Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2005-06

Bruno Franchi

Soluzione fondamentale e stime $W^{k,p}$ per il Laplaciano sul complesso di contatto in gruppi di Heisenberg

16 marzo 2006

Abstract

In this seminar we present the results of a joint paper with Annalisa Baldi and Maria Carla Tesi concerning the fundamental solution for the Laplace operator on the contact complex in Heisenberg groups $\mathbb{H}^n$ (Rumin's complex) relying on the notion of currents in $\mathbb{H}^n$ given recently by Franchi, Serapioni and Serra Cassano. This operator is of order 2 on intrinsic forms of degree k for $k \neq n$, but is of order 4 on intrinsic forms of degree n. As an application, we prove sharp L^p a priori estimates for horizontal derivatives.

In questo seminario intendo presentare alcuni risultati ottenuti in collaborazione con Annalisa Baldi e Maria Carla Tesi ([1]).

Denotiamo con $\mathbb{H}^n$ il gruppo di Heisenberg n-dimensionale identificato con $\mathbb{R}^{2n+1}$ tramite coordinate esponenziali. Un punto $p \in \mathbb{H}^n$ è notato da $p = (p_1, \dots, p_{2n}, p_{2n+1}) = (p', p_{2n+1})$, con $p' \in \mathbb{R}^{2n}$ e$p_{2n+1} \in \mathbb{R}$. Se p e $q \in \mathbb{H}^n$, l'operazione di gruppo è

$$p \cdot q = (p' + q', p_{2n+1} + q_{2n+1} + 2\langle Jp', q' \rangle_{\mathbb{R}^{2n}})$$

dove $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ è matrice simplettica $2n \times 2n$. Denotiamo con $p^{-1} := (-p', -p_{2n+1})$ l'inverso di p e con 0 o e l'elemento neutro di $\mathbb{H}^n$.

Per $q \in \mathbb{H}^n$ fissato e per $r > 0$, le traslazioni sinistre $\tau_q : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ e le dilatazioni anisotropes $\delta_r : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ sono automorfismi del gruppo definiti da

$$\tau_q(p) := q \cdot p \qquad \text{e da} \qquad \delta_r p := (rp', r^2 p_{2n+1}).$$

Il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ può essere dotato di una norma omogenea (norma di Koranyi)

$$\varrho(p) = \left(|p'|^4 + p_{2n+1}^2\right)^{1/4}, \tag{1}$$

e possiamo definire una distanza di gauge come

$$d(p,q) := \varrho(p^{-1} \cdot q). \tag{2}$$

Per finire, poniamo $B_\rho(p,r) = \{q \in \mathbb{H}^n;\ d(p,q) < r\}$.

Denotiamo con $\mathfrak{h}^n$ o, più spesso, con $\mathfrak{h}$ l'algebra di Lie dei campi vettoriali invarianti a sinistra di $\mathbb{H}^n$. La base canonica $\mathfrak{h}$ è data, per $i = 1, \dots, n$, da

$$X_i := \partial_i + 2(Jp')_i \partial_{2n+1}, \quad Y_i := \partial_{i+n} + 2(Jp')_{i+n} \partial_{2n+1}, \quad T := \partial_{2n+1}.$$

Le sole relazioni di commutazione non trivali tra questi sono $[X_j, Y_j] = -4T$, for $j = 1, \dots, n$. A volte modificheremo le notazioni ponendo

$$W_i := X_i, \quad W_{i+n} := Y_i, \quad W_{2n+1} := T, \quad \text{per } i = 1, \cdots, n.$$

Il *sottospazio orizzontale* $\mathfrak{h}_1$ è il sottospazio di $\mathfrak{h}$ generato da $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_n$. Denotando con $\mathfrak{h}_2$ lo spazio vettoriale generato da T, la stratificazione 2-step di $\mathfrak{h}$ è data da

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2.$$

Gli spazi vettoriali $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}_1$ possono essere forniti di un prodotto scalare, indicato con $\langle \cdot, \cdot \rangle$, che rende $X_1, \dots, X_n$, $Y_1, \dots, Y_n$ e T ortonormali.

Lo spazio duale di $\mathfrak{h}$ è denotato da $\bigwedge^1 \mathfrak{h}$. La base di $\bigwedge^1 \mathfrak{h}$, duale della base $W_1, \cdots, W_{2n+1}$ è la famiglia di covettori $\{dx_1, \cdots, dx_{2n}, \theta\}$ dove $\theta := dx_{2n+1} - 2\langle (Jx'), dx' \rangle_{\mathbb{R}^{2n}}$ è la *forma di contatto* in $\mathbb{H}^n$. Indichiamo con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ anche il prodotto interno in $\bigwedge^1 \mathfrak{h}$ che rende $dx_1, \cdots, dx_{2n}, \theta$ una base ortonormale. A volte sarà notazionalmente conveniente porre $\theta_1 := dx_1, \cdots, \theta_{2n} := dx_{2n}, \theta_{2n+1} := \theta$.

Seguendo Federer (si veda [3] 1.3), le algebre esterne di $\mathfrak{h}$ e di $\bigwedge^1 \mathfrak{h}$ sono le algebre graduate $\bigwedge_* \mathfrak{h} = \bigoplus_{k=0}^{2n+1} \bigwedge_k \mathfrak{h}$ e $\bigwedge^* \mathfrak{h} = \bigoplus_{k=0}^{2n+1} \bigwedge^k \mathfrak{h}$ dove $\bigwedge_0 \mathfrak{h} = \bigwedge^0 \mathfrak{h} = \mathbb{R}$ e, per $1 \le k \le 2n+1$,

$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge_k \mathfrak{h} &:= \mathrm{span}\{W_{i_1} \wedge \cdots \wedge W_{i_k} : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le 2n+1\}, \\ \textstyle\bigwedge^k \mathfrak{h} &:= \mathrm{span}\{\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k} : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le 2n+1\}. \end{aligned}$$

Gli elementi di $\bigwedge_k \mathfrak{h}$ and $\bigwedge^k \mathfrak{h}$ sono chiamati *k-vettori* e *k-covettori.*

Lo spazio duale $\bigwedge^1(\bigwedge_k \mathfrak{h})$ di $\bigwedge_k \mathfrak{h}$ è identificato naturalmente con $\bigwedge^k \mathfrak{h}$. L'azione di un k-covector φ su un k-vettore v è scritta $\langle \varphi | v \rangle$.

