SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico 2005-06

Fausto Ferrari

REGOLARITÀ DELLE FRONTIERE LIBERE PIATTE IN PROBLEMI A DUE FASI PER OPERATORI ELLITTICI

2 marzo 2006

Abstract

In this note we recall some results concerning the regularity of the free boundary in tho-phase problems for elliptic operators. In particular we describe some geometric techniques applied in order to prove, in a series of papers, that flat free boundaries (in a suitable sense) are smooth. Moreover we introduce some recent results contained in a joint paper with Sandro Salsa from Politenico of Milan.

1. Introduzione

Il problema a due fasi che prendiamo in esame è il seguente:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}u = 0, & \Omega^+(u) = \{x \in \Omega : \ u(x > 0)\}, \\ \mathcal{L}u = 0, & \Omega^-(u) = \{x \in \Omega : \ u(x \leq 0)\}^o, \\ u = 0, & \mathcal{F}(u) = \partial\Omega^+(u), \\ u_\nu^+ = G(u_\nu^-), & \mathcal{F}(u), \end{cases}
$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme aperto, $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ è una funzione continua,

$$
(2) \qquad \mathcal{L}u(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k},
$$

e $\mathcal{F}(u)$ è la *frontiera libera* del problema. Con u_ν^+ e u_ν^- indichiamo invece le derivate direzionali rispetto alla normale entrante ν, rispettivamente in $\Omega^+(u)$ per $u^+ = max\{u, 0\}$, e in $\Omega^-(u)$ per $u^- = max\{-u, 0\}$.

In questa nota descriviamo alcuni metodi geometrici utilizzati nello studio della regolarità della frontiera libera delle soluzioni di problemi a due fasi. Inoltre presentiamo alcuni risultati, contenuti in un lavoro con Sandro Salsa, del Politenico di Milano [11], inerenti la regolarità della frontiera libera delle soluzioni del problema (1) per operatori $\mathcal{L}$ uniformemente ellittici a coefficienti variabili.

Più precisamente assumiamo che $A = (a_{ij}(x))_{1 \leq i \leq n}$, sia una matrice di funzioni, simmetrica, $A^T = A$, con $A \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, e tale che esiste $\Lambda > 0$, per cui per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$
\Lambda^{-1}||\xi||^2 \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq \Lambda ||\xi||^2.
$$

Supponiamo inoltre che $B = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$ e

$$
B \in L^\infty(\Omega).
$$

In particolare, siamo interessati ad alcuni risultati inerenti il guadagno di regolarità dele frontiere libere *piatte*, cioè le frontiere libere che possono essere considerate vicine a grafici di funzioni Lipschitz.

L'approccio a cui ci ispiriamo è analogo a quello introdotto da Luis Caffarelli per studiare il problema (1) quando $\mathcal{L} = \Delta$. Tali risultati sono descritti in [2], [3] e [4]. In questa corrente di ricerca, inoltre, si inseriscono altri risultati validi in classi più ampie di operatori lineari, [7] e [6]. Mentre per quanto riguarda gli operatori fortemente non lineari (*fully nonlinear*), ricordiamo i contributi contenuti in [12], [13], [8] e [10].

In tutti i lavori citati si considerano frontiere libere di ridotta regolarità geometrica. In un certo senso, si potrebbe parlare di regolarità *minimale*. D'altra parte, pur partendo da soluzioni in cui le condizioni sulla frontiera libera sono assegnate su insiemi $\mathcal{F}(u)$ non lisci, si parla infatti necessariamente di formulazione debole, si perviene comunque un ad guadagno di regolarità di $\mathcal{F}(u)$.

Per meglio comprendere le problematiche connesse allo studio della regolarità della frontiera libera, richiamiamo alcuni esempi. Supponiamo che le soluzioni del seguente problema a due fasi, vedi [2],

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega^+(u) = \{x \in \Omega : \ u(x > 0)\} \\ \Delta u = 0, & \Omega^-(u) = \{x \in \Omega : \ u(x \leq 0)\}^o \\ u = 0, & \mathcal{F}(u) = \partial\Omega^+(u) \\ u_\nu^+ = G(u_\nu^-), & \mathcal{F}(u), \end{cases} \tag{3}$$

abbiano frontiera libera individuata dal grafico di una funzione Lipschitz. Allora, sotto ultriori ipotesi di monotonia imposte su G, si prova che in realtà la frontiera libera $\mathcal{F}(u)$ è il grafico di una funzione $C^{1,\gamma}$.

Un altra ipotesi di rilievo, sempre per il problema a due fasi (3), vedi [3], inerente $\mathcal{F}(u)$ è la seguente. Per quanto localmente irregolare possa essere la frontiera libera $\mathcal{F}(u)$, assumiamo che sia comunque sufficientemente vicina al grafico di una funzione Lipschitz. In tal caso parleremo di frontiera libera *piatta*. Ancora una volta, sotto ulteriori ipotesi di non degenerazione della fase positiva e di piattezza del grafico Lipschitz, si dimostra che la frontiera libera è localmente il grafico di una funzione di classe $C^{1,\gamma}$.

