Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2006-07

Chiara Cinti

Formule di rappresentazione per soprasoluzioni di equazioni ultraparaboliche su gruppi di Lie

1 febbraio 2007

Abstract

We investigate several questions in Potential Theory related to a class of hypoelliptic ultraparabolic operators $\mathcal{L}$ with underlying homogeneous Lie group structures. Our class is contained in the one of the Hörmander operators. We are mainly interested in a characterization of $\mathcal{L}$-superharmonic functions in terms of suitable mean-value operators and in representation formulas. We also characterize the bounded-below $\mathcal{L}$-superharmonic functions in $\mathbb{R}^{N+1}$ and their related $\mathcal{L}$-Riesz measures.

Moreover, we prove a more general version of a Riesz representation theorem for $\mathcal{L}$-superharmonic functions in terms of $\mathcal{L}$-Green potential of their $\mathcal{L}$-Riesz measures. With this result at hands, we demonstrate the following Poisson-Jensen type representation formula

$$u(z) = \int_{\partial\Omega} u(\zeta)\,\mathrm{d}\mu_z^\Omega(\zeta) + (G_\Omega * \mu)(z), \quad z \in \Omega.$$

Here, u is a $\mathcal{L}$-superharmonic function on a neighborhood of the closure of the *arbitrary* bounded open set $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, μ is the $\mathcal{L}$-Riesz measure for u, μ_z^Ω is the $\mathcal{L}$-harmonic measure related to Ω at z, and G_Ω is the $\mathcal{L}$-Green's function for Ω.

1. Introduzione

I risultati che esporremo sono stati ottenuti in collaborazione anche con E. Lanconelli, e sono contenuti in [5, 6].

Consideriamo operatori differenziali lineari del secondo ordine in $\mathbb{R}^{N+1}$ della forma

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{m} X_j^2 + X_0 - \partial_t, \qquad 1 \le m \le N \tag{1}$$

dove, se denotiamo con $z = (x,t)$ il punto di $\mathbb{R}^{N+1}$, allora

$$X_j(x) = \sum_{k=1}^{N} a_j^k(x)\partial_{x_k}, \quad j = 0, \dots, m,$$

e a_j^k è una funzione di classe C^∞. Nel seguito ogni X_j verrà anche considerato come campo vettoriale su $\mathbb{R}^{N+1}$ e sarà usata la notazione

$$Y = X_0 - \partial_t.$$

Assumiamo le seguenti ipotesi:

(H.1) esiste un gruppo di Lie omogeneo $\mathbb{L} = (\mathbb{R}^{N+1}, \circ, d_\lambda)$ tale che

- (i) $X_1, \dots, X_m, Y$ sono invarianti per le traslazioni a sinistra su $\mathbb{L}$;
- (ii) $X_1, \dots, X_m$ sono d_λ-omogenei di grado uno e Y è d_λ-omogeneo di grado due;

(H.2) per ogni $(x,t), (\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $t > \tau$, esiste una curva $\mathcal{L}$-ammissibile $\eta : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ tale che $\eta(0) = (x,t)$, $\eta(T) = (\xi,\tau)$. La curva η è detta *$\mathcal{L}$-ammissibile* se è assolutamente continua e soddisfa

$$\eta'(s) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(s) X_j(\eta(s)) + \lambda_0(s) Y(\eta(s)), \qquad \text{q.o. in } [0,T],$$

ove $\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_m$, $\lambda_0 \ge 0$ sono funzioni reali costanti a tratti.

Osserviamo subito che, con le ipotesi (H.1) e (H.2), $\mathcal{L}$ appartiene alla classe introdotta e studiata da Kogoj e Lanconelli in [12].

Diciamo che un gruppo di Lie $\mathbb{L} = (\mathbb{R}^{N+1}, \circ)$ è *omogeneo* se su $\mathbb{L}$ esiste una famiglia di dilatazioni $\{d_\lambda\}_{\lambda>0}$ che è un automorfismo del gruppo:

$$d_\lambda(z \circ \zeta) = (d_\lambda z) \circ (d_\lambda \zeta), \qquad \text{per ogni } z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1} \text{ e } \lambda > 0.$$

Ricordiamo che (H.1) e (H.2) implicano la ben nota condizione di Hörmander [11]:

$$\text{rango Lie}\{X_1,\dots,X_m,Y\}(z)=N+1,\qquad \text{per ogni } z\in\mathbb{R}^{N+1}; \tag{2}$$

quindi $\mathcal{L}$ è un operatore ipoellittico. Da (H.1) e (H.2) segue inoltre che la legge di composizione è euclidea nella variabile tempo, ossia

$$(x,t)\circ(\xi,\tau)=(S(x,t,\xi,\tau),t+\tau)$$

per un'opportuna funzione S di classe C^∞, e che la dilatazione del gruppo è

$$d_\lambda(x,t)=\big(\lambda^{\sigma_1}x_1,\dots,\lambda^{\sigma_N}x_N,\lambda^2 t\big), \tag{3}$$

ove $1\le\sigma_1\le\ldots\le\sigma_N$, per ogni $(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}$ e $\lambda>0$. Il numero naturale

$$Q=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k+2$$

è detto *dimensione omogenea* di $\mathbb{L}$ rispetto a d_λ.