L *2-forma simplettica* $d\theta \in \bigwedge^2 \mathfrak{h}_1$ è $d\theta = 4 \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dx_{i+n}$.

Il prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ può essere esteso canonicamente a $\bigwedge_k \mathfrak{h}$ e a $\bigwedge^k \mathfrak{h}$ rendendo le basi $W_{i_1} \wedge \cdots \wedge W_{i_k}$ e $\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}$ ortonormali

La stessa costruzione può essere compiuta a partire dal sottospazio vettoriale $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$. In questo modo otteniamo le algebre $\bigwedge_* \mathfrak{h}_1 = \bigoplus_{k=1}^{2n} \bigwedge_k \mathfrak{h}_1$ e $\bigwedge^* \mathfrak{h}_1 = \bigoplus_{k=1}^{2n} \bigwedge^k \mathfrak{h}_1$ i cui ielementi sono i *k-vettori orizzontali* e *i k-covettori orizzontali*; qui

$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge_k \mathfrak{h}_1 &:= \mathrm{span}\{W_{i_1} \wedge \cdots \wedge W_{i_k} : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le 2n\} \\ \textstyle\bigwedge^k \mathfrak{h}_1 &:= \mathrm{span}\{\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k} : 1 \le i_1 < \cdots < i_k \le 2n\}. \end{aligned}$$

e chiaramente $\bigwedge_k \mathfrak{h}_1 \subset \bigwedge_k \mathfrak{h}$ per $1 \le k \le 2n$.

Definizione 0.1. *Definiamo l'isomorfismo lineare (si veda* [3] *1.7.8)*

$$* : \bigwedge_k \mathfrak{h} \longleftrightarrow \bigwedge_{2n+1-k} \mathfrak{h} \quad e \quad * : \bigwedge^k \mathfrak{h} \longleftrightarrow \bigwedge^{2n+1-k} \mathfrak{h},$$

per $1 \le k \le 2n$*, ponendo, per* $v = \sum_I v_I W_I$ *e* $\varphi = \sum_I \varphi_I \theta_I$*,*

$$*v := \sum_I v_I (*W_I) \quad and \quad *\varphi := \sum_I \varphi_I (*\theta_I)$$

dove

$$*W_I := (-1)^{\sigma(I)} W_{I^*} \quad e \quad *\theta_I := (-1)^{\sigma(I)} \theta_{I^*}$$

con $I = \{i_1, \cdots, i_k\}$, $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le 2n+1$, $W_I = W_{i_1} \wedge \cdots \wedge W_{i_k}$, $\theta_I = \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k}$, $I^* = \{i_1^* < \cdots < i_{2n+1-k}^*\} = \{1, \cdots, 2n+1\} \setminus I$ *e* $\sigma(I)$ *il numero di coppie* (i_h, i_ℓ^*) *con* $i_h > i_\ell^*$*.*

Le seguenti proprietà dell'operatore $*$ seguono dalla definizione: $\forall v, w \in \bigwedge_k \mathfrak{h}$ e $\forall \varphi, \psi \in \bigwedge^k \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} & **v = (-1)^{k(2n+1-k)} v = v, \qquad **\varphi = (-1)^{k(2n+1-k)} \varphi = \varphi, \\ & v \wedge *w = \langle v, w \rangle W_{\{1,\cdots,2n+1\}}, \qquad \varphi \wedge *\psi = \langle \varphi, \psi \rangle \theta_{\{1,\cdots,2n+1\}}, \\ & \langle *\varphi | *v \rangle = \langle \varphi | v \rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

Come al solito, la $(2n+1)$-forma volume $\theta_{\{1,\dots,2n+1\}}$ verrà anche scritta come dV. Notiamo che, se $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k$ è un k-vettore semplice, allora $*v$ ùn $(2n+1-k)$-vettore semplice. Inoltre notiamo che

$$\text{if } v \in \bigwedge_k \mathfrak{h}_1, \text{ allora } *v = \xi \wedge T, \text{ con } \xi \in \bigwedge_{2n-k} \mathfrak{h}_1. \tag{4}$$

Se $v \in \bigwedge_k \mathfrak{h}$ definiamo $v^\natural \in \bigwedge^k \mathfrak{h}$ tramite l'identità $\langle v^\natural | w \rangle := \langle v, w \rangle$, e analogamente poniamo $\varphi^\natural \in \bigwedge_k \mathfrak{h}$ per $\varphi \in \bigwedge^k \mathfrak{h}$.

Osservazione 0.1. *Un* k*-vettore semplice non nullo* $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \bigwedge_k \mathfrak{h}$ *è associato naturalmente a una distribuzione invariante a sinistra di piani* k*-dimensionali in* $\mathbb{R}^{2n+1} \equiv \mathbb{H}^n$*. In generale, se* $k > 1$*, questa distribuzione non è integrabile - per il Teorema di*

Frobenius - in quanto non necessariamente $[v_i, v_j] \in \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_k\}$*. Un esempio è dato dal 2-vettore* $X_1 \wedge Y_1 \in \bigwedge_2 \mathfrak{h}_1$*.*

Una caratterizzazione algebrica esplicita dei k-vettori associati a distribuzioni integrabili è provata nel Teorema 0.1.

Definizione 0.2. *Poniamo* ${}_H\bigwedge_0 = \mathbb{R}$ *e, per* $1 \le k \le n$,

$$
\begin{aligned}
{}_H\bigwedge\nolimits_k &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{span}\left\{v \in \bigwedge\nolimits_k \mathfrak{h}_1 : \quad v \text{ è semplice e integrabile}\right\}, \\
{}_H\bigwedge\nolimits_{2n+1-k} &\stackrel{\text{def}}{=} *\left({}_H\bigwedge\nolimits_k\right).
\end{aligned}
$$

I covettori integrabili sono definiti per dualità: per $0 \le k \le 2n+1$ *poniamo*

$$
{}_H\bigwedge\nolimits^k \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge\nolimits^1 \left({}_H\bigwedge\nolimits_k\right) \simeq \left\{\varphi \in \bigwedge\nolimits^k \mathfrak{h} \ : \quad \varphi^\natural \in {}_H\bigwedge\nolimits_k\right\}.
$$

Notiamo che ${}_H\bigwedge_1 = \bigwedge_1 \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{h}_1$. Al contrario, per $1 < k \le n$, $0 \ne {}_H\bigwedge_k \subsetneq \bigwedge_k \mathfrak{h}_1$.

