Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2006-07

Bruno Franchi

Funzioni Lipschitziane nel gruppo di Heisenberg

10 maggio 2007

Abstract

In this seminar we present the results of a joint paper with R. Serapioni and F. Serra Cassano. We introduce an intrinsic notion of Lipschitz graph in Heisenberg groups, and we prove a Rademacher type theorem for Lipschitz continuous functions

In questo seminario intendo presentare alcuni risultati ottenuti in collaborazione con R.Serapioni e F.Serra Cassano.

Per una presentazione generale dei gruppi di Heisenberg e delle loro proprietà, rinviamo a [8], [6] [1] e [9]. Ci limitiamo a fissare alcune notazioni.

Nel seguito, $\mathbb{H}^n$ è il gruppo di Heisenberg n-dimensionale, identificato con $\mathbb{R}^{2n+1}$ tramite coordinate esponenziali. Un punto $p \in \mathbb{H}^n$ è denotato come $p = (p_1, \dots, p_{2n}, p_{2n+1}) = (p', p_{2n+1})$, con $p' \in \mathbb{R}^{2n}$ e $p_{2n+1} \in \mathbb{R}$. Se p e $q \in \mathbb{H}^n$, l'operazione di gruppo è

$$p \cdot q = (p' + q', p_{2n+1} + q_{2n+1} - \frac{1}{2}\langle Jp', q'\rangle_{\mathbb{R}^{2n}})$$

dove $J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ è la matrice simplettica $2n \times 2n$. Poniamo inoltre $p^{-1} := (-p', -p_{2n+1})$ l'inverso di p ed e l'identità di $\mathbb{H}^n$.

Per ogni fissato $q \in \mathbb{H}^n$ e per ogni $r > 0$ la traslazione a sinistra $\tau_q : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ e le dilatazioni anisotrope $\delta_r : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ sono gli automorfismi del gruppo definiti da

$$\tau_q(p) := q \cdot p \qquad \text{e da} \qquad \delta_r p := (rp', r^2 p_{2n+1}).$$

Denotiamo con $\mathfrak{h}$ l'algebra di Lie di $\mathbb{H}^n$. La base standard di $\mathfrak{h}$ è data, per $i = 1, \dots, n$, da

$$X_i := \partial_i - \frac{1}{2}(Jp')_i \partial_{2n+1}, \quad Y_i := \partial_{i+n} + \frac{1}{2}(Jp')_{i+n}\partial_{2n+1}, \quad T := \partial_{2n+1}.$$

Il *sottospazio orizzontale* $\mathfrak{h}_1$ è il sottospazio di $\mathfrak{h}$ generato da $X_1, \dots, X_n$ and $Y_1, \dots, Y_n$. Denotando con $\mathfrak{h}_2$ l'inviluppo lineare di T, la stratificazione a 2 due passi di $\mathfrak{h}$ è espressa da

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2. \tag{1}$$

L'algebra di Lie $\mathfrak{h}$ è anche fornita di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ che rende i campi $X_1, \dots, X_n$ e $Y_1, \dots, Y_n$ and T ortonormali. Così, (1) diviene una decomposizione ortonormale di $\mathfrak{h}$ come spazio vettoriale.

Se $p \in \mathbb{H}^n$, poniamo

$$\|p\| := d_\infty(p, e) := \max\{\|(p_1, \cdots, p_{2n})\|_{\mathbb{R}^{2n}}, |p_{2n+1}|^{1/2}\}$$

e

$$d_\infty(p,q) = d_\infty(q^{-1}\cdot p, e) = \left\|q^{-1}\cdot p\right\|.$$

È ben noto che d_∞ è equivalente alla distanza di Carnot-Caratheodory di $\mathbb{H}^n$. Inoltre

$$d_\infty(z\cdot x, z\cdot y) = d_\infty(x,y) \qquad d_\infty(\delta_\lambda x, \delta_\lambda y) = \lambda d_\infty(x,y)$$

per $x,y,z\in\mathbb{H}^n$ e $\lambda>0$. Denotiamo con $U(p,r)$ e con $B(p,r)$ le palle aperte e chiuse associate a d_∞.