Tra gli altri risultati, in [12] è stato dimostrato che $\mathcal{L}$ ha una soluzione fondamentale globale $\Gamma\in C^\infty(\mathbb{R}^{N+1}\setminus\{(0,0)\})$ non negativa e tale che $\Gamma(x,t)>0$ se e solo se $t>0$. Se poniamo $\Gamma(z,\zeta):=\Gamma(\zeta^{-1}\circ z)$, poichè $\mathcal{L}$ è invariante per le traslazioni a sinistra abbiamo $\mathcal{L}\,\Gamma(\cdot,\zeta)=-\delta_\zeta$ per ogni $\zeta\in\mathbb{R}^{N+1}$.

Nel seguito indicheremo con Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$. Diciamo che una funzione $u\in C^\infty(\Omega)$ tale che $\mathcal{L}u=0$ è $\mathcal{L}$-*armonica* in Ω, e denotiamo con $\mathcal{H}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $\mathcal{L}$-armoniche in Ω. Nel senso della teoria astratta del potenziale (si veda [7]), la mappa $\mathbb{R}^{N+1}\supseteq\Omega\mapsto\mathcal{H}(\Omega)$ è un *fascio armonico* e $(\mathbb{R}^{N+1},\mathcal{H})$ è uno *spazio* $\mathfrak{B}$-*armonico.*

Un aperto limitato $V\subset\mathbb{R}^{N+1}$ è detto $\mathcal{L}$-*regolare* se per ogni $\varphi\in C(\partial V)$ esiste un'unica funzione $H^V_\varphi\in\mathcal{H}(V)$ tale che $\lim_{z\to z_0}H^V_\varphi(z)=\varphi(z_0)$, per ogni $z_0\in\partial V$. La funzione inferiormente semicontinua (i.s.c.) $u:\Omega\longrightarrow]-\infty,\infty]$ è detta $\mathcal{L}$-*superarmonica* in Ω se $u<\infty$ in un sottoinsieme denso di Ω e, per ogni aperto $\mathcal{L}$-regolare $V\subset\overline{V}\subset\Omega$ e $z\in V$,

$$u(z)\ge\int_{\partial V}u(\zeta)\,\mathrm{d}\mu^V_z(\zeta),$$

ove μ^V_z è la $\mathcal{L}$-*misura armonica* relativa a V e a z. Denoteremo con $\overline{\mathcal{S}}(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $\mathcal{L}$-superarmoniche in Ω. Invece $v:\Omega\to[-\infty,\infty[$ è $\mathcal{L}$-*subarmonica* in Ω se $-v\in\overline{\mathcal{S}}(\Omega)$, e in tal caso $v\in\underline{\mathcal{S}}(\Omega):=-\overline{\mathcal{S}}(\Omega)$. Come in [15], si dimostra che se $u\in\overline{\mathcal{S}}(\Omega)$

allora $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\mathcal{L}u \leq 0$ nel senso delle distribuzioni. Da questo segue che se $u \in \overline{\mathcal{S}}(\Omega)$ esiste una misura di Radon μ in Ω (detta $\mathcal{L}$-*misura di Riesz* relativa a u) tale che $\mu = -\mathcal{L}u$ nel senso delle distribuzioni.

2. Alcune caratterizzazioni delle funzioni $\mathcal{L}$-superarmoniche

Uno dei risultati ottenuti è stato fornire altre caratterizzazioni della superarmonicità in termini dei seguenti $\mathcal{L}$-*operatori di media* (rispettivamente *superficiale* e *solida*)

$$\mathcal{M}_r(u)(z) = \int_{\partial\Omega_r(0)} \mathcal{K}(\zeta)\, u(z \circ \zeta)\, \mathrm{d}\sigma(\zeta), \qquad M_r(u)(z) = \frac{1}{r^{Q-2}} \int_{\Omega_r(z)} K(\zeta^{-1} \circ z)\, u(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta,$$

ove $\Omega_r(z) = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^{N+1} : \Gamma(\zeta^{-1} \circ z) > r^{2-Q}\right\}$ è la $\mathcal{L}$-*palla di centro* z *e raggio* r, e i nuclei sono dati da $\mathcal{K}(\zeta) = |\nabla_{\mathcal{L}}\Gamma(0,\zeta)|^2/|\nabla_\zeta\Gamma(0,\zeta)|$ e $K = |\nabla_{\mathcal{L}}\Gamma|^2/\Gamma^2$ (abbiamo denotato con $\nabla_{\mathcal{L}} = (X_1, \ldots, X_m)$ il gradiente intrinseco relativo a $\mathcal{L}$, con ∇_x il gradiente usuale). Si tratta di una naturale generalizzazione degli operatori di media introdotti da Gauss per il classico Laplaciano, e molto più tardi estesi all'operatore del calore da Pini [16, 17, 18], Fulks [9] e Watson [20]. Ricordiamo anche il lavoro di Fabes e Garofalo [8], in cui si tratta il caso di operatori parabolici in forma di divergenza a coefficienti variabili.

Il nostro risultato è il seguente.