Da questo punto di vista la formulazione del problema, in particolare la definizione di soluzione nonché interpretazione delle condizioni assegnate sulla frontiera libera stessa, siano essenziali. Infatti, vedi [9], la frontiera libera non è un dato del problema e tuttavia si richiede che le soluzioni di (1) soddisfino su tale insieme, a priori incognito, la condizione $G(u_\nu^-) = u_\nu^+$.

Soffermiamoci quindi sulla formulazione debole delle condizione assegnate sulla frontiera libera. Ricordiamo a questo proposito che la soluzione del problema di Dirichlet ha significato per insiemi aventi frontiera con regolarità inferiore a C^1. D'altra parte, le derivate direzionali di queste soluzioni potrebbero non essere definite puntualmente sulla frontiera dell'insieme. Si pensi al caso in cui la frontiera è grafico di una funzione Lipschitz.

Per superare queste ed altre difficoltà, Caffarelli introdusse la nozione di soluzione debole del problema a due fasi. In particolare, per quanto concerne le condizioni sulla frontiera libera, egli diede la seguente definizione. Scrivere $G(u_\nu^-) = u_\nu^+$ in $\mathcal{F}(u)$ significa che per ogni punto regolare di $\mathcal{F}(u)$, (dicesi regolare ogni punto che può essere toccato da una palla $B \subset \Omega^+(u)$ vel $B \subset \Omega^-(u)$), e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, se

$$u(x) = \alpha\langle \nu, x - x_0\rangle^+ - \beta\langle \nu, x - x_0\rangle^- + o(\mid x - x_0 \mid),$$

$x \to x_0$, allora $G(\beta) = \alpha$.

Formulazioni equivalenti o più deboli delle condizioni di frontiera libera sono descritte in [5].

Se $G(u_\nu^-) = u_\nu^+$ su $\mathcal{F}(u)$, nel senso debole appena descritto, e $u \in C(\Omega)$ è soluzione viscosa di $\Delta u = 0$, rispettivamente in $\Omega^+(u)$ e in $\Omega^-(u)$, allora, ammettendo ulteriori ipotesi di monotonia su G, i risultati inerenti il guadagno di regolarità precedentemente esposti possono essere dimostrati.

In particolare, nella sezione successiva, ci soffermeremo sulle tecniche impiegate per ottenere il guadagno di regolarità in presenza di frontiere piatte. Per una descrizione sommaria del caso in cui dall'ipotesi di frontiera libera Lipschitz segue la regolarizzazione frontiera libera fino a $C^{1,\gamma}$ e, per un eventuale approfondimento, rimandiamo a [9] e agli articoli originali precedentemente citati. Mentre nella terza sezione preciseremo alcune relazioni tra diverse nozioni di monotonia per funzioni armoniche. Infine, nell'ultima sezione, presenteremo alcuni recenti risultati, vedi [11] sulla regolarità della frontiera libera.

2. Una nozione di funzione monotona in senso debole. Le funzioni $\epsilon-$monotone

Una delle idee caratterizzanti il lavoro descritto in [2] è l'uso della disuguaglianza di Harnack. Per mezzo di tale disuguaglianza individuiamo la propagazione di alcune informazioni geometriche delle soluzioni del problema a due fasi.

In particolare, in [3], Caffarelli dimostra che l'ampiezza del cono di direzioni lungo le quali la funzione soluzione è monotona in $B(0,1)$, può essere ulteriormente incrementata e trasmessa fino alla frontiera libera con un guadagno di ampiezza costante in $B(0,1/2)$.

Al fine di dimostrare questo risultato, la nozione di funzione monotona viene interpretata geometricamente, mettendo in evidenza il seguente aspetto.

Se esiste un numero positivo ϵ_0 per cui ogni $\epsilon < \epsilon_0$ e per ogni $\tau \in \Gamma(e,\theta/2)$, $\mid \tau \mid = 1$ e per ogni $x \in B(0,1-\epsilon)$, allora diremo che u è monotona lungo le direzioni di $\tau \in \Gamma(e,\theta)$, in $B(0,1)$ se per ogni $x \in B(0,1-\epsilon)$

$$\sup_{y \in B(x,\epsilon \sin\frac{\theta}{2})} u(y-\epsilon\tau) \leq u(x).$$

Questa caratterizzazione della monotonia di una funzione lungo le direzioni di un cono può essere ulteriormente indebolita ed inoltre permette di studiare le proprietà della funzione $u \in C(\Omega)$ a partire dalla funzione

$$v(x) = \sup_{y \in B(x,\epsilon\varphi(x))} u(y-\epsilon\tau) \leq u(x),$$

dove $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione regolare ausiliaria.

Soffermiamoci brevemente sul primo dei due aspetti introducendo la definizione di funzione $\epsilon-$ monotona lungo un insieme di direzioni $\tau \in \Gamma(e,\theta)$.

Diremo che u è $\epsilon-$monotona lungo le direzioni di $\Gamma(e,\theta)$ in $B(0,1)$ se per ogni $\lambda \geq \epsilon$, per ogni $x \in B(0,1-\epsilon)$ e per ogni $\tau \in \Gamma(e,\theta/2)$, $\mid \tau \mid = 1$ vale

$$\sup_{y \in B(x,\lambda \sin\frac{\theta}{2})} u(y-\lambda\tau) \leq u(x).$$

Ovvero, in modo sostanzialmente equivalente, se per ogni $\lambda \geq \epsilon$, per ogni $\tau \in \Gamma(e,\theta)$, $\mid \tau \mid = 1$, e per ogni $x \in B(0,1)$ si ha:

$$u(x+\lambda\tau) \geq u(x),$$

allora diremo che u è $\epsilon-$monotona lungo le direzioni di $\Gamma(e,\theta)$ in $B(0,1)$. Su questa nozione torneremo più avanti.