Se $1 \le k \le n$ e se $w \in {}_H\bigwedge_{2n+1-k}$ è un $(2n+1-k)$-vettore semplice, tallora si può scegliere $w_1, \dots, w_{2n+1-k}$ in modo che: $w = w_1 \wedge \cdots \wedge w_{2n+1-k}$, $w_1 \wedge \cdots \wedge w_{2n-k} \in \bigwedge_{2n-k} \mathfrak{h}_1$ e $w_{2n+1-k} = T$.

Per (3), se $1 \le k \le n$ abbiamo anche

$$
{}_H\bigwedge\nolimits_k = *\left({}_H\bigwedge\nolimits_{2n+1-k}\right).
$$

La seguente caratterizzazione è provata in [6], Theorem 2.8.

Teorema 0.1. *Assumiamo che* $2 \le k \le n$ *e* $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \bigwedge_k \mathfrak{h}_1$, $v \ne 0$*. Allora le affermazioni seguenti sono equivalenti:*

(1) $v \in {}_H\bigwedge_k$;
(2) $[v_i, v_j] = 0$ *per* $1 \le i, j, \le k$;
(3) $\langle \gamma \wedge d\theta | v \rangle = 0$ *per ogni* $\gamma \in \bigwedge^{k-2} \mathfrak{h}$.

Gli spazi dei covettori integrabili sono canonicamente isomorfi agli spazi definiti da Rumin in [13]. Definiamo $\mathcal{I}^*$ e $\mathcal{J}^* \subset \bigwedge^* \mathfrak{h}$, dove $\mathcal{I}^*$ è l'ideale graduato generato da θ, cioè $\mathcal{I}^* := \{\beta \wedge \theta + \gamma \wedge d\theta : \beta, \gamma \in \bigwedge^* \mathfrak{h}\}$ e $\mathcal{J}^*$ è l'annichilatore di $\mathcal{I}^*$, cioè $\mathcal{J}^* := \{\alpha \in \bigwedge^* \mathfrak{h} : \alpha \wedge \theta = 0 \text{ e } \alpha \wedge d\theta = 0\}$. Sia $\mathcal{I}^*$ e $\mathcal{J}^*$ sono graduati, poichè $\mathcal{I}^* = \oplus_{k=1}^{2n+1} \mathcal{I}^k$ e $\mathcal{J}^* = \oplus_{k=1}^{2n+1} \mathcal{J}^k$, dove $\mathcal{I}^k, \mathcal{J}^k \subset \bigwedge^k \mathfrak{h}$ e

$$\mathcal{I}^k = \{\beta \wedge \theta + \gamma \wedge d\theta : \beta \in \bigwedge^{k-1} \mathfrak{h}, \gamma \in \bigwedge^{k-2} \mathfrak{h}\}$$

$$\mathcal{J}^k = \{\alpha \in \bigwedge^{k} \mathfrak{h} : \alpha \wedge \theta = 0 \text{ e } \alpha \wedge d\theta = 0\}.$$

Per $1 \le k \le n$ abbiamo $\mathcal{I}^{2n+1-k} = \bigwedge^{2n+1-k} \mathfrak{h}$ e $\mathcal{J}^k = 0$.

Le sequenti identità sono provate in [6], Theorem 2.9.

Teorema 0.2. *Per* $1 \le k \le n$,

$$ {}_H\bigwedge_k = \ker \mathcal{I}^k \qquad e \qquad {}_H\bigwedge_{2n+1-k} \simeq \frac{\bigwedge_{2n+1-k} \mathfrak{h}}{\ker \mathcal{J}^{2n+1-k}}, \tag{5}$$

$$ {}_H\bigwedge^k \simeq \frac{\bigwedge^k \mathfrak{h}}{\mathcal{I}^k} \qquad and \qquad {}_H\bigwedge^{2n+1-k} = \mathcal{J}^{2n+1-k}, \tag{6}$$

dove $\ker \mathcal{I}^k = \{v \in \bigwedge_k \mathfrak{h} : \langle \varphi | v \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{I}^k\}$ *e* $\ker \mathcal{J}^{2n+1-k}$ *è definito in modo analogo.*

Come è ben noto, $\mathfrak{h}$ può essere identificato con lo spazio tangente a $\mathbb{H}^n$ nell'origine, che denotiamo con $T\mathbb{H}^n_e$. Quindi ${}_H\bigwedge_k \equiv {}_H\bigwedge_{k,e}$ è un sottospazio vettoriale di $\bigwedge_k T\mathbb{H}^n_e$, e possiamo porre

$${}_H\bigwedge_{k,p} := (\Lambda_k d\tau_p)\big({}_H\bigwedge_{k,e}\big)$$

per ogni $p \in \mathbb{H}^n$, dove, per $q, q' \in \mathbb{H}^n$ e per ogni mappa lineare $f : T\mathbb{H}^n_q \to T\mathbb{H}^n_{q'}$,

$$\Lambda_k f : \bigwedge_k T\mathbb{H}^n_q \to \bigwedge_k T\mathbb{H}^n_{q'}$$

è la mappa lineare definita da

$$(\Lambda_k f)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) = f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_k).$$

Il prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on $\bigwedge_k \mathfrak{h}$ induce un prodotto interno in ogni fibra ${}_H\bigwedge_{k,p}$ tramite l'identità

$$\langle \Lambda_k d\tau_p(v), \Lambda_k d\tau_p(w) \rangle_p := \langle v, w \rangle.$$

Analogamente, possiamo definire

$${}_H\bigwedge^k_p := (\Lambda^k d\tau_{p^{-1}})({}_H\bigwedge^k_e)$$

per ogni $p \in \mathbb{H}^n$, dove per ogni mappa linrare $f : T\mathbb{H}^n_q \to T\mathbb{H}^n_{q'}$

$$\Lambda^k f : \bigwedge^k T\mathbb{H}^n_{q'} \to \bigwedge^k T\mathbb{H}^n_q$$

è la mappa lineare definita da

$$\langle (\Lambda^k f)(\alpha) | v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \rangle = \langle \alpha | (\Lambda_k f)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_k) \rangle$$

per ogni $\alpha \in {}_H\bigwedge^k_{q'}$ e per ogni k-vettore semplice $v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in {}_H\bigwedge_{k,q}$.