Proposizione 2.1. *Sia* $u : \Omega \longrightarrow]-\infty, \infty]$ *una funzione i.s.c. e finita in un sottoinsieme denso di* Ω. *Sono equivalenti:*

(i) $u \in \overline{\mathcal{S}}(\Omega)$;

(ii) *u soddisfa la proprietà di* sopra-media superficiale*:* $u(z) \geq \mathcal{M}_r(u)(z)$ *per ogni* $\overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega$;

(iii) *u soddisfa la proprietà di* sopra-media solida*:* $u(z) \geq M_r(u)(z)$ *per ogni* $\overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega$;

(iv) *per ogni* $z \in \Omega$, $\mathcal{M}_r(u)(z) \uparrow u(z)$ *se* $r \downarrow 0$;

(v) *per ogni* $z \in \Omega$, $M_r(u)(z) \uparrow u(z)$ *se* $r \downarrow 0$;

(vi) $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\mathcal{L}u \leq 0$ *nel senso delle distribuzioni, e* $u(z) = \lim_{r\to 0^+} M_r(u)(z)$ *per ogni* $z \in \Omega$.

Siamo partiti da (4), che è una particolare versione del teorema di rappresentazione di Green per $\mathcal{L}$: se $u \in C^2(\Omega)$,

$$u(z) = \mathcal{M}_r(u)(z) - \int_{\Omega_r(z)} \Big(\Gamma(\zeta^{-1} \circ z) - \frac{1}{r^{Q-2}}\Big) \mathcal{L}u(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta = \mathcal{M}_r(u)(z) - \mathcal{N}_r(\mathcal{L}u)(z), \tag{4}$$

$$u(z) = M_r(u)(z) - \frac{Q-2}{r^{Q-2}} \int_0^r l^{Q-3} \mathcal{N}_l(\mathcal{L}u)(z)\, \mathrm{d}l = M_r(u)(z) - N_r(\mathcal{L}u)(z), \tag{5}$$

per ogni $\overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega$. Per ottenere (4), si è proceduto come in [14, Theorem 1.5], usando le proprietà di Γ provate in [12] tra cui in particolare la stima Gaussiana dall'alto (5.1), e scrivendo $\mathcal{L} = \mathrm{div}(A\nabla_x) + Y$, dove A è un'opportuna matrice $N \times N$, e Y ha divergenza nulla; si sfrutta poi l'invarianza di $\mathcal{L}$ per le traslazioni a sinistra. La (5) segue dalla (4) con un'ovvia integrazione e dalla formula di co-area di Federer. Confrontando (4) e (5),

$$M_r(u)(z) = \frac{Q-2}{r^{Q-2}} \int_0^r l^{Q-3} \mathcal{M}_l(u)(z)\, \mathrm{d}l, \qquad \text{per ogni } \overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega, \tag{6}$$

che vale anche se u è solo i.s.c. Otteniamo subito una caratterizzazione delle funzioni $\mathcal{L}$-armoniche: direttamente da (4) e (5) segue che se $u \in \mathcal{H}(\Omega)$ allora $u(z) = \mathcal{M}_r(u)(z)$ e $u(z) = M_r(u)(z)$ per ogni $\overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega$, e vale anche viceversa la seguente generalizzazione del classico teorema di Koebe:

Teorema 2.1. *Sia $u \in C(\Omega)$ tale che $u(z) = \mathcal{M}_r(u)(z)$ per ogni $\overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega$. Allora $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\mathcal{L}u = 0$. Vale un risultato analogo se $u(z) = M_r(u)(z)$ per ogni $\overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega$.*

Per provare la Proposizione 2.1, abbiamo ottenuto alcune formule di rappresentazione in una prima versione debole, ossia valida solo quasi dappertutto.

Definiamo anzitutto lo *$\mathcal{L}$-potenziale* $\Gamma * \mu$ di una misura di Radon in $\mathbb{R}^{N+1}$

$$\Gamma * \mu : \mathbb{R}^{N+1} \to [0, \infty], \qquad (\Gamma * \mu)(z) = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \Gamma(\zeta^{-1} \circ z)\, \mathrm{d}\mu(\zeta). \tag{7}$$

Se μ ha supporto compatto, per una proprietà della duale di Γ [12, Theorem 2.7-(vi)], si ha $\mathcal{L}(\Gamma * \mu) = -\mu$ nel senso delle distribuzioni. Allora, come conseguenza immediata della ipoellitticità di $\mathcal{L}$, si ottiene

Teorema 2.2. *Sia $u \in \overline{\mathcal{S}}(\Omega)$ e sia μ la sua $\mathcal{L}$-misura di Riesz. Per ogni aperto limitato $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$ esiste $h \in \mathcal{H}(V)$ tale che*

$$u = \Gamma * \mu|_{\overline{V}} + h, \qquad \textit{quasi dappertutto in } V. \tag{8}$$

Ora procediamo come in [14, Theorem 1.6]: con (8) si può considerare q.d. al posto di u il potenziale di una misura di Radon a supporto compatto, sfruttiamo poi una successione di funzioni regolari e $\mathcal{L}$-superamoniche che tende alla u in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ costruita adattando le classiche mollificate di Friedrichs, e usiamo la stima (5.1) di Γ in [12]. Otteniamo così

Teorema 2.3 (formula di tipo Poisson-Jensen). *Sia $u \in \overline{\mathcal{S}}(\Omega)$ e sia μ la sua $\mathcal{L}$-misura di Riesz. Per quasi ogni $z \in \Omega$ e $r > 0$ con $\overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega$, si ha*

$$u(z) = M_r(u)(z) + \frac{Q-2}{r^{Q-2}} \int_0^r l^{Q-3} \Big(\int_{\Omega_l(z)} \Big(\Gamma(\zeta^{-1} \circ z) - \frac{1}{l^{Q-2}} \Big) \, \mathrm{d}\mu(\zeta) \Big) \, \mathrm{d}l. \tag{9}$$

