SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI BOLOGNA

Angelo Favini

OPERATORI DIFFERENZIALI DEGENERI DI ORDINE SUPERIORE IN SPAZI DI SOBOLEV

16 febbraio 2006

Sunto. Si mostra che sotto opportune condizioni sulla funzione $\alpha \in H_0^n(0,1)$, $\alpha(x) > 0$ su (0,1), l'operatore $W_n u = (-1)^{n+1} \alpha u^{(2n)}$, con

$$\mathcal{D}(W_n) = \begin{array}{l} \{u \in H^n(0,1); u^{(2n)} \text{ esiste nel senso delle distribuzioni e} \\ \alpha u^{(2n)} \in H_0^n(0,1)\}, \end{array}$$

genera un semigruppo analitico su $H^n(0,1)$, $n = 1, 2, \dots$.

Summary. It is proved that under suitable conditions on function $\alpha \in H_0^n(0,1)$, $\alpha(x) > 0$ on (0,1), operator $W_n u = (-1)^{n+1} \alpha u^{(2n)}$, with

$$\mathcal{D}(W_n) = \begin{array}{l} \{u \in H^n(0,1); u^{(2n)} \text{ exists in the sense of distributions and} \\ \alpha u^{(2n)} \in H_0^n(0,1)\}, \end{array}$$

generates an analytic semigroup on $H^n(0,1)$, $n = 1, 2, \dots$.

0 Introduzione

Nel lavoro [2] è stato considerato l'operatore

$$\mathcal{A}u := x(1-x)u''(x), \quad x \in (0,1),$$

con dominio

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{u \in H_0^1(0,1) : \ u' \in H_{loc}^1(0,1), \ x(1-x)u'' \in H_0^1(0,1)\},$$

dove lo spazio di Sobolev $H_0^1(0,1)$ viene munito del prodotto interno

$$\langle u, v \rangle := \int_0^1 u'(x)\bar{v}'(x)dx, \quad u, v \in H_0^1(0,1).$$

È allora dimostrato che $(\mathcal{A}, \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ genera un semigruppo analitico in $H_0^1(0,1)$. Un risultato vicino a questo era stato ottenuto da G. Fichera in [6], per mezzo di tecniche completamente diverse, mediante sviluppo in autofunzioni. Operatori di questo tipo sono studiati nella letteratura matematica per la loro importanza nelle scienze applicate. Di grande rilevanza in proposito è il famoso lavoro di Feller sulle equazioni paraboliche [5].

Si noti che in [2] viene anche provato, in connessione ai risultati di Feller, che l'operatore W, con

$$Wu : \ x(1-x)u''$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(W) = \ & \{u \in H^1(0,1); u'' \text{ esiste nel senso delle distribuzioni e} \\ & x(1-x)u'' \in H_0^1(0,1)\}, \end{aligned}$$

(e quindi $u \in \mathcal{D}(W)$ soddisfa le condizioni ai limiti di Wentzell

$$\lim_{x \to 0,1} x(1-x)u''(x) = 0),$$

genera un semigruppo analitico in $H^1(0,1)$.

Molto recentemente, A. Favini, G.R. Goldstein, J. Goldstein e S. Romanelli hanno studiato operatori differenziali o alle derivate parziali del quarto ordine con condizioni al bordo di tipo Wentzell generali, anche non lineari [3]. [4].

In questo seminario esporró risultati degli stessi autori su operatori del tipo

$$(-1)^{n+1}\alpha u^{(2n)},$$

dove $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in H_0^n(0,1)$ soddisfa condizioni di integrabilitá vicino a 0 e a 1. Nella prima parte viene considerato l'operatore $-x^2(1-x)^2u^{(4)}$, nella seconda parte si studia il caso generale.

1 Operatori di Feller del quarto ordine

Introduciamo l'operatore A in $H_0^2(0,1)$ mediante

$$\mathcal{D}(A) := \{u \in H_0^2(0,1) : u'' \in H_{loc}^2(0,1), x^2(1-x)^2u^{(4)}(x) \in H_0^2(0,1)\}$$

e

$$Au := -x^2(1-x)^2u^{(4)}, \quad u \in \mathcal{D}(A).$$

Lo spazio di Sobolev $H_0^2(0,1)$ è munito del prodotto interno

$$\langle u, v\rangle := \int_0^1 u''(x)\bar{v}''(x)dx, \quad u, v \in H_0^2(0,1),$$

che è equivalente all'usuale prodotto interno in $H_0^2(0,1)$

$$\int_0^1 u(x)\bar{v}(x)dx + \int_0^1 u'(x)\bar{v}'(x)dx + \int_0^1 u''(x)\bar{v}''(x)dx$$

in virtú della disuguaglianza di Poincaré.

Prima di enunciare il risultato principale del paragrafo, ricordo una generalizzazione della famosa disuguaglianza di Hardy (cfr. la monografia di H. Brezis [1], p. 233, per il risultato classico), dovuta a J. Tidblom [8], Corollary 2.3.