Ancora, possiamo fornire ${}_H\bigwedge^k_p$ di un prodotto scalare tramite traslazioni a sinistra.

Lemma 0.1. *Se $p, q \in \mathbb{H}^n$, allora*

$$\Lambda_k d\tau_q : {}_H\bigwedge_{k,p} \to {}_H\bigwedge_{k,qp} \quad \textit{and} \quad \Lambda^k d\tau_{q^{-1}} : {}_H\bigwedge^k_p \to {}_H\bigwedge^k_{qp}$$

sono isometrie (in particolare sono iniettive e suriettive).

Definizione 0.3. *Sia K un compatto. Se $0 \le k \le \infty$ e $1 \le m \le 2n+1$, denotiamo con $\mathcal{D}^{m,k}_{\mathbb{H}}(K)$ lo spazio di tutte le sezioni $\mathcal{C}^k$ di ${}_H\bigwedge^m$ su K. Denotiamo con $\mathcal{D}^{*,k}_{\mathbb{H}}(K) = \mathcal{D}^{0,k}_{\mathbb{H}}(K) \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}^{2n+1.k}_{\mathbb{H}}(K)$ l'algebra graduata di tutte forme differenziali di Heisenberg su K di classe $\mathcal{C}^k$, dove $\mathcal{D}^{0,k}_{\mathbb{H}}(K) = \mathcal{C}^k(K)$.*

Analogamente denotiamo con $\mathcal{D}^k_{\mathbb{H},m}(K)$ lo spazio di tutte le sezioni $\mathcal{C}^k$ di ${}_H\bigwedge_m$ su K.

Poniamo inoltre

$$\mathcal{D}^m_{\mathbb{H}}(K) := \mathcal{D}^{m,\infty}_{\mathbb{H}}(K)$$

e

$$\mathcal{D}_{\mathbb{H},m}(K) := \mathcal{D}^{\infty}_{\mathbb{H},m}(K).$$

Se $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}^n$ è un aperto, allora lo spazio $\mathcal{D}^m_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$ è definito nel modo usuale. Per finire, la definizione di $\mathcal{E}^m_{\mathbb{H}}$ viene data nello stesso modo.

Teorema 0.3 ([13])**.** *Sia $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}^n$ un aperto. Se $0 \le k \le n$, denotiamo con $d_c : {}_H\bigwedge^k \to {}_H\bigwedge^{k+1}$ la mappa indotta dal differenziale esterno sulle forme. Se $n+1 \le k \le 2n+1$, d_c sarà il differenziale esterno usuale. Allora esiste un operatore differenziale invariante a sinistra omogeneo di ordine 2 $d_c : {}_H\bigwedge^n \to {}_H\bigwedge^{n+1}$ tale che il complesso*

$$0 \to \mathcal{D}^0_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}) \xrightarrow{d_c} \mathcal{D}^1_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}) \xrightarrow{d_c} \cdots \xrightarrow{d_c} \mathcal{D}^n_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}) \xrightarrow{d_c}$$
$$\xrightarrow{d_c} \mathcal{D}^{n+1}_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}) \xrightarrow{d_c} \cdots \xrightarrow{d_c} \mathcal{D}^{2n+1}_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}) \to 0$$

ha la stessa coomologia del complesso di De Rham.

Osservazione 0.2. *Nel seguito denoteremo con δ_c l'aggiunto formale di d_c in L^2.*

Definizione 0.4. *Se U, V sono sottoinsiemi aperti di $\mathbb{H}^n$, e $f : U \to V$ è un diffeomorfismo, allora per ogni $\alpha \in \mathcal{E}_{\mathbb{H}}^{m,k}(V)$ per $k \geq 0$, denotiamo con $f^\sharp\alpha$ la forma in $\mathcal{E}_{\mathbb{H}}^{m,k}(U)$ definita da*

$$f^\sharp\alpha(x) := (\Lambda^m df(x))\alpha(f(x)),$$

per ogni $x \in U$.

Definizione 0.5. *Sia $\{\xi_1, \dots, \xi_{N_m}\}$ una base ortonormale di ${}_H\bigwedge_e^m$. Allora possiamo definire N_m sezioni liscie di ${}_H\bigwedge^m$, che continuiamo a indicare con $\xi_1, \dots, \xi_{N_m}$, prendendo $\xi_{j,p} := \Lambda^m d\tau_{p^{-1}}(\xi_j)$, per $p \in \mathbb{H}^n$ e $j = 1, \dots, N_m$. Ovviamente, $\{\xi_{1,p}, \dots, \xi_{N_m,p}\}$ è una base ortonormale di ${}_H\bigwedge_p^m$. Nel seguito ci riferiremo a $\{\xi_1, \dots, \xi_{N_m}\}$ come a un sistema di riferimento mobile invariante a sinistra in ${}_H\bigwedge^m$.*

Un sistema di riferimento mobile invariante a sinistra in ${}_H\bigwedge^m$ definisce una speciale trvializzazione del fibrato ${}_H\bigwedge^k$ che rende i calcoli particolarmente semplici.

Osservazione 0.3. *Dato un sistema di riferimento mobile invariante a sinistra i $\{\xi_1, \dots, \xi_{N_m}\}$ di ${}_H\bigwedge^m$ (e quindi un sitema duale $\{\xi_1^\natural, \dots, \xi_{N_m}^\natural\}$ di $\bigwedge_m \mathfrak{h}$), sia $\mathcal{D}_{\mathbb{H}}^{m,k}(K)$ sia $\mathcal{D}_{\mathbb{H},m}^{k}(K)$ possono essere identificati con $(\mathcal{C}^k(K))^{N_m}$, e forniti delle norme indotte denotate con $\|\cdot\|_k$.*

La famiglia di norme $\|\cdot\|_k$, $k = 0, 1, \dots$ induce una struttura di spazio di Fréchet in $\mathcal{D}_{\mathbb{H}}^m(K)$ e $\mathcal{D}_{\mathbb{H},m}(K)$.