Mostriamo ora l'implicazione più significativa nella Proposizione 2.1, ossia (i)⇒(ii): questo entrare in dettaglio è motivato dal fatto che qui si trova il passaggio cruciale che ci permetterà di togliere il quasi dappertutto nella (8) e poi anche nella (9). Sia $z \in \Omega$ un punto in cui vale la (9), e sia $r > 0$ tale che $\overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega$. Come nella prova di [10, Theorem 1.6], consideriamo la derivata rispetto a r di entrambi i membri di (9):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} M_r(u)(z) = {} & \frac{(Q-2)^2}{r^{Q-1}} \int_0^r l^{Q-3} \Big(\int_{\Omega_l(z)} \big(\Gamma(\zeta^{-1} \circ z) - l^{2-Q} \big) \, \mathrm{d}\mu(\zeta) \Big) \, \mathrm{d}l \\ & - \frac{Q-2}{r} \int_{\Omega_r(z)} \big(\Gamma(\zeta^{-1} \circ z) - r^{2-Q} \big) \, \mathrm{d}\mu(\zeta). \end{aligned} \tag{10}$$

Per il teorema di Tonelli,

$$\begin{aligned} & \int_0^r l^{Q-3} \Big(\int_{\Omega_l(z)} \big(\Gamma(\zeta^{-1} \circ z) - l^{2-Q} \big) \, \mathrm{d}\mu(\zeta) \Big) \, \mathrm{d}l \\ & = \int_{\Omega_r(z)} \Big(\int_{(\Gamma(\zeta^{-1} \circ z))^{\frac{1}{2-Q}}}^r l^{Q-3} \big(\Gamma(\zeta^{-1} \circ z) - l^{2-Q} \big) \, \mathrm{d}l \Big) \, \mathrm{d}\mu(\zeta) \\ & = \int_{\Omega_r(z)} \Big[\Gamma(\zeta^{-1} \circ z) \frac{l^{Q-2}}{Q-2} - \ln l \Big]_{l=(\Gamma(\zeta^{-1} \circ z))^{\frac{1}{2-Q}}}^{l=r} \, \mathrm{d}\mu(\zeta) \\ & = \frac{1}{Q-2} \Big(r^{Q-2} \int_{\Omega_r(z)} \Gamma(\zeta^{-1} \circ z) \, \mathrm{d}\mu(\zeta) - \int_{\Omega_r(z)} \mathrm{d}\mu(\zeta) - \int_{\Omega_r(z)} \ln \big(r^{Q-2} \, \Gamma(\zeta^{-1} \circ z) \big) \, \mathrm{d}\mu(\zeta) \Big). \end{aligned}$$

Inseriamo questo risultato in (10) e semplifichiamo, ottenendo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} M_r(u)(z) = - \frac{Q-2}{r^{Q-1}} \int_{\Omega_r(z)} \ln \big(r^{Q-2} \, \Gamma(\zeta^{-1} \circ z) \big) \, \mathrm{d}\mu(\zeta) \leq 0,$$

ossia per q.o. $z \in \Omega$, la funzione $r \mapsto M_r(u)(z)$ è monotona decrescente. Per la continuità di $z \mapsto M_r(u)(z)$, $M_r(u)(z)$ è decrescente rispetto a r per ogni $z \in \Omega$. D'altra parte, da

(6) segue che $r \mapsto M_r(u)(z)$ è localmente assolutamente continua per $r > 0$. Quindi,

$$\text{per ogni } z \in \Omega, \text{ e } r > 0 \text{ con } \overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega, \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} M_r(u)(z) \text{ esiste ed è } \leq 0. \tag{11}$$

Usando ancora (6) otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} M_r(u)(z) = -\frac{(Q-2)^2}{r^{Q-1}} \int_0^r l^{Q-3} \mathcal{M}_l(u)(z)\,\mathrm{d}l + \frac{Q-2}{r} \mathcal{M}_r(u)(z),$$

da cui, per (11),

$$M_r(u)(z) \geq \mathcal{M}_r(u)(z), \quad \text{per ogni } z \in \Omega.$$

Ora l'asserto segue da (i)⇒(iii), che se $u \in C(\Omega)$ è conseguenza diretta della (9) mentre nel caso generale si ottiene con metodi standard di approssimazione.

Come notevole conseguenza di (v) in Proposizione 2.1, si ha il seguente risultato che ci permette di togliere il quasi dappertutto nella formula (8), e che ci mostra una sorta di proprietà di quasi-continuità delle funzioni $\mathcal{L}$-superarmoniche.

Teorema 2.4. *Siano $u, v \in \overline{\mathcal{S}}(\Omega)$. Se $u \leq v$ quasi dappertutto in Ω, allora $u \leq v$ in Ω. Quindi, se $u = v$ nei punti ove entrambe le funzioni sono finite, si ha $u \equiv v$.*

Dunque ora l'enunciato del Teorema 2.2 vale per ogni $z \in \Omega$.

Teorema 2.5 (teorema di rappresentazione di Riesz locale). *Sia $u \in \overline{\mathcal{S}}(\Omega)$ e sia μ la sua $\mathcal{L}$-misura di Riesz. Per ogni aperto limitato $V \subseteq \overline{V} \subseteq \Omega$ esiste $h \in \mathcal{H}(V)$ tale che*

$$u = \Gamma * \mu|_{\overline{V}} + h \quad \text{in } V, \tag{12}$$

e la coppia (μ, h) è unica in V.