Lemma 1.1 *Sia $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$. Allora per ogni $u \in W_0^{m,p}(0,1)$*

$$\int_0^1 \left|u^{(m)}(t)\right|^p dt \geq \sum_{k=0}^m A_{k,m}(p) \int_0^1 \frac{|u(t)|^p}{g(t)^{(m-k)p}} dt,$$

dove $A_{k,m}(p)$ sono costanti positive,

$$A_{0,m}(p) = \prod_{k=1}^m \left(\frac{kp-1}{p}\right)^p$$

e $g(t) = \min(t, 1-t)$.

Vale allora il seguente Teorema.

Teorema 1.1 *$(A, \mathcal{D}(A))$ è autoaggiunto non positivo in $H_0^2(0,1)$.*

Dimostrazione. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$. Se $u \in \mathcal{D}(A)$ e

$$\lambda u + x^2(1-x)^2u'' = f \in H_0^2(0,1), \tag{1.1}$$

allora

$$\lambda \frac{u(x)}{x^2(1-x)^2} + u^{(4)}(x) = \frac{f(x)}{x^2(1-x)^2}, \quad x \in (0,1). \tag{1.2}$$

Mostriamo che ció implica

$$\int_0^1 u^{(4)}(x)\bar{u}(x)dx = \int_0^1 |u''(x)|^2 dx, \tag{1.3}$$

cioé

$$[u'''(x)\bar{u}(x) - u''(x)\bar{u}'(x)]_{x=0}^{x=1} = 0.$$

Infatti,

$$\int_0^1 u^{(4)}(x)\bar{u}(x)dx = [u'''(x)\bar{u}(x) - u''(x)\bar{u}'(x)]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 |u''(x)|^2 dx.$$

Ora, se $u \in \mathcal{D}(A)$ esistono i limiti

$$\lim_{x\to 0+} u'''(x) \in \mathbb{C}, \quad \lim_{x\to 1-} u'''(x) \in \mathbb{C}.$$

Ma $x^2(1-x)^2u^{(4)} = g = H_0^2(0,1)$ e, per il Lemma 1.1,

$$\int_0^1 \frac{|g(x)|^2}{x^4(1-x)^4} dx \leq C\|g\|_{H_0^2(0,1)}^2.$$

Segue che se $0 < y < x < 1$, allora

$$\begin{aligned}
|u'''(x) - u'''(y)| &\leq \int_y^x |u^{(4)}(t)|dt \leq C \int_y^x \frac{|g(t)|}{t^2(1-t)^2} dt \\
&\leq C \left(\int_y^x dt\right)^{1/2} \left(\int_y^x \frac{|g(t)|^2}{t^4(1-t)^4} dt\right)^{1/2} \leq C|x-y|^{1/2}\|g\|_{H_0^2(0,1)}.
\end{aligned}$$

Analogamente, esistono in $\mathbb{C}$ i limiti per $x \to 0, 1$ di $u''(x)\bar{u}'(x)$. Di qui, la (1.3) è provata. In effetti, poiché $x^2(1-x)^2u^{(4)} \in H_0^2(0,1)$, in virtú del Lemma 1.1

$$\int_0^1 \frac{|x^2(1-x)^2u^{(4)}(x)|^2}{x^4(1-x)^4} < \infty$$

e cosí $u \in H^{(4)}(0,1)$. Pertanto, $u \in C^{(3)}([0,1])$.

Moltiplichiamo la (1.2) per $\bar{u}(x)$, integriamo poi su (0,1) e prendiamo parte reale e parte immaginaria. Allora

$$\begin{aligned}
\Re\mathrm{e}\ \lambda \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x^2(1-x)^2} dx + \|u''\|_{L^2}^2 &= \Re\mathrm{e} \int_0^1 \frac{f(x)\bar{u}(x)}{x^2(1-x)^2} dx, \\
|\Im\mathrm{m}\ \lambda| \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x^2(1-x)^2} dx &= \left|\Im\mathrm{m} \int_0^1 \frac{f(x)\bar{u}(x)}{x^2(1-x)^2} dx\right|.
\end{aligned}$$

Sia $\Re\mathrm{e}\ \lambda + |\Im\mathrm{m}\ \lambda| \geq \epsilon_0 > 0$, ϵ_0 piccolo. Allora

$$\begin{aligned}
&(\Re\mathrm{e}\ \lambda + |\Im\mathrm{m}\ \lambda|) \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x^2(1-x)^2} dx + \|u''\|_{L^2}^2 \\
&\leq 2 \left(\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2(1-x)^2} dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x^2(1-x)^2} dx\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

e quindi in tale settore

$$\|u''\|_{L^2}^2 \leq 2\left(\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2(1-x)^2}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x^2(1-x)^2}dx\right)^{1/2}.$$