Definizione 0.1. *Diciamo che* $\mathbb{H}^n$ *è il* prodotto semidiretto *dei sottogruppi omogenei* $\mathbb{W}$ *e* $\mathbb{V}$ *e scriviamo*

$$\mathbb{H}^n = \mathbb{W}\cdot\mathbb{V}$$

se $\mathbb{W} := \exp\mathfrak{w}$, $\mathbb{V} := \exp\mathfrak{v}$, *dove* $\mathfrak{w}$ *e* $\mathfrak{v}$ *sono sottoalgebre omogenee di* $\mathfrak{h}$ *(vedi* [8] *5.2.4) tali che*

(i): $\mathfrak{h} = \mathfrak{w}\oplus\mathfrak{v}$;

(ii): $\mathfrak{w}\supset\mathfrak{h}_2$ *o, equivalentemente,* $\mathfrak{w}$ *è un ideale in* $\mathfrak{h}$;

Chiaramente $\mathbb{W}\cap\mathbb{V}=\{e\}$; inoltre ($ii$) equivale a dire che $\mathbb{W}$ è un sottogruppo normale di $\mathbb{H}^n$.

Notiamo anche che $\mathfrak{v}\subset\mathfrak{h}_1$. Infatti $T\notin\mathfrak{v}$ poichè $T\in\mathfrak{w}$; inoltre se $T+V\in\mathfrak{v}$ per qualche $V\in\mathfrak{v}$, allora sia $\lambda T+\lambda V\in\mathfrak{v}$ sia $\lambda V+\lambda^2 T\in\mathfrak{v}$ e quindi $T\in\mathfrak{v}$. Poichè $\mathfrak{v}$ è una sottoalgebra di $\mathfrak{h}_1$, ne segue che la dimensione lineare di $\mathfrak{v}$ is $\le n$, che $\mathfrak{v}$ è un'algebra commutativa e che di conseguenza $\mathbb{V}\simeq\mathbb{R}^k$ if $k=\dim\mathfrak{v}$. In particolare, $\mathbb{V}$ è un sottogruppo commutativo di $\mathbb{H}^n$.

Ogni elemento $p\in\mathbb{H}^n$ può essere scritto in un unico modo come $p = p_{\mathbb{W}}\cdot p_{\mathbb{V}}$, con $p_{\mathbb{W}}\in\mathbb{W}$ e $p_{\mathbb{V}}\in\mathbb{V}$.

Proposizione 0.1. *Se* $\mathbb{H}^n=\mathbb{W}\cdot\mathbb{V}$, *ogni* $q\in\mathbb{H}^n$ *ha uniche 'componenti'* $q_{\mathbb{W}}\in\mathbb{W}$, $q_{\mathbb{V}}\in\mathbb{V}$, *tali che* $q = q_{\mathbb{W}}\cdot q_{\mathbb{V}}$. *Le mappe*

$$q\to q_{\mathbb{V}} \text{ e } q\to q_{\mathbb{W}}$$

sono continue ed esiste una costante $c=c(\mathbb{V},\mathbb{W})>0$ *tale che*

$$c\left(\|q_{\mathbb{V}}\|+\|q_{\mathbb{W}}\|\right)\le\|q\|\le\left(\|q_{\mathbb{V}}\|+\|q_{\mathbb{W}}\|\right). \tag{2}$$

Inoltre,

$$(3)\qquad \begin{aligned} &(q^{-1})_{\mathbb{V}} = (q_{\mathbb{V}})^{-1} \quad e \quad (q^{-1})_{\mathbb{W}} = q_{\mathbb{V}}^{-1} \cdot (q_{\mathbb{W}})^{-1} \cdot q_{\mathbb{V}} \\ &(p \cdot q)_{\mathbb{V}} = p_{\mathbb{V}} \cdot q_{\mathbb{V}} \quad and \quad (p \cdot q)_{\mathbb{W}} = p_{\mathbb{W}} \cdot p_{\mathbb{V}} \cdot q_{\mathbb{W}} \cdot p_{\mathbb{V}}^{-1}. \end{aligned}$$

Se $\mathbb{H}^n = \mathbb{W} \cdot \mathbb{V}$, chiamiamo con *sistema di piani coordinati* la famiglia doppia $\mathcal{L}_{\mathbb{V}}$ e $\mathcal{L}_{\mathbb{W}}$ di laterali di $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, cioè

$$\mathcal{L}_{\mathbb{V}}(p) := p \cdot \mathbb{V}, \quad \forall p \in \mathbb{W} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}_{\mathbb{W}}(q) := q \cdot \mathbb{W}, \quad \forall q \in \mathbb{V}.$$