Nello stesso modo possiamo definire gli spazi $L_{\mathbb{H}}^{m;p}(A)$ e gli spazi di Sobolev $W_{\mathbb{H}}^{m;s,p}(A)$.

Definizione 0.6. *Sia $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{H}^n)$. Inoltre, sia $\alpha \in L_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}^{m;p}(\mathbb{H}^n)$. Per ogni $p, q \in \mathbb{H}^n$, $(\tau_q^\sharp\alpha)(p) = (\Lambda^m d\tau_q)\alpha(qp)$ appartiene a ${}_H\bigwedge_p^m$. Quindi l'integrale*

$$\int \Phi(q)(\tau_q^\sharp\alpha)(p)\, dq$$

è ben definito e appartiene a ${}_H\bigwedge_p^m$. Dunque possiamo definire una nuova sezione $\Phi * \alpha$ of ${}_H\bigwedge^m$ tramite l'identità

$$\Phi * \alpha := \int \Phi(q)(\tau_q^\sharp\alpha)\, dq.$$

Osservazione 0.4. *Se* $\alpha \in L^{m;p}_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^n)$ *ha la forma* $\sum_j \alpha_j \xi_j$*, allora*

$$\Phi * \alpha = \sum_j (\Phi * \alpha_j)\xi_j.$$

Definizione 0.7. *Se* $\mathcal{U}$ *è un aperto, diremo che* T *è una* m*-corrente di Heisenberg se* T *è un funzionale lineare continuo su* $\mathcal{D}^m_{\mathbb{H}}(K)$ *per ogni* $K \subset\subset \mathcal{U}$*. Scriveremo* $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{H},m}(\mathcal{U})$*.*

Proposizione 0.1. *Se* $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}^n$ *è un aperto e* $T \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ *è una usuale distribuzione, allora* T *può essere identificata canonicamente con una* $(2n+1)$ *corrente* $\tilde{T} \in D'_{\mathbb{H},2n+1}(\mathcal{U})$ *tramite la formula*

$$\langle \tilde{T} | \alpha \rangle := \langle T | * \alpha \rangle \tag{7}$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{D}^{2n+1}_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$*. Reciprocamente, tramite (7), ogni* $(2n+1)$ *corrente* $\tilde{T}$ *può essere identificata canonicamente con una usuale distribuzione* $T \in D'(\mathcal{U})$*.*

Definizione 0.8. *Se* $\alpha \in \mathcal{E}^k_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$ *e* $\beta \in \mathcal{E}^h_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$ *con* $k \le n$*,* $h > n$ *allora per ogni* $p \in \mathcal{U}$*,* $\alpha(p)$ *è identificata con una classe quoziente. Dunque, se* α_0 *è un rappresentante di* $\alpha(p)$*, definiamo* $(\alpha \wedge \beta)(p)$ *come la forma* $\alpha_0 \wedge \beta(p)$*. La definizione è ben posta.*

Seguendo [3], 4.1.7, diamo la definizione seguente.

Definizione 0.9. *Se* $T \in D'_{\mathbb{H},m}(\mathcal{U})$*, e* $\phi \in \mathcal{E}^k_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$*, con* $k \le m$*, definiamo* $T \llcorner \phi \in \mathcal{D}'_{\mathbb{H},m-k}(\mathcal{U})$ *come*

$$\langle T \llcorner \phi | \alpha \rangle := \langle T | \phi \wedge \alpha \rangle$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{D}^{m-k}_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$*, purchè* k *e* m *siano tali che* $\phi \wedge \alpha$ *è ben definito in* $D_{\mathbb{H},m}(\mathcal{U})$*.*

Proposizione 0.2. *Sia* $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}^n$ *un aperto. Se* $1 \le m \le 2n+1$*,* $\xi_1, \dots \xi_{N_m}$ *è un sistema mobile di riferimento ortonormale e invariante a sinistra di* ${}_H\bigwedge^m$ *and* $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{H},m}(\mathcal{U})$*, allora esistono* $T_1, \dots, T_{N_m} \in \mathcal{D}'(\mathcal{U})$ *tali che*

$$T = \sum_j \tilde{T}_j \llcorner (*\xi_j).$$

Definizione 0.10. *Sia Φ come nella Definizione 0.6, e sia $T \in \mathcal{D}'_{\mathbb{H},m}(\mathbb{H}^n)$. Inoltre, denotiamo con $\check{\Phi}$ la funzione definita da $\check{\Phi}(p) := \Phi(p^{-1})$. Allora poniamo*

$$\langle \Phi * T | \alpha \rangle := \langle T | \check{\Phi} * \alpha \rangle$$

per ogni $\alpha \in \mathcal{D}^m_{\mathbb{H}}$.

Per definizione di operatore differenziale lineare tra fibrati vettoriali, se $\mathcal{L}$ è un operatore differenziale lineare da $D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$a $D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$, dato un sistema di riferimento ortonormale mobile invariante a sinistra $\{\xi_1, \dots \xi_{N_m}\}$ of ${}_H\bigwedge^m$, possiamo scrivere

$$\mathcal{L}(\sum_j \alpha_j \xi_j) = \sum_j \big(\sum_i \mathcal{L}_{ij} \alpha_i \big) \xi_j, \tag{8}$$

dove i $\mathcal{L}_{ij}$ sono operatori differenziali scalari che agiscono su $\mathcal{D}(\mathcal{U})$.

Definizione 0.11. *Diciamo che l'operatore differenziale lineare*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

è invariante a sinistra se $q \in \mathbb{H}^n$

$$\tau_q^\sharp\big(\mathcal{L}(\alpha)\big) = \mathcal{L}(\tau_q^\sharp \alpha)$$

per ogni $\alpha \in D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$.

Proposizione 0.3. *Sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

un operatore differenziale lineare invariante a sinistra che può essere scritto rispetto a un sistema di riferimento mobile ortonormale invariante a sinistra nella forma

$$\mathcal{L}(\sum_j \alpha_j \xi_j) = \sum_j \big(\sum_i \mathcal{L}_{ij} \alpha_i \big) \xi_j.$$

Allora gli operatori $\mathcal{L}_{ij}$'s sono operatori differenziali lineari invarianti a sinistra.

Per il teorema di Poincaré–Birkhoff–Witt il seguente teorema vale.