Soffermiamoci ora sulla funzione v. Commentiamo, in particolare, il significato geometrico della disuguaglianza $v(x) \leq u(x)$, almeno quando essa è soddisfatta, e richiamiamo rapidamente l'idea di base che conduce alla dimostrazione del guadagno di regolarità della frontiera libera, rispetto all'ipotesi Lipschitz iniziale.

Se u è monotona crescente lungo le direzioni di un cono $\Gamma(e,\theta)$ e $v(x) \leq u(x)$, allora u è monotona lungo le direzioni di un cono $\Gamma(e,\theta')$ la cui ampiezza è maggiore di quella relativa, $\theta' > \theta$, almeno quando $\varphi > 1$. Infatti se $\phi \geq 1+\mu_0 > 1$, e $v(x) \leq u(x)$, allora posto $\sin\theta' = \sin\theta(1+\mu_0)$ possiamo concludere

$$u(x) \geq v(x) \geq \sup_{B(x,\epsilon(1+\mu_0))} u(y-\epsilon\tau) > \sup_{B(x,\epsilon\sin\theta)} u(y-\epsilon\tau).$$

Quindi da

$$\mu_0 \sin\theta = \sin\theta' - \sin\theta = 2\sin\frac{\theta'-\theta}{2}\cos\frac{\theta'+\theta}{2}$$

segue

$$\sin\frac{\theta'-\theta}{2} = \mu_0 \frac{\sin\theta}{2\cos\frac{\theta'+\theta}{2}}$$

e pertanto assumendo che θ sia vicino a $\pi/2$ e che la distanza di θ' da θ sia piccola, allora

$$\theta' - \theta \sim c\mu_0.$$

Comunque sia, per ogni $\theta \in [0,\pi/2]$ vale

$$\theta' - \theta \geq \mu_0 \sin\theta.$$

Ciò significa che l'apertura del nuovo cono lungo le cui direzioni la funzione è monotona, è stata incrementata di una frazione costante dell'ampiezza del cono iniziale.

La prova che $v(x) \leq u(x)$ invece si basa sul confronto tra funzioni armoniche e in particolare sul fatto che $v(x)$ è subarmonica. Nel caso in cui $\varphi(x) = \epsilon$, cioè le palle abbiano raggio costante, allora è abbastanza semplice verificare che v è subarmonica. Mentre nel caso in cui φ non sia una costante la dimostrazione non è immediata e in particolare, affinché ciò sia vero, occorre che $\varphi \in C^2(\Omega)$ e:

$$\varphi(x)\Delta\varphi \geq C \mid \nabla\varphi \mid^2,$$

per $C > 0$ sufficientemente grande.

Allora con questo risultato si può dimostrare il seguente lemma.

Lemma 2.1. *Siano $u_1 = u(x-\tau)$ e $u_2(x) = u$ con u soluzione del problema di frontiera libera in $B(0,1)$, $\mathcal{F}(u)$ Lipschitz e $0 \in \mathcal{F}(u)$. Supponiamo che in $B(0, 1-\epsilon)$*

$$v_\epsilon(x) = \sup_{B(x,\epsilon)} u_1 \le u_2(x)$$

e che per $b > 0$,

$$v_\epsilon(x_0) \le (1-b\epsilon)u_2(x_0), \quad (x_0 = \frac{3}{4}e_n),$$

in $B(x_0, \frac{1}{8}) \subset \Omega^+(u_1.)$

Allora, per ϵ, sufficientemente piccolo, esiste $\bar{\mu}$ ($\bar{\mu} = \bar{\mu}(n, Lip(\mathcal{F}(u)))$) tale che in $B(0,1/2)$

$$\sup_{B(x,(1+\bar{\mu}b)\epsilon)} u_1 = v_{(1+\bar{\mu}b)\epsilon}(x) \le u_2(x).$$

Questo risultato può essere nuovamente applicato a u su $B(0,1/2)$ riscalando tale funzione di un fattore 2 cioè considerando $u_{(1)}(x) = 2u(2^{-1}x)$ su $B(0,1)$. Infatti $u_{(1)}$ è ancora soluzione del problema di frontiera libera. Pertanto, iterando questo argomento, (lo stesso argomento può essere ripetuto per la parte negativa) si dimostra che la frontiera libera è $C^{1,\gamma}$.

Osserviamo che le ipotesi del precedente risultato si traducono geometricamente nel modo seguente. Se la funzione u è monotona crescente lungo tutte le direzioni di un cono $\Gamma(\theta, e_n)$ su $B(0,1)$ e di più in un intorno di un punto lontano dalla frontiera libera si ha un guadagno di apertura del cono iniziale, allora tale incremento nell'apertura del cono si propaga fino alla frontiera libera.

Dunque la monotonia della funzione si propaga lungo coni sempre più ampi, ovviamente nulla impedisce di considerare la propagazione di qualche altra proprietà lungo i coni, per esempio la $\epsilon-$ monotonia. Questo argomento sarà esaminato nella prossima sezione.