Con la (12), procedendo allo stesso modo in cui si è ottenuto il Teorema 2.3, mostriamo che la (9) vale in ogni punto z. Si ha il seguente risultato, che estende la formula (5) alla classe delle funzioni $\mathcal{L}$-superarmoniche in Ω.

Teorema 2.6 (formula di Poisson-Jensen). *Sia $u \in \overline{\mathcal{S}}(\Omega)$ e sia μ la sua $\mathcal{L}$-misura di Riesz. Per ogni $z \in \Omega$ e $r > 0$ con $\overline{\Omega}_r(z) \subseteq \Omega$, si ha*

$$u(z) = M_r(u)(z) + \frac{Q-2}{r^{Q-2}} \int_0^r l^{Q-3} \Big(\int_{\Omega_l(z)} \Big(\Gamma(\zeta^{-1} \circ z) - \frac{1}{l^{Q-2}} \Big) \mathrm{d}\mu(\zeta) \Big) \mathrm{d}l. \tag{13}$$

3. Funzioni $\mathcal{L}$-superarmoniche in $\mathbb{R}^{N+1}$ inferiormente limitate

Sia $u \in \overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^{N+1})$, e consideriamo la (13) in un punto z_0 in cui $u(z_0) < \infty$. Riscrivendo il tutto in termini della funzione $t \mapsto \mu(\Omega_t(z_0))$, si ha il seguente risultato, il cui analogo nella teoria classica va sotto il nome di Primo teorema fondamentale di Nevanlinna, ed estende alcuni risultati di Watson [21, 22] per l'operatore del calore.

Teorema 3.1. *Sia $u \in \overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^{N+1})$, sia μ la sua $\mathcal{L}$-misura di Riesz e sia $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ tale che $u(z_0) < \infty$. Allora, per ogni $R > 0$, si ha*

$$u(z_0) = M_R(u)(z_0) + (Q-2)^2 \int_0^1 \tau^{Q-3} \left(\int_0^{R\tau} \frac{\mu(\Omega_t(z_0))}{t^{Q-1}} \, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\tau. \tag{14}$$

Grazie a (14), otteniamo un duplice risultato che caratterizza tutte e sole le misure di Radon in $\mathbb{R}^{N+1}$ che possono essere le $\mathcal{L}$-misure di Riesz associate a una funzione $\mathcal{L}$-superarmonica in $\mathbb{R}^{N+1}$ inferiormente limitata. Conoscere le proprietà di queste misure ha importanza cruciale ad esempio nella ricerca di un principio del massimo per aperti non limitati (come è stato fatto da Bonfiglioli e Lanconelli in [2] per un sub-Laplaciano reale). Inoltre nel seguente teorema viene data una formula di rappresentazione di Riesz globale che è una generalizzazione del risultato di Pini in [19].

Teorema 3.2. *Sia μ una misura di Radon in $\mathbb{R}^{N+1}$. Condizione necessaria e sufficiente affinchè μ sia la $\mathcal{L}$-misura di Riesz relativa a una funzione u $\mathcal{L}$-superarmonica in $\mathbb{R}^{N+1}$ e inferiormente limitata è che*

$$\int_1^\infty \frac{\mu(\Omega_t(z))}{t^{Q-1}} \, \mathrm{d}t < \infty, \tag{15}$$

per ogni z in un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}^{N+1}$. Allora esiste $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{N+1})$, $h \geq 0$, tale che

$$u(z) = U + (\Gamma * \mu)(z) + h(z), \quad z \in \mathbb{R}^{N+1}, \tag{16}$$

ove $U = \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} u > -\infty$.

Un risultato di questo tipo vale anche per le funzioni superarmoniche rispetto a un sub-Laplaciano reale, ed è stato provato da Bonfiglioli e Lanconelli in [3]: in quel caso si aveva una condizione analoga alla (15) che doveva essere verificata in un solo punto dello spazio. Ora la richiesta della validità della (15) in un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}^{N+1}$ è ineliminabile, e ciò dipende dalla particolare struttura della soluzione Γ, che ha supporto contenuto in un semispazio.

Osserviamo che le ipotesi $\mathcal{L}h = 0$ in $\mathbb{R}^{N+1}$ e $h \geq 0$ nel precedente teorema non implicano che h sia una funzione costante, a differenza di ciò che accade ad esempio per un classico Laplaciano o anche per un sub-Laplaciano reale. Infatti, ad esempio, la funzione

$$h(x,t) = \exp(x_1 + \ldots + x_N + Nt), \quad x \in \mathbb{R}^N,\ t \in \mathbb{R},$$

è non negativa, non costante e soddisfa la classica equazione del calore in $\mathbb{R}^{N+1}$.

Se supponiamo per u un'opportuna condizione di crescita che ci permette di ottenere un teorema di tipo Liouville per $\mathcal{L}$ (si veda [13]), otteniamo una formula di rappresentazione globale esattamente analoga alla (7.7) del lavoro di Bonfiglioli e Lanconelli [3]. Si ha

Corollario 3.1. *Sia $u \in \overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^{N+1})$ tale che $U = \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} u > -\infty$, e sia μ la $\mathcal{L}$-misura di Riesz di u. Se vale*

$$u(0,t) = O(t^m) \quad \textit{per } t \to \infty,$$

per un opportuno $m \geq 0$, allora

$$u(z) = U + (\Gamma * \mu)(z), \quad z \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{17}$$

Infatti, dato che $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{N+1})$ e $0 \leq h(0,t) \leq u(0,t) - U = O(t^m)$ per $t \to \infty$, per un teorema di tipo Liouville provato da Kogoj e Lanconelli in [13] segue che $h \equiv 0$.