Ma allora per tali λ

$$\begin{aligned}&(\Re\text{e }\lambda + |\Im\text{m }\lambda|)\int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x^2(1-x)^2}dx\\ &\leq 4\left(\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2(1-x)^2}dx\right)^{1/2}\left(\int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x^2(1-x)^2}dx\right)^{1/2},\end{aligned}$$

cosicché

$$\begin{aligned}|\lambda|\left(\int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x^2(1-x)^2}dx\right)^{1/2} &\leq C\left(\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^2(1-x)^2}dx\right)^{1/2}\\ &\leq C_1\|f\|_{H_0^2(0,1)}.\end{aligned}$$

D'altra parte, moltiplicando la (1.2) per $\bar{u}^{(4)}(x)$ ed integrando su (0,1), si ha

$$\lambda\int_0^1 u(x)\bar{u}^{(4)}(x)dx + \int_0^1 x^2(1-x)^2|u^{(4)}(x)|^2dx = \int_0^1 f(x)\bar{u}^{(4)}(x)dx,$$

cioé (si ricordi che $u \in \mathcal{D}(A)$),

$$\lambda\int_0^1 |u''(x)|^2dx + \int_0^1 x^2(1-x)^2|u^{(4)}(x)|^2dx = \int_0^1 f''(x)\bar{u}''(x)dx, \tag{1.4}$$

perché $u \in H^4(0,1)$ e $f \in H_0^2(0,1)$ implicano

$$[f(x)\bar{u}'''(x) - f''(x)\bar{u}''(x)]_{x=0}^{x=1} = 0.$$

Prendendo parte reale e parte immaginaria in (1.4), si ha

$$\begin{aligned}&\Re\text{e }\lambda\|u\|_{H_0^2}^2 + \int_0^1 x^2(1-x)^2|u^{(4)}(x)|^2dx = \Re\text{e }\int_0^1 f''(x)\bar{u}''(x)dx,\\ &|\Im\text{m }\lambda|\|u\|_{H_0^2}^2 = \left|\Im\text{m }\int_0^1 f''(x)\bar{u}''(x)dx\right|\end{aligned}$$

e quindi, nel settore $\Re\text{e }\lambda + |\Im\text{m }\lambda| \geq \epsilon_0 > 0$

$$(\Re\text{e }\lambda + |\Im\text{m }\lambda|)\,\|u\|_{H_0^2}^2 + \int_0^1 x^2(1-x)^2|u^{(4)}(x)|^2dx \leq 2\|f\|_{H_0^2}\|u\|_{H_0^2},$$

cosicché

$$\int_0^1 x^2(1-x)^2|u^{(4)}(x)|^2dx \leq 2\|f\|_{H_0^2}\|u\|_{H_0^2}.$$

Ma allora, dalla (1.4) deduciamo

$$|\lambda| \|u''\|_{L^2}^2 \leq 3\|f\|_{H_0^2} \|u\|_{H_0^2},$$

cioé

$$|\lambda| \|u\|_{H_0^2} \leq 3\|f\|_{H_0^2}.$$

I precedenti argomenti mostrano anche che A è simmetrico in $H_0^2(0,1)$, perchè

$$\begin{aligned}
\langle Au, v \rangle \quad &= -\int_0^1 (x^2(1-x)^2 u^{(4)}(x))'' \bar{v}''(x) dx \\
= \quad & -\left[(x^2(1-x)^2 u^{(4)}(x))' \bar{v}''(x) \right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 (x^2(1-x)^2 u^{(4)}(x))' \bar{v}'''(x) dx \\
= \quad & +\left[x^2(1-x)^2 u^{(4)}(x) \bar{v}'''(x) \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 x^2(1-x)^2 u^{(4)}(x) \bar{v}^{(4)}(x) dx \\
= \quad & \langle u, Av \rangle,
\end{aligned}$$

per ogni $u, v \in \mathcal{D}(A)$. Inoltre

$$\langle Au, u \rangle = -\int_0^1 x^2(1-x)^2 |u^{(4)}(x)|^2 dx \leq 0,$$

cosicché A è non positivo.

D'altra parte, osserviamo che per ogni $u, v \in \mathcal{D}(A)$

$$\langle (I-A)u, v \rangle_{H_0^2} = \int_0^1 u''(x) \bar{v}''(x) dx + \int_0^1 x^2(1-x)^2 u^{(4)}(x) \bar{v}^{(4)}(x) dx.$$

Introduciamo lo spazio di Hilbert V definito da

$$V := \left\{ u \in H_0^2(0,1) : u'' \in H_{loc}^2(0,1), \ \int_0^1 x^2(1-x)^2 |u^{(4)}(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