Ogni $p \in \mathbb{H}^n$ appartiene esattamente a una foglia di $\mathcal{L}_{\mathbb{V}}$ e a una di $\mathcal{L}_{\mathbb{W}}$; le foglie di $\mathcal{L}_{\mathbb{V}}$ (o di $\mathcal{L}_{\mathbb{W}}$) sono invarianti per traslazione, cioè $x \in \mathcal{L}_{\mathbb{V}}(p) \implies \tau_x \mathcal{L}_{\mathbb{V}}(p) = \mathcal{L}_{\mathbb{V}}(p)$.

Per un intero nonnegativo k, $\mathcal{L}^k$ denota la misura k dimensionale di Lebesgue. È noto che $\mathcal{L}^{2n+1}$ è la misura di Haar biinvariante di $\mathbb{H}^n$, quindi, se $E \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ è misurabile, allora $\mathcal{L}^{2n+1}(\tau_p(E)) = \mathcal{L}^{2n+1}(E)$ per tutti i $p \in \mathbb{H}^n$. Inoltre, se $\lambda > 0$, allora $\mathcal{L}^{2n+1}(\delta_\lambda(E)) = \lambda^{2n+2}\mathcal{L}^{2n+1}(E)$. Osserviamo esplicitamente che, $\forall p \in \mathbb{H}^n$ e $\forall r > 0$,

$$\mathcal{L}^{2n+1}(B(p,r)) = r^{2n+2}\mathcal{L}^{2n+1}(B(p,1)) = r^{2n+2}\mathcal{L}^{2n+1}(B(0,1)).$$

Notiamo anche che, se ω_k è la $\mathcal{L}^k$ misura della palla euclidea unitaria in $\mathbb{R}^k$, allora $\mathcal{L}^{2n+1}\left(B(e,r)\right) = 2\omega_{2n} r^{2n+2}$ e, se $k := \dim \mathfrak{v} \leq n$,

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\mathcal{L}^k\left(B(e,r) \cap \mathbb{V}\right) = \omega_k r^k; \\ &\mathcal{L}^{2n+1-k}\left(B(e,r) \cap \mathbb{W}\right) = 2\omega_{2n-k} r^{2n+2-k}. \end{aligned}$$

Partendo dalla distanza d_∞, possiamo ottenere delle misure di Hausdorff seguendo la costruzione di Carathédory come in [2] Section 2.10.2. Per $m \geq 0$, denotiamo con $\mathcal{H}^m$ la misura di Hausdorff m-dimensionale in $\mathbb{H}^n$, ottenuta dalla distanza d_∞. Analogamente, $\mathcal{S}^m$ denota la misura di Hausdorff sferica.

Proposizione 0.2. *Se $\mathbb{H}^n = \mathbb{W} \cdot \mathbb{V}$ come nella Definizione 0.1, allora se k, $1 \leq k \leq n$, è la dimensione lineare di $\mathfrak{v}$, allora la dimensione metrica dif $\mathbb{V}$ è k mentre la dimensione metrica di $\mathbb{W}$ $\;2n + 2 - k$.*

Definizione 0.2. *Assumiamo che $\mathbb{H}^n$ sia il prodotto semidiretto dei sottogruppi $\mathbb{B}$ e $\mathbb{N}$. Diciamo che $S \subset \mathbb{H}^n$ è un* grafico (sinistro) su $\mathbb{B}$ lungo $\mathbb{N}$ *se, per ogni $\xi \in \mathbb{B}$, $S \cap \mathcal{L}_{\mathbb{N}}(\xi)$*

contiene al più un punto. Equivalentemente, se esiste una funzione $\varphi : E \subset \mathbb{B} \to \mathbb{N}$ *tale che*

$$S = \{\xi \cdot \varphi(\xi) : \xi \in E\}$$

e diciamo che S è il grafico di φ, $S = \mathrm{graph}(\varphi)$.

Una proprietà elementare ma cruciale dei grafici così definiti è la loro invarianza rispetto a traslazioni sinistre e dilatazioni. Cioè, se S è un grafico da $\mathbb{B}$ a $\mathbb{N}$ allora anche $\delta_\lambda S$ e $\tau_p S$ sono grafici da $\mathbb{B}$ a $\mathbb{N}$, ovviamente di funzioni diverse.