3. Piena monotonia e $\epsilon-$monotonia di funzioni armoniche

Un altro dei risultati che ottenne Caffarelli in [3] e riguardante la $\epsilon-$monotonia, può essere enunciato come segue.

Proposizione 3.1. *Sia $\theta_0 \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Sia u una soluzione viscosa del problema di frontiera libera (3) in $\mathcal{C}_1 = B'(0,1) \times (-1,1)$ con $0 \in \mathcal{F}(u)$ e sia $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ strettamente monotona crescente ed esista $N > 0$, grande, tale che $s^{-N}G(s)$ è decrescente.*

Allora esiste $\epsilon = \epsilon(\theta_0, G)$ tale che se u è $\epsilon-$ monotona in $\mathcal{C}_{1-\epsilon} = B'(0,1-\epsilon)\times(-1+\epsilon, 1-\epsilon)$ lungo ogni direzione $\tau \in \Gamma(\theta_0, e)$, allora u è pienamente monotona in $\mathcal{C}_{1/2} = B'(0,1/2)\times(-1/2,1/2)$ lungo ogni direzione $\tau \in \Gamma(\theta_1, e)$ con $\theta_1 = \theta_1(\theta_0,\epsilon)$. In particolare questo implica che $\mathcal{F}(u)$ è Lipschitz e quindi anche $C^{1,\gamma}$ (applicando i risultati sulla regolarità della frontiera con dato Lipschitz).

Il lemma su cui si basa la precedente proposizione e molti dei risultati ottenuti in [3] è il seguente.

Lemma 3.1. *Siano $\delta > 0$ e u armonica in $B_{M/\delta} = B(0, M/\delta)$, con $(M >> \delta)$. Se in $B_{M/(2\delta)}$*

$$u(x + \lambda\tau) \geq u(x)$$

per ogni λ, con $1 \leq \lambda \leq 1 + \delta$. Allora

$$D_\tau u(0) \geq c(n,\delta)\big(u(\tau) - u(0)\big),$$

purché $M = M(\delta)$ sia sufficientemente grande.

Corollario 3.1. *Se u è armonica in B_1, allora esiste ϵ_0 tale che se*

$$u(x + \lambda\tau) \geq u(x)$$

per ogni $\lambda > \epsilon_0$, allora

$$D_\tau u(0) \geq \frac{c}{\epsilon_0}(u(\epsilon_0\tau) - u(0)).$$

In particolare ciò significa che se u è armonica e $\epsilon-$ monotona in $\Omega^+(u)$, allora u sarà pienamente monotona lontano dalla frontiera libera.

Dimostrazione del Lemma 3.1, (Caffarelli). Definiamo per ogni $1 < \lambda < \frac{M}{2}$

$$h_\lambda(x) = u(x + \lambda\tau) - u(x).$$

h_λ è armonica e non negativa in $B_{M/2}$. Dalla disuguaglianza di Harnack segue che esistono due costanti c_1 e c_2 positive tali che

$$0 < c_1 \leq \frac{h_\lambda(x)}{h_\lambda(y)} \leq c_2,$$

per ogni $x, y \in B_{M/4}$. Supponiamo per semplicità che λ sia intero, $\lambda < \frac{M}{8}$, e $y \in B_{M/8}$. Allora

$$\begin{aligned} h_\lambda(y) &= u(y + \lambda\tau) - u(y) - u(y + (\lambda - 1)\tau) + u(y + (\lambda - 1)\tau) \\ &= h_1(y + (\lambda - 1)\tau) + u(y + (\lambda - 1)\tau) - u(y) \\ &= \sum_{k=1}^{\lambda} h_1(y + (\lambda - k)\tau) = \sum_{j=1}^{\lambda} h_1(y + (j - 1)\tau). \end{aligned} \tag{4}$$

Pertanto, dalla disuguaglianza di Harnack segue

$$\lambda h_1(y) \sim h_\lambda(y).$$

Quindi per ogni $x, y \in B_{M/8}$

$$0 < c_1 \leq \frac{h_\lambda(x)}{\lambda h_1(y)} \leq c_2.$$

Inoltre per $\lambda \geq 2$ reale vale

$$\begin{aligned} h_{[\lambda]-1}(x) &= u(x + ([\lambda] - 1)\tau) - u(x) \leq h_{[\lambda]}(x) \\ &\leq u(x + ([\lambda] + 2)\tau) - u(x) = h_{[\lambda]+2}(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Dunque, per ogni $x, y \in B_{M/8}$ e per ogni λ, $2 \leq \lambda \leq \frac{M}{8}$, vale

$$0 < c_1 \leq \frac{h_\lambda(x)}{\lambda h_1(y)} \leq c_2.$$

Inoltre in $B_{M/8}$, dalle stime di Schauder segue

$$| D_\tau h_\lambda | \leq \frac{c}{M} h_\lambda(0).$$

D'altra parte

$$D_\tau h_\lambda(0) = D_\tau u(\lambda\tau) - D_\tau u(0)$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
& c_1 h_1(0) \leq h_1(2\tau) = u(3\tau) - u(2\tau) = \int_2^3 \frac{d}{ds} u(s\tau) ds \\
& = \int_2^3 \langle \nabla u(s\tau), \tau \rangle ds = \int_2^3 D_\tau u(s\tau) ds \\
& = \int_2^3 D_\tau h(0) ds + D_\tau u(0) \leq \frac{C}{M} \int_2^3 h_s(0) ds + D_\tau u(0) \\
& \frac{C}{M} \int_2^3 s h_1(0) ds + D_\tau u(0) = \frac{5C}{2M} h_1(0) + D_\tau u(0).
\end{aligned} \tag{6}
$$