V coincide col completamento di $C_c^\infty(0,1)$ rispetto alla norma

$$\|u\|_V^2 := \int_0^1 |u''(x)|^2 dx + \int_0^1 x^2(1-x)^2 |u^{(4)}(x)|^2 dx.$$

Osserviamo infatti che per ogni $u \in V$ si ha

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |u''(x)|^2 dx = \Re\mathrm{e} \int_0^1 \bar{u}(x) u^{(4)}(x) dx \\
&= \Re\mathrm{e} \left[\int_0^1 \frac{\bar{u}(x)}{x(1-x)} x(1-x) u^{(4)}(x) dx \right] \\
&\leq \left[\int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{x^2(1-x)^2} dx \cdot \int_0^1 |u^{(4)}(x)|^2 x^2 (1-x)^2 dx \right]^{1/2} < \infty.
\end{aligned}$$

La forma sesquilineare

$$a(u,v) := \int_0^1 u''(x)\bar{v}''(x)dx + \int_0^1 x^2(1-x)^2 u^{(4)}(x)\bar{v}^{(4)}(x)dx$$

è continua su $V \times V$ e coerciva, perchè $a(u,u) = \|u\|_V^2$. Segue che l'operatore B associato ad $a(\cdot,\cdot)$, cfr. Tanabe [7], Theorems 2.22, 2.23, pp. 28-29, è un isomorfismo da V al suo duale V^* e la parte $\tilde{B}$ di B in $H_0^2(0,1)$ è definita positiva ed autoaggiunta. Ma

$$\mathcal{D}(\tilde{B}) = \left\{u \in V : Bu \in H_0^2(0,1)\right\},$$

cosicché l'operatore $\tilde{B}$ è proprio $I - A$. Segue che $\tilde{B} = I - A$ è su $H_0^2(0,1)$. Ció completa la dimostrazione del Teorema. #

Nel prossimo risultato, utilizzando il Teorema 1.1, otteniamo l'analiticitá del semigruppo generato da un operatore naturalmente associato ad A nello spazio $H^2(0,1)$. Si ha, infatti:

Teorema 1.2 *Sia W l'operatore definito da*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(W) = \quad & \{u \in H^2(0,1); u^{(4)} \text{ esiste nel senso delle distribuzioni e} \\ & x^2(1-x)^2u^{(4)} \in H_0^2(0,1)\}, \\ W_u = \quad & -x^2(1-x)^2u^{(4)}, \quad u \in \mathcal{D}(W). \end{aligned}$$

Allora W genera un semigruppo analitico in $H^2(0,1)$.

Dimostrazione. Dobbiamo risolvere l'equazione

$$\lambda u(x) + x^2(1-x)^2u^{(4)}(x) = f(x), \tag{1.5}$$

per ogni $f \in H^2(0,1)$ e ogni λ nel settore $\Re\mathrm{e}\ \lambda + |\Im\mathrm{m}\ \lambda| \geq c_0 > 0$, e stimare la norma di u in $H^2(0,1)$.

A tal fine, introduciamo

$$h(x) := f(x) - a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3, \quad x \in [0,1],$$

che appartiene ad $H_0^2(0,1)$ purché

$$\begin{aligned} a_0 &= f(0), \quad a_1 := f'(0), \\ a_2 &= 3f(1) - 3f(0) - 2f'(0) - f'(1), \\ a_3 &= 2f(0) - 2f(1) + f'(0) + f'(1). \end{aligned}$$

Sia

$$p(x) = \sum_{i=0}^{3} a_i \cdot x^i.$$

Come conseguenza del Teorema 1.1, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Re\text{e}\ \lambda + |\Im\text{m}\ \lambda| \geq c_0 > 0$ esiste una unica $u \in \mathcal{D}(A)$ tale che

$$\lambda u(x) + x^2(1-x)^2 u(x) = h(x). \tag{1.6}$$

Ció significa che $u \in H_0^2(0,1)$, $u'' \in H_{loc}^2(0,1)$ e $x^2(1-x)^2 u^{(4)} \in H_0^2(0,1)$. Ma la (1.6) è riscritta

$$\lambda \left[u(x) + \frac{p(x)}{\lambda} \right] + x^2(1-x)^2 \left[u(x) + \frac{p(x)}{\lambda} \right]^{(4)} = f(x).$$

Cosí $w := u + p/\lambda \in H^2(0,1)$ risolve l'equazione (1.5) con le desiderate condizioni ai limiti. Inoltre, se $H^2(0,1)$ è munito del prodotto interno

$$\langle w_1, w_2 \rangle := \sum_{i=0}^{2} \langle w_1^{(i)}, w_2^{(i)} \rangle_{L^2} + \sum_{i=0}^{1} \left\{ w_1^{(i)}(0) \bar{w}_2^{(i)}(0) + w_1^{(i)}(1) \bar{w}_2^{(i)}(1) \right\},$$

si ha

$$\|w\|_{H^2} \leq \|u\|_{H^2} + \left\| \frac{p}{\lambda} \right\|_{H^2}.$$

Ma

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2} &\leq C(1+|\lambda|)^{-1} \|f - p\|_{H^2} + \frac{1}{|\lambda|} \|p\|_{H^2} \\ &\leq C'(1+|\lambda|)^{-1} \|f\|_{H^2}, \end{aligned}$$

in virtú della definizione dei coefficienti a_i in $p(x)$ e della stima

$$|f^{(k)}(j)| \leq C \left(\sum_{h=0}^{2} \|f^{(h)}\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}, \quad k = 0, 1.$$