Proposizione 0.3. *Sia* $S = \{\xi \cdot \varphi(\xi)\}$ *con* $\varphi : E \subset \mathbb{B} \to \mathbb{N}$. *Allora l'insieme dilatato* $\delta_\lambda S$ *è il grafico di* $\varphi_\lambda : \delta_\lambda E \subset \mathbb{B} \to \mathbb{N}$, *precisamente*

$$\delta_\lambda S = graph(\varphi_\lambda) \quad con\ \varphi_\lambda := \delta_\lambda \circ \varphi \circ \delta_{1/\lambda} : \delta_\lambda E \to \mathbb{N}.$$

Per descrivere l'effetto delle traslazioni sul grafico, è meglio distinguere quale fattore di $\mathbb{H}^n$ è un sottogruppo normale. Assumiamo che $\mathbb{H}^n$ sia il prodotto semidiretto dei sottogruppi $\mathbb{W}$ e $\mathbb{V}$ e che $\mathbb{W}$ sia un sottogruppo normale.

Proposizione 0.4. *Sia* $S \subset \mathbb{H}^n$ *un grafico (sinistro). Allora, per ogni* $q = q_\mathbb{W} \cdot q_\mathbb{V} \in \mathbb{H}^n$, *l'insieme traslato* $\tau_q S$ *è ancora un grafico. Precisamente*

(i): *Se* $S = \{w \cdot \varphi(w) :\ w \in E \subset \mathbb{W}\}$ *è un grafico su* $\mathbb{W}$, *con* $\varphi : E \subset \mathbb{W} \to \mathbb{V}$, *allora* $\tau_q S = \{\eta \cdot \varphi_q(\eta) :\ \eta \in E' := q \cdot E \cdot (q_\mathbb{V})^{-1} \subset \mathbb{W}\}$, *dove* $\varphi_q : E' \to \mathbb{V}$ *è definito come*

$$\varphi_q(\eta) = q_\mathbb{V} \cdot \varphi(q_\mathbb{V}^{-1} \cdot q_\mathbb{W}^{-1} \cdot \eta \cdot q_\mathbb{V}).$$

(ii): *Se* $S = \{v \cdot \varphi(v) :\ v \in F \subset \mathbb{V}\}$ *è un grafico su* $\mathbb{V}$, *con* $\varphi : F \subset \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, *allora* $\tau_q S = \{\eta \cdot \varphi_q(\eta) :\ \eta \in F' := q_\mathbb{V} \cdot F \subset \mathbb{V}\}$, *dove* $\varphi_q : F' \to \mathbb{W}$ *è definito da*

$$\varphi_q(\eta) = \eta^{-1} \cdot q_\mathbb{W} \cdot \eta \cdot \varphi(q_\mathbb{V}^{-1} \cdot \eta).$$

Definiamo ora che cosa intentiamo per cono (chiuso) intrinseco.

Definizione 0.3. *Se* $\mathbb{H}^n = \mathbb{B} \cdot \mathbb{N}$ *è il prodotto semidiretto di due sottogruppi* $\mathbb{B}$ *e* $\mathbb{N}$, *per* $q \in \mathbb{H}^n$ *and* $\alpha > 0$ *definiamo il* cono $C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(q, \alpha)$ con asse $\mathbb{N}$, base $\mathbb{B}$ e vertice q *come*

$$C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(q, \alpha) := q \cdot C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(e, \alpha)$$

dove

$$C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(e,\alpha) := \{p : \|p_{\mathbb{B}}\| \leq \alpha \|p_{\mathbb{N}}\|\}.$$

Se $\mathbb{G}$ è un sottogruppo dif $\mathbb{H}^n$, non necessariamente fattore di una decomposizione semidiretta di $\mathbb{H}^n$, per $q \in \mathbb{H}^n$ e $\sigma \in (0,1]$, definiamo il cono $X(\mathbb{G}, q, \sigma)$ con asse $\mathbb{G}$ e vertice q, *come*

$$X(\mathbb{G}, q, \sigma) := q \cdot X(\mathbb{G}, e, \sigma)$$

dove

$$X(\mathbb{G}, e, \sigma) := \{p : \operatorname{dist}(p, \mathbb{G}) \leq \sigma \|p\|\}.$$