Pertanto da (6) segue la tesi

$$D_\tau u(0) \geq (c_1 - \frac{5C}{2M}) h_1(0).$$

□

Insomma, se sappiamo che la soluzione del problema di frontiera libera è $\epsilon-$monotona lungo tutte le direzioni di un cono, allora, a patto di partire da coni abbastanza ampi, si riesce a dimostrare che la $\epsilon-$ monotonia può essere migliorata a scapito di una riduzione dell' ampiezza del cono lungo cui la funzione è $\epsilon'-$ monotona, con $\epsilon' < \epsilon$. Se iniziamo con coni abbastanza ampi, allora l'iterazione diadica produce una riduzione non troppo severa dell'apertura dei coni con un miglioramento della $\epsilon-$monotonia che produce la monotonia piena in un cono eventualmente di ampiezza ridotta rispetto a quello di partenza. Come sottoprodotto si ottiene che la frontiera libera è il grafico di una funzione Lipschitz e quindi si riapplicano i risultati sulle frontiere Lipschitz.

La condizione di $\epsilon-$ monotonia di u è in realtà abbastanza onerosa, nel senso che non possiamo aspettarci che sia vera per frontiere libere qualunque. Infatti, in generale, può accadere che anche per frontiere libere che si trovano in un intorno di ordine ϵ del grafico di una funzione Lipschitz si abbia: u^+, $\epsilon-$ monotona lungo $\tau \in \Gamma(\theta, e_n)$ e $\mathcal{F}(u)$ sia contenuta in un $\epsilon-$ intorno di un grafico Lipschitz Σ, individuato da $x_n = f(x')$, con $u^- \equiv 0$ sotto Σ, ma $u^- > 0$ da qualche parte tra Σ e $\mathcal{F}(u)$. In tal caso u^- non è $\epsilon-$ monotona per ogni ϵ.

Quindi per recuperare un risultato analogo a quello contenuto nella Proposizione 3.1 occorre introdurre una condizione di non degenerazione della fase positiva, come proposto nel seguente risultato con riferimento all'ipotesi (i).

Proposizione 3.2. *Sia* u *una soluzione del problema di frontiera libera in* $\mathcal{C}_1 = B'(0,1) \times [-1,1]$ *con* $0 \in \mathcal{F}(u)$. *Supponiamo che:*

(i) *esistono* α_0, α_1 *costanti positive tali che*

$$\alpha_0 \leq u^+(x)/dist(x, \mathcal{F}(u)) \leq \alpha_1,$$

cioè u^+ *è Lipschitz e ha una crescita lineare;*

(ii) G *è crescente, esiste* $N > 0$ *tale* $s^{-N}G(s)$ *è decrescente e* G *è una funzione Lipschitz con* $G(0) > 0$.

Allora esistono $\bar{\theta} < \pi/2$ *e* $\bar{\epsilon}$ *tali che se per* $\epsilon < \bar{\epsilon}$, $\mathcal{F}(u)$ *è contenuto in un* $\epsilon-$ *intorno del grafico di una funzione Lipschitz* $x_n = f(x')$, *di norma*

$$Lip(f) \leq \tan(\frac{\pi}{2} - \bar{\theta}),$$

allora u^+ *è pienamente monotona in* $\mathcal{C}_{1/2}$ *lungo ogni direzione* $\tau \in \Gamma(\theta_1, e_n)$, *con* $\theta_1 = \theta_1(\theta_0, \epsilon_0)$. *In particolare* $\mathcal{F}(u)$ *è il grafico di una funzione Lipschitz e quindi anche di una funzione* $C^{1,\gamma}$.

Osserviamo inoltre che questo teorema si applica a soluzioni la cui frontiera libera non è a priori il grafico di una funzione, purché $\mathcal{F}(u)$ sia vicina al grafico di una funzione Lipschitz, da cui l'aggettivo *piatto*. Questa vicinanza, congiuntamente all'ipotesi di non degenerazione della fase positiva, permette di dedurre che u è $\epsilon-$monotona e quindi di rincondurre il problema al caso di funzioni $\epsilon-$monotone su tutto il dominio.

D'altra parte se u è $\epsilon-$monotona in ogni direzione $\tau \in \Gamma(\theta, e)$, allora le superficie di livello $\partial\{u > t\}$ sono contenute in un $(1 - \sin\theta)\epsilon$ intorno del grafico di una funzione Lipschitz con costante di Lipschitz uguale a $\cot\theta$.

La dimostrazione della Proposizione 3.2 dipende da un lemma in cui si presenta la seguente alternativa, dove K è una costante positiva:

caso (a): $u^-(-\frac{1}{2}e_n) < K\epsilon \sup_{\mathcal{C}_{7/8}} \mid u \mid$;

caso (b): $u^-(-\frac{1}{2}e_n) \geq K\epsilon \sup_{\mathcal{C}_{7/8}} \mid u \mid$.