Poiché l'unicitá della soluzione segue facilmente dal Teorema 1.1, ció conclude la prova della nostra asserzione. #

2 Il caso generale

Sia $n \in \mathbb{N}$. Denotiamo con $H_0^n(0,1)$ lo spazio di Sobolev con prodotto interno

$$\langle u, v \rangle_n = \langle u, v \rangle = \int_0^1 u^{(n)}(x) \bar{v}^n(x) dx,$$

equivalente a

$$\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 u^{(k)}(x) \bar{v}^{(k)}(x) dx, \quad u, v \in H_0^n(0,1).$$

Si ha

Teorema 2.1 *Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $\alpha \in H_0^n(0,1)$*

$$\alpha(x) = p(x)x^n(1-x)^n,$$

dove $p(\cdot) \in C^\infty([0,1])$, $p(x) > 0$ su $[0,1]$. Allora l'operatore A_n in $H_0^n(0,1)$ dato da

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A_n) &:= \left\{ u \in H_0^n(0,1) : u^{(n)} \in H_{loc}^n(0,1),\ \alpha u^{(2n)} \in H_0^n(0,1) \right\}, \\ A_n u &:= (-1)^{n+1}\alpha u^{(2n)}, \quad u \in \mathcal{D}(A_n), \end{aligned}$$

genera un semigruppo analitico su $H_0^n(0,1)$.

Dimostrazione. Si seguono le linee di prova del Teorema 1.1, mostrando che l'operatore $(A_n, \mathcal{D}(A_n))$ è autoaggiunto non positivo in $H_0^n(0,1)$.

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Re\mathrm{e}\ \lambda > 0$. Sia $u \in \mathcal{D}(A_n)$ e

$$\lambda u(x) + (-1)^n \alpha(x) u^{(2n)}(x) = f(x), \quad f \in H_0^n(0,1), \tag{2.1}$$

allora

$$\lambda \frac{u(x)}{\alpha(x)} + (-1)^n u^{(2n)}(x) = \frac{f(x)}{\alpha(x)}, \quad x \in (0,1). \tag{2.2}$$

Pertanto, dalla (2.2) deduciamo

$$\lambda \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{\alpha(x)} dx + \int_0^1 |u^{(n)}(x)|^2 dx = \int_0^1 \frac{f(x)\bar{u}(x)}{\alpha(x)} dx. \tag{2.3}$$

Prendendo la parte reale e la parte immaginaria in (2.3) si ottiene

$$\begin{aligned} &(\Re\mathrm{e}\ \lambda + |\Im\mathrm{m}\ \lambda|) \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{\alpha(x)} dx + \|u^{(n)}\|_{L^2}^2 \\ &\quad \le 2 \left(\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{\alpha(x)} dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{\alpha(x)} dx \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

cosicché

$$|\lambda| \left(\int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{\alpha(x)} dx \right)^{1/2} \le C\|f\|_{H_0^n},$$

in forza della disuguaglianza di Hardy (Lemma 1.1). Moltiplicando la (2.1) per $(-1)^n \bar{u}^{(2n)}$ ed integrando su (0,1), abbiamo

$$(-1)^n \lambda \int_0^1 u(x) u^{(2n)}(x) dx + \int_0^1 \alpha(x) |u^{(2n)}(x)|^2 dx = (-1)^n \int_0^1 f(x) \bar{u}^{(2n)}(x) dx.$$

Segue che

$$\lambda \int_0^1 |u^{(n)}(x)|^2 dx + \int_0^1 \alpha(x) |u^{(2n)}(x)|^2 dx = (-1)^n \int_0^1 f(x) \bar{u}^{(2n)}(x) dx.$$

Prendiamo parte reale e parte immaginaria nell'ultima equazione. Allora deduciamo facilmente

$$\begin{aligned}
&(\Re\mathrm{e}\ \lambda + |\Im\mathrm{m}\ \lambda|)\|u^{(n)}\|_{L^2}^2 + \int_0^1 \alpha(x)|u^{(2n)}(x)|^2 dx \\
&\leq 2\int_0^1 \frac{|f(x)|}{\sqrt{\alpha(x)}}\sqrt{\alpha(x)}|u^{(2n)}(x)|^2 dx \\
&\leq C\|f\|_{H_0^n}\left(\int_0^1 \alpha(x)|u^{(2n)}(x)|^2 dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\left(\int_0^1 \alpha(x)|u^{(2n)}(x)|^2 dx\right)^{1/2} \leq C\|f\|_{H_0^n}.$$