Corollario 0.1. *Sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$$

un operatore differenziale lineare invariante a sinistra come sopra. Allora i $\mathcal{L}_{ij}$ *sono polinomi a coefficienti costanti in* $W_1, \dots, W_{2n}$*.*

Definizione 0.12. *Diciamo che un operatore differenziale invariante a sinistra*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

è omogeneo di grado $a \in \mathbb{N}$ *se per ogni* $t > 0$

$$t^a \delta^\sharp_t\big(\mathcal{L}(\alpha)\big) = \mathcal{L}(\delta^\sharp_t \alpha)$$

per ogni $\alpha \in D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$*.*

Con un abuso di notazione, se $\{\xi_1, \dots, \xi_{N_m}\}$ è un sistema di riferimento mobile invariante a sinistra e $\alpha = \sum_j \alpha_j \in D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$, scriveremo

$$\alpha \circ \delta_t \quad \text{per} \quad \sum_j (\alpha_j \circ \delta_t)\xi_j.$$

Proposizione 0.4. *Sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

un operatore differenziale invariante a sinistra, omogeneo di grado $a \in \mathbb{N}$ *che si scrive, rispetto ad sistema di riferimento mobile invariante a sinistra, come*

$$\mathcal{L}(\sum_j \alpha_j \xi_j) = \sum_j \big(\sum_i \mathcal{L}_{ij}\alpha_i\big)\xi_j.$$

Allora gli $\mathcal{L}_{ij}$ *sono polinomi omogenei a coefficienti costanti di grado* a *in* $W_1, \dots, W_{2n}$*.*

Definizione 0.13. *Sia* $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}^n$ *un aperto, e sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathcal{U}) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$$

un operatore differenziale lineare. Allora $\mathcal{L}$ *può essere esteso in modo usuale ad un operatore*

$$\mathcal{L} : D'_{\mathbb{H},m}(\mathcal{U}) \to D'_{\mathbb{H},m}(\mathcal{U})$$

con l'identità

$$\langle \mathcal{L}T|\alpha\rangle := \langle T|^t\mathcal{L}\alpha\rangle$$

per ogni $\alpha \in D^m_{\mathbb{H}}(\mathcal{U})$.

Definizione 0.14. *Sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

un operatore differenziale lineare. Diciamo che $\mathcal{L}$ *è localmente risolubile in* $p \in \mathbb{H}^n$ *se* p *ha un inorno aperto* V *tale che, data una corrente* Ψ *in* $D'_{\mathbb{H},m}(\mathbb{H}^n)$, *esiste una corrente* $T \in D'_{\mathbb{H},m}(V)$ *tale che* $\mathcal{L}T = \Psi$ *su* V.

Teorema 0.4. *Sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

un operatore differenziale invariante a sinistra tale che il suo aggiunto formale in $D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$ *(che è ancora invariante a sinistra) sia ipoellittico. Allora* $\mathcal{L}$ *è localmente risolubile in* $D'_{\mathbb{H},m}(\mathbb{H}^n)$.

La prova seguente segue dalla corrispondente dimostrazione in [5].

Teorema 0.5. *Sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

un operatore ipoellittico invariante a sinistra, tale che ${}^t\mathcal{L} = \mathcal{L}$. *Supponiamo che* $\mathcal{L}$ *sia omogeneo di grado* $a < Q$. *Allora per* $j = 1, \dots, N_m$ *e per ogni* $p \in \mathbb{H}^n$ *esistono* $K_j \in D'_{\mathbb{H},m}(\mathbb{H}^n) \cap \mathcal{E}^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n \setminus \{p\})$ *tali che*

$$\mathcal{L}K_j = \tilde{\delta}_p \llcorner (*\xi_j), \tag{9}$$

dove δ_p *è la massa di Dirac nel punto* p.

Inoltre, K_j *sono omogenee di grado* $a - Q$.

Osservazione 0.5. *Per la Proposizione 0.2, abbiamo*

$$K_j = \sum_i \tilde{K}_{ij} \llcorner (*\xi_i),$$

per opportune distribuzioni $K_{ij} \in \mathcal{D}'(\mathbb{H}^n)$, $i, j = 1, \dots, N_m$.

Ragionando come nel Teorema 0.4, K_{ij} sono nuclei di tipo a nel senso di [5], *per* $i, j = 1, \dots, N_m$.

Teorema 0.6. *Sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

un operatore ipoellitico invariante a sinistra tale che ${}^t\mathcal{L} = \mathcal{L}$. *Supponiamo anche che* $\mathcal{L}$ *sia omogeneo di grado* $a < Q$.

Con le notazioni dell'Osservazione 0.5, se $\alpha \in D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$, *e si pone*

$$\mathcal{K}\alpha := \sum_{ij} (\alpha_j * \tilde{K}_{ij}) \llcorner (*\xi_i),$$

allora

$$\mathcal{L}\mathcal{K}\alpha = \alpha.$$

Definizione 0.15 (see [9]). *Sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

un operatore ipoellitico invariante a sinistra di ordine $a \in \mathbb{N}$. *Diciamo che* $\mathcal{L}$ *è ipoellittico massimale se esiste* $\delta > 0$ *tale che per ogni polinomio omogeneo* P *in* $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots Y_n$ *di grado* a

$$\|P\alpha\|_{L^{m;2}(\mathbb{H}^n)} \le C \left(\|\mathcal{L}\alpha\|_{L^{m;2}(\mathbb{H}^n)} + \|\alpha\|_{L^{m;2}(\mathbb{H}^n)} \right).$$

per ogni $\alpha \in D^m_{\mathbb{H}}(B_\rho(0, \delta))$.

Teorema 0.7. *Sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

un operatore differenziale ipoellitico massimale, invariante a sinistra, tale che ${}^t\mathcal{L} = \mathcal{L}$. *Supponiamo inoltre che* $\mathcal{L}$ *sia omogeneo di grado* $a < Q$. *Se* $\alpha \in D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$, *abbiamo che*

$$\mathcal{K}\mathcal{L}\alpha = \alpha.$$

Dimostrazione. Poniamo $\alpha - \mathcal{K}\mathcal{L}\alpha := \omega$. Sappiamo che $\mathcal{L}\omega = 0$, e quindi ω è regolare.

