-191. Birkhäuser, Boston.
- [6] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyev, L. Rifford and R.J. Stern, (2000) Feedback stabilization and Lyapunov functions, SIAM J. Control Optim., vol. **39**, no. 1:25-48.
- [7] F.H. Clarke, Yu.S. Ledyev, E.D. Sontag and A.I. Subbotin, (1997) Asymptotic controllability implies feedback stabilization, IEEE Trans. Autom. Contro, vol. **42**, no. 1:1394-1407.
- [8] J.-M. Coron, (1990) A necessary condition for feedback stabilization Systems Control Lett., vol. **14**:227-232.

- [9] J.-M. Coron and L. Rosier, (1994) A relation between continuous time-varying and discontinuous feedback stabilization, *J. Math. Systems, Estim. and Control*, vol. **4**:67-84.
- [10] N.N. Krasovskii and A.I. Subbotin, (1974) *Positional Differential Games* [in Russian]. Nauka, Moscow, 1974. Revised English translation: *Game-Theoretical Control Problems* (1988). Springer-Verlag, New York.
- [11] H. Hermes, (1967) Discontinuous vector fields and feedback control. In: J.K. Hale and J.P. La Salle eds. *Differential Equations and Dynamical Systems*:155-165. Academic Press, New York.
- [12] Yu.S. Ledyaev and E.D. Sontag, (1999) A Lyapunov characterization of robust stabilization, *Journ. Nonlinear Anal.*, vol. **37**:813-840.
- [13] L. Rifford, (2000) Existence of Lipschitz and semiconcave control-Lyapunov functions, *SIAM J. Control Optim.*, vol. **39**, no. 4:1043-1064.
- [14] L. Rifford, (2002) Semiconcave control-Lyapunov functions and stabilizing feedbacks, *SIAM J. Control Optim.*, vol. **41**, no. 3:659-681.
- [15] E.P. Ryan, (1994) On Brockett's condition for smooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback, *SIAM J. Control Optim.*, vol. **32**, no. 6: 1957-1604.
- [16] E.D. Sontag, (1999) Stability and stabilization: discontinuities and the effect of disturbances. In: F.H. Clarke and R.J. Stern eds. *Nonlinear Analysis, Differential Equations, and Control*:551-598, Proc. NATO Advanced Study Institute, Montreal, Jul/Aug 1998, Kluwer.
- [17] E.D. Sontag, (1999) Clocks and insensitivity to small measurement errors, *ESAIM - Control, Optimiz. Calc. Var.*, vol. **4**:537-557.
- [18] E.D. Sontag and H.J. Sussmann, (1980) Remarks on continuous feedback. In: *Proc. IEEE Conf. Decision and Control*, Aulbuquerqu:916-921, IEEE Publications, Piscataway.
- [19] H.J. Sussmann, (1979) Subanalytic sets and feedback control *J. Differential Equations*, vol. **31**:31-52.