Ma allora, da

$$(-1)^n\int_0^1 f(x)\bar{u}^{(2n)}(x)dx = \int_0^1 f^{(n)}(x)\bar{u}^{(n)}(x)dx$$

segue

$$\begin{aligned}
(\Re\mathrm{e}\ \lambda + |\Im\mathrm{m}\ \lambda|)\|u^{(n)}\|_{L^2}^2 + \int_0^1 \alpha(x)|u^{(2n)}(x)|^2 dx = \Re\mathrm{e}\ \int_0^1 f^{(n)}(x)\bar{u}^{(n)}(x)dx \\
+ \left|\Im\mathrm{m}\ \int_0^1 f^{(n)}(x)\bar{u}^{(n)}(x)dx\right|
\end{aligned}$$

e quindi

$$(\Re\mathrm{e}\ \lambda + |\Im\mathrm{m}\ \lambda|)\|u\|_{H_0^n}^2 \leq 2\|u\|_{H_0^n}\|f\|_{H_0^n},$$

cioé

$$|\lambda|\|u\|_{H_0^n} \leq C\|f\|_{H_0^n}. \tag{2.4}$$

Gli argomenti precedenti mostrano che A_n è simmetrico. Possiamo infatti integrare ripetutamente per parti, ottenendo

$$\begin{aligned}
\langle A_n u, v\rangle &= (-1)^{n+1}\int_0^1 (\alpha u^{(2n)})^{(n)}(x)\bar{v}^{(n)}(x)dx \\
&= -\int_0^1 (\alpha(x)u^{(2n)}(x))\bar{v}^{(2n)}(x)dx \\
&= -\int_0^1 u^{(2n)}(x)(\alpha(x)\bar{v}^{(2n)}(x))dx \\
&= (-1)^{n+1}\int_0^1 u^{(n)}(x)(\alpha\bar{v}^{(2n)})^{(n)}(x)dx \\
&= (-1)^{n+1}\langle u, \alpha\bar{v}^{(2n)}\rangle
\end{aligned}$$

per ogni $u, v \in \mathcal{D}(A_n)$. Segue che

$$\langle A_n u, v\rangle = \langle u, A_n v\rangle.$$

Inoltre

$$\langle A_n u, u\rangle = -\int_0^1 \alpha(x)u^{(2n)}(x)\bar{u}^{(2n)}(x)dx \leq 0,$$

e cosí A_n è non positivo.

D'altra parte, per ogni $u, v \in \mathcal{D}(A_n)$,

$$\langle (I - A_n)u, v\rangle = \int_0^1 u^{(n)}(x)\bar{v}^{(n)}(x)dx + \int_0^1 \alpha(x)u^{(2n)}(x)\bar{v}^{(2n)}(x)dx.$$

Introduciamo lo spazio di Hilbert V_n mediante

$$V_n := \left\{ u \in H_0^n : u^{(n)} \in H_{loc}^n(0,1),\ \int_0^1 \alpha(x)|u^{(2n)}(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

V_n coincide col completamento di $C_c^\infty(0,1)$ rispetto alla norma

$$\|u\|_{V_n}^2 := \int_0^1 |u^{(n)}(x)|^2 dx + \int_0^1 \alpha(x)|u^{(2n)}(x)|^2 dx.$$

La forma sesquilineare

$$a_n(u,v) := \int_0^1 u^{(n)}(x)\bar{v}^{(n)}(x)dx + \int_0^1 \alpha(x)u^{(2n)}(x)\bar{v}^{(2n)}(x)dx$$

è continua su $V_n \times V_n$ ed è coerciva, perchè $\|u\|_{V_n}^2 = a_n(u,u)$. Cosí, l'operatore B_n associato ad $a_n(\cdot,\cdot)$, cfr. sempre la monografia [7], pp. 28-29, è un isomorfismo da V_n al suo duale V_n^* e la parte $\tilde{B}_n$ di B_n in $H_0^n(0,1)$ è autoaggiunta definita positiva. Ma

$$\mathcal{D}(\tilde{B}_n) = (u \in V_n : B_n u \in H_0^n(0,1))$$

e cosí l'operatore $\tilde{B}_n$ è proprio $I - A_n$. Di qui, $\tilde{B}_n = I - A_n$ è suriettivo. Con questo, il Teorema 2.1 è provato. #

Corollario 2.2 *Sotto le assunzioni del Teorema 2.1, l'operatore W_n definito da*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(W_n) &= \{u \in H^n(0,1) : u^{(2n)} \text{ esiste nel senso delle distribuzioni e} \\ &\quad \alpha u^{(2n)} \in H_0^n(0,1)\}, \\ W_n u &:= (-1)^{n+1}\alpha u^{(2n)}, \quad u \in \mathcal{D}(W_n), \end{aligned}$$

genera un semigruppo analitico in $H^n(0,1)$.