Inoltre, se R è un operatore differenziale omogeneo per i campi vettoriali orizzontali di grado $\ell < a$, allora

$$R\omega(p) = O(|p|^{a-\ell-Q}) \quad \text{as } p \to \infty. \tag{10}$$

Ovviamente, ci basta dimostrare la stima precedente per $\mathcal{K}\mathcal{L}\alpha$. Sia ora $(\mathcal{L}\alpha)_j * K_{ij}$ il coefficiente generico di $\mathcal{K}\mathcal{L}\alpha$. Abbiamo

$$R\big((\mathcal{L}\alpha)_j * K_{ij}\big) = (\mathcal{L}\alpha)_j * RK_{ij}.$$

Il nucleo RK_{ij} è di tipo $a-\ell$, e quindi $|RK_{ij}(p)| \le c|p|^{a-\ell-Q}$. Allora la tesi segue via un'argomentazione standard, ricordando che $\mathcal{L}\alpha$ è a supporto compatto.

Sia ψ una funzione C^∞ non negativa , $\psi(p) \equiv 1$ se $\rho(p) < 1$, e $\psi(p) \equiv 0$ per $\rho(p) > 2$. Poniamo

$$\psi_N := \psi \circ \delta_{1/N},$$

e

$$\omega_N := (\psi_N \omega) \circ \delta_{2N}.$$

Si noti che $\omega_N(p) = 0$ when $\rho(\delta_{2N}(p)) > 2N$, cioè supp $\omega_N \subset B_\rho(0,1)$.

Si può sempre supporre che se P è un polinomio omogeneo in $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots Y_n$ di grado a, allora

$$\|P\omega_N\|_{L^{m;2}(\mathbb{H}^n)} \le C\left(\|\mathcal{L}\omega_N\|_{L^{m;2}(\mathbb{H}^n)} + \|\omega_N\|_{L^{m;2}(\mathbb{H}^n)}\right). \tag{11}$$

Ora,

$$P\omega_N = (2N)^a \big(P(\psi_N\omega)\big) \circ \delta_{2N},$$

e analogamente

$$\mathcal{L}\omega_N = (2N)^a \big(\mathcal{L}(\psi_N\omega)\big) \circ \delta_{2N}.$$

Dunque, sostituendo in (11), e ponendo $q = \delta_{2N}(p)$, otteniamo

$$\|P(\psi_N\omega)\|_{L^{m;2}(\mathbb{H}^n)} \le C\left(\|\mathcal{L}(\psi_N\omega)\|_{L^{m;2}(\mathbb{H}^n)} + N^{-a}\|\psi_N\omega\|_{L^{m;2}(\mathbb{H}^n)}\right). \tag{12}$$

Mostriamo ora che il membro destro della (12) tende a zero per $N \to \infty$. Dalla [5], Proposizione 1.5, si ha

$$\begin{aligned} N^{-2a} \int_{M\le\rho(q)} |\psi_N(q)\omega(q)|^2 dq &\le cN^{-2a} \int_{M\le\rho(q)\le 2N} \rho(q)^{2a-2Q} dq \\ &= cN^{-2a} \int_M^{2N} r^{2a-Q-1}\, dr \to 0 \quad \text{as } N \to \infty. \end{aligned}$$

Infatti, se $\int_M^\infty r^{2a-Q-1}\, dr < \infty$, l'asserto segue se $a > 0$, mentre, se $\int_M^\infty r^{2a-Q-1}\, dr = \infty$, basta usare la regola di de l'Hôpital.

Questo mostra che il secondo tremine di destra tende a zero se $N \to \infty$. Per quanto concerne il primo, tenendo conto che $\mathcal{L}\omega = 0$, notiamo innanzitutto che abbiamo

$$\mathcal{L}(\psi_N\omega) = \psi_N \mathcal{L}\omega + \sum_{\ell=0}^{a-1} Q_\ell\psi_N \cdot P_\ell\omega = \sum_{\ell=0}^{a-1} Q_\ell\psi_N \cdot P_\ell\omega,$$

dove Q_ℓ's e gli P_ℓ's sono operatori differenziali nelle derivate orizzontali di grado rspettivamente $a - \ell$ e ℓ. Abbiamo che

$$\begin{aligned} &\int_{M\le\rho(q)} |Q_\ell\psi_N \cdot P_\ell\omega|^2 dq \\ &\qquad \le cN^{2\ell-2a} \int_{M\le\rho(q)\le 2N} \rho(q)^{2a-2\ell-2Q} dq \\ &\qquad = cN^{2\ell-2a} \int_M^{2N} r^{2a-2\ell-Q-1}\, dr \to 0 \quad \text{as } N \to \infty. \end{aligned}$$

In effetti, se $\int_M^\infty r^{2a-2\ell-Q-1}\, dr < \infty$, la tesi segue essendo $\ell < a$. Nell'altro caso, il risultato si ottiene utilizzando la regola di de l'Hôpital.

Sia ora $B_\rho(0, R)$ una palla arbitraria. Allora

$$\|P(\psi_N\omega)\|_{L^{m;2}(B_\rho(0,R))} \to 0 \quad \text{as } N \to \infty.$$

D'altronde, per $N > R$ $\psi_N\omega \equiv \omega$ su $B(0, R)$, che implica $P\omega \equiv 0$ su $\mathbb{H}^n$ (si ricordi che ω è C^∞).

Supponiamo ora $a = 2b$, con $b \in \mathbb{N}$. In particolare abbiamo che $T^b\omega = 0$, cioè il generico coefficiente ω_j di ω ha la forma $\omega_j(p) = u_0(p') + u_1(p')p_{2n+1} + \cdots + u_b(p')p_{2n+1}^b$. Se $p \to \infty$ per p' fissato, abbiamo infine $\omega_j \equiv 0$, poiché ω_j si annulla all' infinito per la (10). Finalmente, se $a = 2b - 1$, con $b \in \mathbb{N}$, lo stesso argomento può essere applicato per mostrare che $X_k\omega_j$ and $Y_k\omega_j$ si annullano identicamente per $k = 1, \ldots, n$. Quindi anche

$T\omega_j$ si annulla identicamente così che ω_j è una costante, che deve essere zero per (10). Questo completa la prova del Teorema. □

Osservazione 0.6. *Questi risultati possono essere estesi – con opportune modifiche – al caso $a = Q$. Si veda* [2].