Nel primo caso si prova che u^+ è $\lambda\epsilon-$ monotona in $\Gamma(\theta - \epsilon^{1/4}, e_n)$, con $\lambda < 1$, cioè migliora la qualità della monotonia a scapito dell'ampiezza del cono in cui la monotonia è verificata.

Nel caso (b) si conclude che u è $c\epsilon^{1/8}-$ monotona in un cono $\Gamma(\theta_1, e_n)$ in un intorno del grafico Σ a cui la frontiera libera è vicina, almeno in una palla di raggio la metà del raggio della palla precedente, ricadendo quindi nelle ipotesi della Proposizione 3.1. L'alternativa (a): è conseguenza della formula di monotonia che trova frequente applicazione nei problemi di frontiera libera e che riportiamo qui sotto, vedi [1] e [4].

Proposizione 3.3. *Siano u_1 e u_2 due funzioni subarmoniche non negative in $C(B_1)$. Supponiamo che $u_1u_2 = 0$ e $u_1(0) = u_2(0) = 0$. Posto per $r \in (0, 1)$*

$$J(r) = \frac{1}{r^4} \int_{B(0,r)} \frac{\mid \nabla u_1(x) \mid^2}{\mid x \mid^{n-2}} dx \int_{B(0,r)} \frac{\mid \nabla u_2(x) \mid^2}{\mid x \mid^{n-2}} dx,$$

allora $J(r)$ è limitata e monotona cresente in r. Inoltre

$$J(r) \leq c(n) \mid\mid u_1 \mid\mid^2_{L^2(B_1)} \mid\mid u_2 \mid\mid^2_{L^2(B_1)}$$

per $r \in (0, \frac{1}{2})$.

4. Alcuni risultati recenti

In alcuni recenti lavori, vedi [6] e [10], abbiamo studiato la regolarità della frontiera libera delle soluzioni di problemi a due fasi per operatori a coefficienti variabili con coefficienti $C^{0,\alpha}$. In questo ultimo lavoro [11], abbiamo esaminato il caso in cui l'operatore soddisfi le condizioni riportate in (1) e (2), e quindi sia ammesso un termine di trasporto con coefficienti soltanto limitati, e sotto l'ipotesi ulteriore che la frontiera sia piatta.

Una delle motivazioni risiede nella necessità di completare la teoria nel caso degli operatori in forma di divergenza con coefficienti variabili $C^{0,1}$. Infatti l'operatore considerato copre anche il suddetto caso.

Da questo punto di vista occorre considerare le soluzioni L^p viscose, in cui le funzioni test non sono più C^2, ma soltanto $W^{2,p}$

Definizione 4.1. *Sia $u \in C(\Omega)$.*

(a) *Diremo che u è una sottosoluzione (soprasoluzione) $C-$ viscosa di $\mathcal{L}u = 0$ se per ogni $x_0 \in \Omega$ e per ogni $\phi \in C^2(\Omega)$, per ogni $u - \phi$ che realizza un massimo locale (minimo) in x_0, allora $\mathcal{L}u(x_0) \geq 0$.*

(b) *Sia $n < 2p$. Diremo che u è una sottosoluzione (soprasoluzione) L^p-viscosa di $\mathcal{L}u = 0$ in Ω se, per ogni $\phi \in W^{2,p}_{loc}(\Omega)$, per qualunque $\varepsilon > 0$, e $\mathcal{O} \subset \Omega$ insieme aperto*

$$\mathcal{L}u \leq -\varepsilon \qquad \text{a.e. in } \mathcal{O} \qquad (\mathcal{L}u \geq \varepsilon)$$

allora $u - \phi$ non può realizzare massimo locale (minimo) in $\mathcal{O}$.

(c) *u è una soluzione C (o L^p) viscosa di $\mathcal{L}u] = 0$ if u è sia una sottosoluzione che una soprasoluzione C viscosa di $\mathcal{L}u = 0$ (è sia L^p sottosoluzione che soprasoluzione viscosa di $\mathcal{L}u = 0$.*

Osserviamo che, se $\mathcal{L}$ è un operatore continuo rispetto alle variabili dei suoi argomenti, allora le soluzioni C viscose di $\mathcal{L}u = 0$ in Ω sono soluzioni L^p- viscose (sotto-, super-) soluzioni di $\mathcal{L}u = 0$ in Ω. Inoltre, $W^{2,p}$ soluzioni *(sotto, super) solutioni* sono (sotto, super) soluzioni L^p- viscose.

Consideriamo ora un problema a due fasi più generale di quelli esaminati finora:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 u = 0, & \Omega^+(u) = \{x \in \Omega : \ u(x > 0)\}, \\ \mathcal{L}_2 u = 0, & \Omega^-(u) = \{x \in \Omega : \ u(x \leq 0)\}^o, \\ u = 0, & \mathcal{F}(u) = \partial\Omega^+(u), \\ u^+_\nu = G(u^-_\nu), & \mathcal{F}(u), \end{cases} \tag{7}$$

dove $\mathcal{L}_s$, $s = 1, 2$ sono due operatori del tipo descritto in (2) per i quali indicheremo con A_s e B_s rispettivamente le matrici di funzioni del termine di ordine due e i vettori di funzioni del termine di trasporto soggetti alle stesse ipotesi di simmetria e di uniforme ellitticità. Valgono i seguenti risultati, vedi [11].