Dimostrazione. Per risolvere l'equazione

$$\lambda u + (-1)^n \alpha u^{(2n)} = f \in H^n(0,1), \tag{2.5}$$

con $u \in \mathcal{D}(W_n)$, si introduce

$$h(x) = f(x) - p(x), \quad x \in [0,1],$$

dove

$$p(x) := \sum_{i=0}^{2n-1} a_i x^i,$$

i coefficienti a_i essendo univocamente determinati in modo che h appartenga a $H_0^n(0,1)$, cioé della condizione

$$f^{(j)}(i) = p^{(j)}(i), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1, \quad i = 0, 1.$$

Come conseguenza del Teorema 2.1, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $\Re\mathrm{e}\,\lambda > 0$, esiste una unica $u \in \mathcal{D}(A_n)$ tale che

$$\lambda u(x) + (-1)^n \alpha(x) u^{(2n)}(x) = h(x), \quad x \in (0,1).$$

Ció significa che

$$\lambda \left[u(x) + \frac{p(x)}{\lambda} \right] + (-1)^n \alpha(x) \left[u(x) + \frac{p(x)}{\lambda} \right]^{(2n)} (x) = f(x), \quad x \in (0,1)$$

e cosí $w := u + p/\lambda \in H^n(0,1)$ risolve (2.6). Inoltre, se $H^n(0,1)$ è munito del prodotto interno

$$\langle w_1, w_2 \rangle_{H^n} := \sum_{i=1}^{n} \left\langle w_1^{(i)}, w_2^{(i)} \right\rangle_{L^2} + \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ w_1^{(i)}(0) \bar{w}_2^{(i)}(0) + w_1^{(i)}(1) \bar{w}_2^{(i)}(1) \right\},$$

allora

$$\begin{aligned} \|w\|_{H^n} &\leq C_1 (1 + |\lambda|)^{-1} \|f - p\|_{H^n} + \frac{1}{|\lambda|} \|p\|_{H^n} \\ &\leq C_2 (1 + |\lambda|)^{-1} \|f\|_{H^n}, \end{aligned}$$

se $\Re\mathrm{e}\,\lambda$ grande, per opportune costanti C_1, C_2. Ció segue dalla espressione dei coefficienti nella funzione $p(x)$ e dalle stime

$$\left| f^{(h)}(j) \right| \leq C_3 \left(\sum_{k=0}^{n} \left\| f^{(k)} \right\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}, \quad h = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1.$$

Vediamo ora di migliorare il Teorema 2.1 ed il suo corollario: migliorarlo nel senso di indebolire l'assunzione su $\alpha(x)$. Si ha

Teorema 2.3 *Sia $\alpha \in H_0^n(0,1)$, $\alpha(x) > 0$, su $(0,1)$ e*

$$\alpha(x) \geq C x^{2n} (1-x)^{2n}, \quad C > 0, \ x \in (0,1), \tag{2.6}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2n}(1-x)^{2n}}{\alpha(x)^2} dx < \infty. \tag{2.7}$$

Allora l'operatore A_n è autoaggiunto non positivo in $H_0^n(0,1)$ e cosí genera un semigruppo analitico in $H_0^n(0,1)$.

Dimostrazione. Sia $\Re\mathrm{e}\,\lambda > 0$. Da

$$\lambda u + (-1)^n \alpha(x) u^{(2n)}(x) = f(x)$$

segue

$$\lambda \frac{u}{\alpha} + (-1)^n u^{(2n)} = \frac{f}{\alpha}.$$

Se $0 < y < x < 1$, allora $\forall u \in \mathcal{D}(A_n)$

$$\left| u^{(2n-1)}(x) - u^{(2n-1}(y) \right| = \left| \int_y^x \frac{1}{\alpha(t)} \alpha(t) u^{(2n)}(t) dt \right|$$

$$\leq \left(\int_y^x \frac{t^{2n}(1-t)^{2n}}{\alpha(t)^2} dt \right)^{1/2} \left(\int_y^x \frac{\left|\alpha(t) u^{(2n)}(t)\right|^2}{t^{2n}(1-t)^{2n}} dt \right)^{1/2}.$$

L'ultimo integrale si maggiora con

$$\int_0^1 \frac{\alpha(t)^2 \left|u^{(2n)}(t)\right|^2}{t^{2n}(1-t)^{2n}} dt,$$

che è finito perchè $\alpha u^{(2n)} \in H_0^n(0,1)$.