Teorema 0.8. *Sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

un operatore differenziale ipoellitico massimale, invariante a sinistra, tale che ${}^t\mathcal{L} = \mathcal{L}$. Supponiamo inoltre che $\mathcal{L}$ sia omogeneo di grado $a < Q$. Allora per ogni $p > 1$ e per ogni operatore differenziale omogeneol P di ordine a nei campi vettoriali orizzontali, esiste $C > 0$ tale che

$$\|P\alpha\|_{L^{m;p}(\mathbb{H}^n)} \le C\|\mathcal{L}\alpha\|_{L^{m;p}(\mathbb{H}^n)} \tag{13}$$

per ogni $\alpha \in D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$.

Se $I = (i_1, \dots, i_{2n+1})$ è un multiindice, poniamo $W^I = W_1^{i_1} \cdots W_{2n}^{i_{2n}}\ T^{i_{2n+1}}$ e $d(I) = i_1 + \cdots + i_{2n} + 2i_{2n+1}$. Inoltre, se $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, poniamo anche

$$|W^i\alpha| = \sum_{d(I)=i} |W^I\alpha|.$$

Corollario 0.2. *Sotto le ipotesi e con le notazioni del Teorema 0.8, la stima (13) può essere sostituita da*

$$\|W^a\alpha\|_{L^{m;p}(\mathbb{H}^n)} \le C\|\mathcal{L}\alpha\|_{L^{m;p}(\mathbb{H}^n)} \tag{14}$$

Teorema 0.9. *Sia*

$$\mathcal{L} : D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n) \to D^m_{\mathbb{H}}(\mathbb{H}^n)$$

un operatore differenziale invariante a sinistra ipoellittico massimale tale che ${}^t\mathcal{L} = \mathcal{L}$. Supponiamo anche che $\mathcal{L}$ sia omogeneo di grado $a < Q$. Siano $\Omega' \subset\subset \Omega$ due aperti limitati di $\mathbb{H}^n$. Allora per ogni $p > 1$ esiste $C = C(\mathcal{L}, p, \Omega, \Omega') > 0$ tale che

$$\|W^a\alpha\|_{L^{m;p}(\Omega')} \le C\big(\|\mathcal{L}\alpha\|_{L^{m;p}(\Omega)} + \|\alpha\|_{L^{m;p}(\Omega)}\big), \tag{15}$$

per ogni $\alpha \in W^{m;2,p}_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Definizione 0.16. *Seguendo* [13], *definiamo l'operatore r* $\Delta_{\mathbb{H},m}$ *(Laplaciano di Rumin) che agisce sulle m-forme di Heisenberg*

$$\Delta_{\mathbb{H},m} = \begin{cases} \\ (n-m)d_c\delta_c + (n-m+1)\delta_c d_c \quad if\, 0 \le m \le n-1; \\ (d_c\delta_c)^2 + \delta_c d_c \quad se\ m = n; \\ d_c\delta_c + (\delta_c d_c)^2 \quad ise0 \le m = n+1; \\ (n-m+1)d_c\delta_c + (n-m)\delta_c d_c \quad se\ n+2 \le m \le 2n+1. \end{cases}$$

Corollario 0.3. *Supponiamo* $n > 1$*, e sia* $\Delta_{\mathbb{H},m}$ *il Laplaciano di Rumin sulle m–form di Heisenberg. Siano* $\Omega' \subset\subset \Omega$ *due aperti limitati in*$\mathbb{H}^n$*. Allora per ogni* $p > 1$ *esiste* $C = C(\mathcal{L}, p, \Omega, \Omega') > 0$ *tale che*

$$\|W^a\alpha\|_{L^{m;p}(\Omega')} \le C\big(\|\Delta_{\mathbb{H},m}\alpha\|_{L^{m;p}(\Omega)} + \|\alpha\|_{L^{m;p}(\Omega)}\big),$$

per ogni $\alpha \in W^{m;2,p}_{\mathbb{H},\mathrm{loc}}(\Omega)$*.*

Riferimenti bibliografici

[1] A.Baldi, B.Franchi & M.C.Tesi, *Fundamental solution and sharp L^p estimates for Laplace operators in the contact complex of Heisenberg groups*, Ricerche Mat., **55** (2006), 119–144.

[2] A.Baldi, B.Franchi & M.C.Tesi, *Compensated compactness in the contact complex of Heisenberg groups*, preprint (2006).

[3] H.Federer, Geometric Measure Theory, Springer, (1969).

[4] B. Franchi, N. Tchou & M.C. Tesi, div − curl *type theorem, H-convergence, and Stokes formula in the Heisenberg group*, Commun. Contemp. Math., **8** (2006), 67–99.

[5] G.B.Folland, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat., **13** (1975), 161–207.

[6] B.Franchi, R.Serapioni & F.Serra Cassano, *Regular submanifolds, graphs and area formula in Heisenberg Groups*, Adv. Math (to appear).

[7] D.Gilbarg & N.S.Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, (1983).

[8] M.Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, in *Subriemannian Geometry*, Progress in Mathematics, **144**. ed. by A.Bellaiche and J.Risler, Birkhauser Verlag, Basel, (1996).

[9] B.Helffer & J.Nourrigat *Hypoellipticit maximale pour des oprateurs polynmes de champs de vecteurs*, Progress in Mathematics, 58. Birkhuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985.

[10] G. Lu *Polynomials, higher order Sobolev extension theorems and interpolation inequalities on weighted Folland-Stein spaces on stratified groups*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 16 (2000), no. 3, 405–444.

[11] R.Monti & D.Morbidelli *Non-tangentially accessible domains for vector fields*, Indiana Univ. Math. J. 54 (2005), no. 2, 473–498.

[12] P.Pansu, *Differential forms and connections adapted to a contact structure, after M. Rumin*, Symplectic geometry, 183–195, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 192, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[13] M.Rumin, *Formes différentielles sur les variétés de contact* J. Differential Geom. 39 (1994), no. 2, 281–330

[14] M.Rumin, *An introduction to spectral and differential geometry in Carnot-Carathodory spaces* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 75 (2005), 139–196.

[15] E.M.Stein, *Harmonic Analysis: Real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton (1993).

[16] N.Th.Varopoulos & L.Saloff-Coste & T.Coulhon, *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).