Teorema 4.1. *Sia u una soluzione viscosa del problema di frontiera libera (7) in $\mathcal{C}_1 = B'_1 \times (-1, 1)$. Supponiamo che $0 \in F(u)$ e che*

(i) *per $s = 1, 2$, $A_s \in C^{0,a}(\mathcal{C}_1)$, $0 < a \leq 1$, $B_s \in L^\infty(\mathcal{C}_1)$, con $|B_s| \leq M$.*

(ii) *$\Omega^+(u) = \{(x', x_n) : x_n > f(x')\} \cap \mathcal{C}_1$ dove f è una funzione Lipschitz con $Lip(f) \leq L$.*

(iii) $G = G(z)$ *sia continua, strettamente crescente e per qualche* $N > 0$, $z^{-N}G(z)$ *sia decescente in* $(0, +\infty)$.

Allora, in $B'_{1/2}$, f *è una funzione* $C^{1,\gamma}$ *con* $\gamma = \gamma(n, a, \Lambda, M, L, N)$.

Corollario 4.1. *Supponiamo che in (7)*

$$\mathcal{L}_1 u = \mathcal{L}_2 u = div\left(A\left(x,u\right)\nabla u\right) \equiv \mathcal{L}u,$$

dove $\mathcal{L}$ *è un operatore uniformemente ellittico in forma di divergenza. Supponiamo che (ii) e (iii) del Teorema 4.1 valgano e sostituiamo (i) con l'ipotesi che* A *sia Lipschitz rispetto a* x *and* u. *Allora vale la stessa tesi del Teorema 4.1.*

Per quanto riguarda la regolarità delle frontiere libere piatte siamo in grado di dimostrare il seguente risultato per fasi negative degeneri.

Teorema 4.2. *Sia* u *una soluzione di (7) Supponiamo che:*

(i) *esistano due numeri positivi* α_0, α_1 *tali che* $\alpha_0 \leq \frac{u^+(x)}{d(x, F(u))} \leq \alpha_1$,

(ii) *Sia* G *una funzione Lipschitz* $G(0) > 0$, *strettamente crescente in* $\mathbb{R}^+$ *e per una costante* N, *grande* $s^{-N}G(s)$ *sia decrescente.*

(iii) *Esistano* $\overline{\theta} < \frac{\pi}{2}$ *e* $\overline{\varepsilon} > 0$ *tali che, per qualche* ε, $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$, $\mathcal{F}(u)$ *sia contenuta in un* $\epsilon-$ *intorno del grafico di una funzione Lipschitz* $x_n = g(x')$ *di norma Lipschitz*

$$Lip\,(g) \leq \tan\left(\frac{\pi}{2} - \overline{\theta}\right).$$

Allora, in $B'_{1/2}(0)$, g *è una funzione* $C^{1,\gamma}$ *con* $\gamma = \gamma(n, a, \alpha_0, \alpha_1, M, N, L, \Lambda)$.

Non ci addentreremo nei dettagli delle dimostrazioni, ci limiteremo a sottolineare alcune delle novità introdotte per dimostrare questi risultati.

Per prima cosa abbiamo sostituito la ϵ- monotonia introducendo una nozione più forte data dalla *stretta* $\epsilon-$monotonia in cui si chiede una stima più precisa della $\epsilon-$ monotonia.

Definizione 4.2. *Diremo che una funzione non negativa* u *è* strettamenteϵ-monotona *(*crescente*) con costante* λ $(\lambda > 0)$ *in un dominio* D, *lungo una direzione* τ , *se*

$$u(x + \varepsilon'\tau) - u(x) \geq \lambda\varepsilon u\left(x\right),$$

per ogni $x \in D$ *e ogni* $\varepsilon' \geq \varepsilon$.

Una funzione non positiva u è strettamente ϵ-monotona (crescente) se u^- è strettamente ϵ-monotona decrescente. Infine, u è strettamente ϵ-monotona se u^+ e u^- sono rispettivamente strettamente ϵ-monotone crescenti e decrescenti.

Con questa nozione più forte di $\epsilon-$ monotonia si riottiene l'analogo del Lemma 3.1, ma per operatori con coefficienti variabili.

Lemma 4.1. *Sia* u *soluzione positiva di* $\mathcal{L}u = 0$ *in* $B_{4R\epsilon} = B_{4R\epsilon}(0)$ *tale che*

$$u(x + \epsilon'\tau) - u(x) \geq \lambda\epsilon u\,(x)\,,$$

in $B_{2R\epsilon}$, *per qualche* $\lambda > 0$ *e ogni* $\epsilon' \geq \epsilon$. *Sia* $m \geq 5$. *Esiste* $R = R\,(n)$ *tale che se* $\epsilon^{(m+1)/3} \leq c\lambda$ *e*

$$|a_{ij} - a_{ij}\,(0)|_\infty < C\epsilon^{m+1}, \quad M = |b|_\infty < C\epsilon^m, \tag{8}$$

allora

$$D_\tau u\,(0) \geq c\lambda \frac{[u(\epsilon\tau) - u(0)]}{\epsilon}.$$

Per quanto riguarda invece le proprietà della funzione $v(x) = \sup_{B(x,g(x))} u(y - \tau)$, generalizziamo un risultato contenuto in [6] come segue. Definiamo l'operatore di Pucci minimale

$$\mathcal{P}^-(g(x)) = \inf_{A(x)\in\mathcal{A}_{\Lambda^{-1},\Lambda}} \mathrm{Tr}(A(x)D^2 g(x)),$$

dove

$$\mathcal{A}_{\Lambda^{-1},\Lambda} = \{A : \Omega\mathcal{R}^n :\ A \in C^{0,\alpha},\ \Lambda^{-1}||\xi||^2 \leq \langle A(x)\xi, \xi\rangle < \Lambda||\xi||^2,\ \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}.$$