4. Un teorema di rappresentazione di Riesz globale

Un altro nostro risultato è il seguente: si tratta di una generalizzazione della (12) del Teorema 2.5 e della formula di rappresentazione di Riesz (16) del Teorema 3.2.

Teorema 4.1 (teorema di rappresentazione di Riesz globale)**.** *Sia $u \in \overline{\mathcal{S}}(\Omega)$ e sia μ la sua $\mathcal{L}$-misura di Riesz. Sono equivalenti:*

(i) *esiste $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ tale che*

$$u = G_\Omega * \mu + h \quad \textit{in } \Omega; \tag{18}$$

(ii) *esiste $v \in \underline{\mathcal{S}}(\Omega)$ tale che $v \leq u$ in Ω;*

(iii) *$G_\Omega * \mu < \infty$ in un sottoinsieme denso di Ω.*

Inoltre vale (18) *con* $h \in \mathcal{H}(\Omega)$ *se e solo se* h *è il massimo minorante* $\mathcal{L}$*-armonico di* u.

In (18) compare la funzione $G_\Omega * \mu$, ossia lo $\mathcal{L}$*-potenziale di Green* di μ. Per darne una definizione, introduciamo anzitutto la $\mathcal{L}$*-funzione di Green* per un aperto.

Sia $\zeta \in \Omega$. La funzione $z \mapsto \Gamma(\zeta^{-1} \circ z)$ è $\mathcal{L}$-superarmonica e non negativa in Ω. Allora, poichè $(\mathbb{R}^{N+1}, \mathcal{H})$ è uno spazio $\mathfrak{B}$-armonico, essa ha un massimo minorante $\mathcal{L}$-armonico h_ζ in Ω. Diciamo che

$$\Omega \times \Omega \ni (z, \zeta) \mapsto G_\Omega(z, \zeta) = \Gamma(\zeta^{-1} \circ z) - h_\zeta(z) \in [0, \infty]$$

è la $\mathcal{L}$*-funzione di Green* per Ω.

Ora, se μ è una misura di Radon in Ω, definiamo $\mathcal{L}$*-potenziale di Green* di μ la funzione

$$G_\Omega * \mu : \Omega \to [0, \infty], \qquad (G_\Omega * \mu)(z) = \int_\Omega G_\Omega(z, \zeta)\, \mathrm{d}\mu(\zeta).$$

Nel caso particolare in cui l'aperto Ω sia tutto lo spazio, vale $G_{\mathbb{R}^{N+1}}(z, \zeta) = \Gamma(z, \zeta)$, quindi $G_{\mathbb{R}^{N+1}} * \mu$ coincide con lo $\mathcal{L}$-potenziale $\Gamma * \mu$ definito in (7).

Una proprietà cruciale di $G_\Omega * \mu$ è contenuta nel seguente teorema, che stabilisce che se un $\mathcal{L}$-potenziale di Green è $\mathcal{L}$-superarmonico, allora il suo massimo minorante $\mathcal{L}$-armonico è la funzione nulla. Può anche essere interpretato come una sorta di principio del massimo debole per la funzione $\mathcal{L}$-subarmonica v.

Teorema 4.2. *Sia* μ *una misura di Radon in* Ω *tale che* $G_\Omega * \mu < \infty$ *in un sottoinsieme denso in* Ω. *Se* $v \in \underline{\mathcal{S}}(\Omega)$ *è tale che* $v \le G_\Omega * \mu$, *allora* $v \le 0$.

La prova di questo risultato è frutto di un lavoro piuttosto sottile basato sulla disuguaglianza di Harnack (7.1) che compare nel lavoro di Kogoj e Lanconelli [12], riformulata per le soluzioni non negative di $\mathcal{L}^* u = 0$. Abbiamo usato questo Teorema 4.2 per provare l'implicazione (ii)⇒(iii) e la seconda parte dell'enunciato del Teorema 4.1 di rappresentazione di Riesz globale.

Come conseguenza del Teorema 4.1, si riottiene la formula (16) del Teorema 3.2:

Corollario 4.1. *Sia* $u \in \overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R}^{N+1})$ *tale che* $U = \inf_{\mathbb{R}^{N+1}} u > -\infty$, *e sia* μ *la* $\mathcal{L}$*-misura di Riesz di* u. *Allora esiste* $h \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^{N+1})$, $h \ge 0$, *tale che*

$$u(z) = U + (\Gamma * \mu)(z) + h(z), \quad z \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

5. Formula estesa di Poisson-Jensen per $\mathcal{L}$

L'ultimo risultato che presentiamo è il seguente.

Teorema 5.1 (formula di Poisson-Jensen estesa). *Siano U e Ω aperti di $\mathbb{R}^{N+1}$ tali che $\overline{\Omega} \subset U$ e Ω è limitato. Sia $u \in \overline{\mathcal{S}}(U)$ e sia μ la sua $\mathcal{L}$-misura di Riesz. Allora*

$$u(z) = \int_{\partial\Omega} u(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_z^\Omega(\zeta) + (G_\Omega * \mu)(z), \quad z \in \Omega, \tag{19}$$

ove μ_z^Ω è la $\mathcal{L}$-misura armonica relativa a Ω e a z.