L'assunzione (2.7) implica che

$$\exists \lim_{x \to 0,1} u^{(2n-1)}(x) \in \mathbb{C}.$$

Possiamo quindi integrare per parti e pertanto per ogni $u \in \mathcal{D}(A_n)$ vale

$$\int_0^1 u^{(2n)}(x) \bar{u}(x) dx = (-1)^n \int_0^1 \left| u^{(n)}(x) \right|^2 dx.$$

Si ha cosí

$$\lambda \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{\alpha(x)} dx + \int_0^1 \left| u^{(n)}(x) \right|^2 dx = \int_0^1 \frac{f(x)\bar{u}(x)}{\alpha(x)} dx. \tag{2.8}$$

Si noti che, in forza di (2.6),

$$\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{\alpha(x)} dx \leq C \int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{x^{2n}(1-x)^{2n}} dx \leq C' \|f\|_{H_0^n}^2.$$

Prendendo nella (2.8) parte reale e parte immaginaria, si deduce

$$(\Re\mathrm{e}\,\lambda + |\Im\mathrm{m}\,\lambda|) \int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{\alpha(x)} dx + \|u\|_{H_0^n}^2 \leq 2 \left(\int_0^1 \frac{|f(x)|^2}{\alpha(x)} dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{\alpha(x)} dx \right)^{1/2},$$

cioé

$$!\lambda| \left(\int_0^1 \frac{|u(x)|^2}{\alpha(x)} dx \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{H_0^n}.$$

Analogamente, si ottiene

$$(-1)^n \lambda \int_0^1 u(x)\bar{u}^{(2n)} dx + \int_0^1 \alpha(x) \left| u^{(2n)}(x) \right|^2 dx = (-1)^n \int_0^1 f(x)\bar{u}^{(2n)}(x) dx. \tag{2.9}$$

Si noti che l'integrale

$$\int_0^1 \alpha(x) \left| u^{(2n)}(x) \right|^2 dx$$

converge, perchè $\alpha u^{(2n)} \in H_0^n(0,1)$ implica

$$\begin{aligned} \int_0^1 \alpha(x) \left| u^{(2n)}(x) \right|^2 dx &= \int_0^1 \frac{\alpha(x)^2 \left| u^{(2n)}(x) \right|^2}{\alpha(x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2n}(1-x)^{2n}}{\alpha(x)} \frac{\alpha(x)^2 \left| u^{(2n)}(x) \right|^2}{x^{2n}(1-x)^{2n}} dx \\ &\le \text{ (per l'assunzione (2.6))} \\ &\le C \int_0^1 \frac{\left| \alpha(x) u^{(2n)}(x) \right|^2}{x^{2n}(1-x)^{2n}} dx < \infty. \end{aligned}$$

Prendendo parte reale e parte immaginaria nella (2.9), si ottiene

$$\left(\int_0^1 \alpha(x) \left| u^{(2n)}(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \le C \|f\|_{H_0^n}.$$

D'altra parte, integrando per parti nel membro a destra di (2.9), si ha

$$\lambda \int_0^1 \left| u^{(n)}(x) \right|^2 dx + \int_0^1 \alpha(x) \left| u^{(2n)}(x) \right|^2 dx = \int_0^1 f^{(n)}(x)\bar{u}^{(n)}(x) dx$$

c cosí

$$|\lambda| \|u\|_{H_0^n} \le C \|f\|_{H_0^n}.$$

La dimostrazione che $I - A_n$ sia suriettiva è come quella nel Teorema 2.1. Ció completa la prova. #

Corollario 2.4 *Nelle ipotesi del Teorema 2.3, l'operatore* $W_n = (-1)^{n+1} \alpha u^{(2n)}$ *genera un semigruppo analitico in* $H^n(0,1)$.

Esempio. Come $\alpha(x)$ potremmo prendere $\alpha(x) = x^m(1-x)^m$, con $|m-n| < 1/2$.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Brezis, Analisi Funzionale, ed. Liguori, 1983.

[2] A. Favini, J.A. Goldstein, S. Romanelli, *An analitic semigroup associated to a degenerate evolution equation*, in Stochastic Processes and Functional Analysis, J.A. Goldstein, N.E. Gretsky and J.J. Uhl eds., M. Dekker, New York, pp. 85–100, 1997.

[3] A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli, *Fourth order ordinary differential operators with general Wentzell boundary conditions*, in corso di stampa in Differential Equations: Inverse and Direct Problems, A. Favini and A. Lorenzi eds., Taylor and Francis, New York, 2006.

[4] A. Favini, G.R. Goldstein, J.A. Goldstein, S. Romanelli, *Fourth order operators with general Wentzell boundary conditions*, in corso di stampa in Rocky Mountains J. Math.

[5] W. Feller, *The parabolic differential equations and the associated semigroups of transformation*, Annals of Math. (2) 55, pp. 468–519, 1952.

[6] G. Fichera, *On a degenerate evaluation problem*, in PDE with real analysis, C.H. Beheger e A. Jeffrey eds., Pitman, pp. 15–42, 1992.

[7] H. Tanabe, Equations of Evolutions, Pitman, London, 1979.

[8] J. Tidblom, *L^p Hardy inequalities in general domains*, Research reports in Mathematics, no. 4, Stockholm University, 2003.