Lemma 4.2. *Sia* $\mathcal{L}$ *un operatore uniformemente ellittico con costante d'ellitticità* Λ *e matrice dei coefficienti continua* $A = A\,(x)$ *con modulo di continuità* $\omega\,(r)$. *Sia* u *una funzione continua definita in un dominio* Ω *tale che* $\mathcal{L}u = 0$ *dove* $u > 0$ *e* g *una funzione positiva di classe* C^2 *tale che* $g \leq g_0$ *e*

$$v(x) = \sup_{B_{g(x)}(x)} u(y - \tau) = \sup_{|\nu|=1} u(x - \tau + g(x)\nu)$$

sia ben definita in Ω. *Allora esistono delle costanti positive* $\mu_0 = \mu_0\,(n,\Lambda,M)\,,\ C = C\,(n,\Lambda)$ *e* $C_0 = C_0(n,\Lambda)$ *tali che, se* $|\nabla g| \le \mu_0$ *e* $\omega_0 = \omega(g_0/\Lambda)$,

$$\mathcal{P}^-(g(x)) - \frac{C}{g(x)}\left(|\nabla g\,(x)|^2 + \omega_0^2\right) - \eta M \ge 0, \tag{9}$$

allora v *è una* L^p- *sottosoluzione viscosa di* $\mathcal{L}u = 0$ *in* $\Omega^+(v)$.

Con questi risultati la dimostrazione si sviluppa in modo simile a quella contenuta in e [3] e [6]. Tuttavia per operatori a coefficenti variabili come quelli presi in considerazione, non è nota una formula di monotonia. Quindi la dimostrazione dell'alternativa:

caso (a): $u^-(-\frac{1}{2}e_n) < K\epsilon \sup_{\mathcal{C}_{7/8}} \mid u \mid$;

caso (b): $u^-(-\frac{1}{2}e_n) \ge K\epsilon \sup_{\mathcal{C}_{7/8}} \mid u \mid$,

risulta più laboriosa, specialmente per quanto riguarda il punto (a).

Per ovviare a questo inconveniente utilizziamo delle opportune funzioni barriera per gli operatori estremali, ispirandoci ad un'idea contenuta in [13].

Riferimenti bibliografici

[1] H. Alt, L. Caffarelli, A. Friedman. *Variational problems with two phases and their free boundaries.* Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984) 431-461.

[2] L.A. Caffarelli. *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries, Part* 1*: Lipschitz free boundaries are* C^1_α. Revista Matematica Iberoamericana, **3** (1987) 139-162.

[3] L.A. Caffarelli. *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. II. Flat free boundaries are Lipschitz.* Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989) 55-78.

[4] L. A. Caffarelli. *A Harnack inequality approach to the regularity of free boundaries. III. Existence theory, compactness, and dependence on* X. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **15** (1988) 583-602.

[5] L.A. Caffarelli, S. Salsa. A geometric approach to free boundary problems. Graduate Studies in Mathematics, 68. American Mathematical Society, Providence, RI, (2005).

[6] M.C.Cerutti, F. Ferrari, S. Salsa. *Two-phase problems for linear elliptic operators with variable coefficients: Lipschitz free boundaries are* $C^{1,\gamma}$. Arch. Rational Mech. Anal. **171** (2004) 329-348.

[7] M. Feldman. *Regularity for nonisotropic two-phase problems with Lipschitz free boundaries.* Differential Integral Equations **10** (1997) 1171-1179.

[8] M. Feldman. *Regularity of Lipschitz free boundaries in two-phase problems for fully nonlinear elliptic equations.* Indiana Univ. Math. J. **50** (2001) 1171-1200.

[9] F. Ferrari. *Problemi ellittici a due fasi: regolarità della frontiera libera.* Seminario di Analisi Matematica 02/03 Tecnoprint-Bologna (2005) 59–67.

[10] F. Ferrari. *Two-phase problems for a class of fully nonlinear elliptic operators. Lipschitz free boundaries are* $C^{1,\gamma}$. In corso di pubblicazione su American Journal of Mathematics.

[11] F. Ferrari, S.Salsa. *Regularity of the free boundary in two-phase problems for linear elliptic operators*, preprint (2006).

[12] P.Y. Wang. *Regularity of free boundaries of two-phase problems for fully nonlinear elliptic equations of second order. I. Lipschitz free boundaries are* $C^{1,\alpha}$, Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000) 799-810.

[13] P.Y. Wang. *Regularity of free boundaries of two-phase problems for fully nonlinear elliptic equations of second order. II. Flat free boundaries are Lipschitz.* Comm. in Partial Differential equations **27** (2002) 1497-1514.