Osserviamo che la (19) vale per una funzione $\mathcal{L}$-superarmonica in un intorno della chiusura dell'*arbitrario* aperto limitato Ω. Quindi si tratta di un'estensione della formula di Poisson-Jensen (13), che valeva solo nel caso particolare in cui l'aperto Ω era una $\mathcal{L}$-palla. Una formula di Poisson-Jensen estesa analoga alla (19) per le funzioni superarmoniche rispetto a un sub-Laplaciano reale è stata provata da Bonfiglioli e Cinti in [1].

Diamo una traccia della dimostrazione. Proviamo prima la (19) supponendo come ulteriore ipotesi che u sia continua nei punti di $\partial\Omega$. La limitatezza di Ω, insieme alla monotonia e alla non negatività della $\mathcal{L}$-funzione di Green, implicano che $G_\Omega * \mu < \infty$ in un sottoinsieme denso di Ω. Vale quindi, per (i) del Teorema 4.1, $u = h + G_\Omega * \mu$ in Ω, ove h è il massimo minorante $\mathcal{L}$-armonico di u in Ω. Dunque, ponendo

$$U^\Omega(z) = \int_{\partial\Omega} u(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_z^\Omega(\zeta), \quad z \in \Omega,$$

è sufficiente mostrare che $U^\Omega \equiv h$. Osserviamo che $U^\Omega \in \mathcal{H}(\Omega)$: infatti $u|_{\partial\Omega} \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$, quindi u è una funzione risolutiva nel senso di Perron-Wiener e $U^\Omega \equiv H^\Omega_{u|_{\partial\Omega}} \in \mathcal{H}(\Omega)$.
Proviamo ora che U^Ω è un minorante di u. Si ha

$$U^\Omega(z) = \sup\left\{ H_\varphi^\Omega(z) = \int_{\partial\Omega} \varphi\, \mathrm{d}\mu_z^\Omega : \varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R}), \varphi \le u|_{\partial\Omega} \right\} =: \sup \mathcal{F}.$$

Sia $\varphi \in C(\partial\Omega, \mathbb{R})$, $\varphi \le u|_{\partial\Omega}$. Poichè $u \in \overline{\mathcal{S}}(\Omega)$ e $\liminf_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) = u(\zeta) \ge \varphi(\zeta)$ per ogni $\zeta \in \partial\Omega$ per la continuità di u, si ha $u \in \overline{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega$, da cui $H_\varphi^\Omega = \inf \overline{\mathcal{U}}_\varphi^\Omega \le u$. Per l'arbitrarietà di φ, otteniamo $\sup \mathcal{F} = U^\Omega \le u$ in Ω.
Infine mostriamo che U^Ω è il massimo dei minoranti di u. Sia $w \in \mathcal{H}(\Omega)$, $w \le u$. Dato che $u \in C(\partial\Omega)$, si ha $\limsup_{\Omega \ni z \to \zeta} w(z) \le \limsup_{\Omega \ni z \to \zeta} u(z) = u(\zeta)$ per ogni $\zeta \in \partial\Omega$,

ossia $w \in \underline{\mathcal{U}}^{\Omega}_{u|\partial\Omega}$. Segue $w \le \sup \underline{\mathcal{U}}^{\Omega}_{u|\partial\Omega} = U^{\Omega}$ in Ω, da cui la tesi.

Nel caso generale, poichè gli aperti $\mathcal{L}$-regolari formano una base della topologia euclidea (si veda [4, Corollaire 5.2]), per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un ricoprimento di $\partial\Omega$ costituito da aperti $\mathcal{L}$-regolari $V^n \subset \overline{V^n} \subset U$ tali che $\mathrm{diam}(V^n) < n^{-1}$. Per la compattezza di $\partial\Omega$ esiste $p_n \in \mathbb{N}$ con $\partial\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{p_n} V_k^n$ e $\mathrm{diam}(V_k^n) < n^{-1}$ per $k = 1, \dots, p_n$. Possiamo scegliere i V_k^n in modo che

$$\overline{\textstyle\bigcup_{k=1}^{p_n} V_k^n} \subseteq \textstyle\bigcup_{k=1}^{p_{n-1}} V_k^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Poniamo ora

$$u_n(z) = \Big(\dots \Big(\big(u_{V_1^n}\big)_{V_2^n} \Big)_{V_3^n} \dots \Big)_{V_{p_n}^n}(z), \qquad z \in U,$$

ove, per $k = 1, \dots, p_n$, $v_{V_k^n}$ denota la regolarizzata di Perron di v relativa a V_k^n. Se $v \in \overline{\mathcal{S}}(U)$ allora $v_{V_k^n}$ è ancora una funzione $\mathcal{L}$-superarmonica in U, quindi la definizione di u_n è ben posta. Quindi $u_n \in \overline{\mathcal{S}}(U)$, u_n è $\mathcal{L}$-armonica in $\bigcup_{k=1}^{p_n} V_k^n$ quindi continua nei punti di $\partial\Omega$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, $u_n \equiv u$ in $U \setminus (\bigcup_{k=1}^{p_n} V_k^n)$ e

$$u_n \le \Big(\dots \big(u_{V_1^n}\big)_{V_2^n} \dots \Big)_{V_{p_n-1}^n} \le \dots \le \big(u_{V_1^n}\big)_{V_2^n} \le u_{V_1^n} \le u \quad \text{in } U. \tag{21}$$

Da (20), (21) e dal principio del massimo segue che $u_{n-1} \le u_n$ in U. Inoltre, poichè $\mathrm{diam}(V_k^n)$ tende a zero per $n \to \infty$, si ha $u_n \uparrow u$. Per la (19),

$$u_n(z) = \int_{\partial\Omega} u_n(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_z^{\Omega}(\zeta) + (G_\Omega * \mu_n)(z), \quad z \in \Omega, \tag{22}$$

ove $\mu_n = -\mathcal{L}u_n \ge 0$. Poichè $\mu_n = \mu$ in $U \setminus (\bigcup_{k=1}^{p_n} V_k^n)$ e $\mu_n = 0$ altrove, si ha

$$(G_\Omega * \mu_n)(z) = \int_\Omega G_\Omega(z,\zeta)\big(1 - \chi_{\bigcup_{k=1}^{p_n} V_k^n}(\zeta)\big)\, \mathrm{d}\mu(\zeta).$$

Osserviamo che, per la (20),

$$0 \le G_\Omega(z,\zeta)\big(1 - \chi_{\bigcup_{k=1}^{p_{n-1}} V_k^{n-1}}(\zeta)\big) \le G_\Omega(z,\zeta)\big(1 - \chi_{\bigcup_{k=1}^{p_n} V_k^n}(\zeta)\big), \quad n \in \mathbb{N},$$

e che $\chi_{\bigcup_{k=1}^{p_n} V_k^n}(\zeta)$ tende a zero per n che tende all'infinito, per ogni $\zeta \in \Omega$. Allora, come conseguenza del teorema di Beppo Levi, $\lim_{n\to\infty}(G_\Omega * \mu_n)(z) = (G_\Omega * \mu)(z)$. Ancora per il teorema di convergenza monotona, si ha $\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} u_n(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_z^{\Omega}(\zeta) = \int_{\partial\Omega} u(\zeta)\, \mathrm{d}\mu_z^{\Omega}(\zeta)$. Così, mandando $n \to \infty$ in (22), otteniamo (19). Ciò completa la prova del teorema.

Riferimenti bibliografici

[1] Bonfiglioli, A., Cinti, C.: *A Poisson-Jensen type representation formula for subharmonic functions on stratified Lie groups*, Potential Analysis **22** (2005), 151–169.

[2] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E.: *Maximum Principle on unbounded domains for sub-Laplacians: a Potential Theory approach*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2295–2304.

[3] Bonfiglioli, A., Lanconelli, E.: *Subharmonic functions on Carnot groups*, Math. Ann. **325** (2003), 97–122.

[4] Bony, J.-M.: *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier **19** (1969), 277–304.

[5] Cinti, C.: *Sub-solutions and mean-value operators for ultraparabolic equations on Lie groups*, Math. Scand., to appear.

[6] Cinti, C., Lanconelli, E.: *A Poisson-Jensen type representation formula for a class of ultraparabolic operators on Lie Groups*, preprint.

[7] Constantinescu, C., Cornea, A.: *Potential Theory on Harmonic Spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[8] Fabes, E. B., Garofalo, N.: *Mean value properties of solutions to parabolic equations with variable coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **121** (1987), 305–316.

[9] Fulks, W.: *A mean value theorem for the heat equation*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 6–11.

[10] Garofalo, N., Lanconelli, E.: *Wiener's criterion for parabolic equations with variable coefficients and its consequences*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 811–836.

[11] Hörmander, L.: *Hypoelliptic second-order differential equations*, Acta Math. **119** (1967), 147–171.

[12] Kogoj, A. E., Lanconelli, E.: *An invariant Harnack inequality for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations*, Mediterranean Journal of Mathematics **1** (2004), 51–80.

[13] Kogoj, A. E., Lanconelli, E.: *One-side Liouville Theorems for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations*, Contemporary Math. **368** (2005), 305–312.

[14] Lanconelli, E., Pascucci, A.: *Superparabolic functions related to second order hypoelliptic operators*, Potential Analysis **11** (1999), 303–323.

[15] Negrini, P., Scornazzani, V.: *Superharmonic functions and regularity of boundary points for a class of elliptic-parabolic partial differential operators*, Bollettino UMI An. Funz. Appl. Serie VI, Vol. III-C 1 (1984), 85–106.

[16] Pini, B.: *Sulle equazioni a derivate parziali lineari del secondo ordine in due variabili di tipo parabolico*, Ann. Mat. Pura Appl. **32** (1951), 179–204.

[17] Pini, B.: *Maggioranti e minoranti delle soluzioni delle equazioni paraboliche*, Ann. Mat. Pura Appl. **37** (1954), 249–264.

[18] Pini, B.: *Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **23** (1954), 422–434.

[19] Pini, B.: *Estensione al caso parabolico di un teorema di F. Riesz relativo alle funzioni subarmoniche*, Riv. Mat. Univ. Parma **5** (1954), 269–280.

[20] Watson, N. A.: *A theory of temperatures in several variables*, Proc. London Math. Soc. (3) **26** (1973), 385–417.

[21] Watson, N. A.: *Nevanlinna's first fundamental theorem for supertemperatures*, Math. Scand. **73** (1993), 49–64.

[22] Watson, N. A.: *A generalized Nevanlinna theorem for supertemperatures*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **28** (2003), 35–54.