Se $\mathbb{N}$ è un sottogruppo 1-dimensionale, cioè $\mathbb{N} = \{p = \exp(tV) : t \in \mathbb{R}\}$ per qualche fissato $V \in \mathfrak{h}$, definiamo anche

$$C^{+}_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(e,\alpha) := \{p \in C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(e,\alpha) : \ p_{\mathbb{N}} = \exp(tV) \text{ with } t > 0\}$$

$$C^{-}_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(e,\alpha) := \{p \in C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(e,\alpha) : \ p_{\mathbb{N}} = \exp(tV) \text{ with } t < 0\}.$$

Se $q \in \mathbb{H}^n$, allora $C^{+}_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(q,\alpha)$ e $C^{-}_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(q,\alpha)$ sono definiti coerentemente.

Chiaramente, $C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(e,0) = \mathbb{N}$. Inoltre

$$\cup_{\alpha>0} C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(e,\alpha) = (\mathbb{H}^n \setminus \mathbb{B}) \cup \{e\}.$$

I coni intrinseci sono invarianti rispetto alle dilatazioni del gruppo. Infatti si ha:

Proposizione 0.5. *Siano $\mathbb{B}$ e $\mathbb{N}$ come nella Definizione 0.3, e sia $\alpha, t > 0$. Allora*

$$\delta_t\big(C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(e,\alpha)\big) = C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(e,\alpha) \quad e\ \delta_t\big(X(\mathbb{N}, e, \sigma)\big) = X(\mathbb{N}, e, \sigma).$$

Proposizione 0.6. *Assumiamo che $\mathbb{H}^n$ sia il prodotto semidiretto dei sottogruppi $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$, con $\mathbb{V}$ orizzontale e $\mathbb{W}$ normale. Allora*

(1) *Per ogni $\sigma \in (0,1]$ esiste $\alpha = \alpha(\sigma, \mathbb{B}, \mathbb{N}) > 0$ tale che*

$$C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(q,\alpha) \subset X(\mathbb{N}, q, \sigma), \qquad \forall q \in \mathbb{H}^n. \tag{5}$$

(2) *Per ogni $\alpha > 0$ esiste $\sigma = \sigma(\alpha, \mathbb{B}, \mathbb{N}) \in (0,1]$ tale che*

$$X(\mathbb{N}, q, \sigma) \subset C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(q,\alpha), \qquad \forall q \in \mathbb{H}^n. \tag{6}$$

Definizione 0.4. *Assumiamo che* $\mathbb{H}^n = \mathbb{B}\cdot\mathbb{N}$ *sia il prodotto semidiretto di* $\mathbb{B}$ *e* $\mathbb{N}$*. Diciamo che una funzione* $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{B} \to \mathbb{N}$ *soddisfa la condizione di Lipschitz intrinseca in* $\mathcal{A}$ *se esiste* $L > 0$ *tale che* $\forall q = x \cdot f(x) \in \mathrm{graph}\,(f)$

$$C_{\mathbb{B},\mathbb{N}}(q, 1/L) \cap \mathrm{graph}\,(f) = \{q\}. \tag{7}$$

Se f *soddisfa ua condizione di Lipschitz intrinseca in* $\mathcal{A}$*, la costante di Lipschitz intrinseca di* f *in* $\mathcal{A}$ *è l'estremo superiore degli* L *tali che (7) vale.*

Proposizione 0.7. *Se* $\mathbb{H}^n = \mathbb{B} \cdot \mathbb{N}$ *è il prodotto semidiretto di due sottogruppi omogenei* $\mathbb{B}$ *e* $\mathbb{N}$*, allora* $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{B} \to \mathbb{N}$ *soddisfa una condizione di Lipschitz intrinseca in* $\mathcal{A}$ *se e solo se esiste* $L > 0$ *tale che*

$$\|f_{q^{-1}}(x)\| \le L\,\|x\|\,, \qquad \forall q = x \cdot f(x) \in \mathrm{graph}\,(f). \tag{8}$$

In particolare, ricordando la Proposizione 0.4,

(i) *se* $\mathbb{B}$ *è un sottogruppo normale e* $\mathbb{N}$ *è un sottogruppo orizzontale, allora* $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{B} \to \mathbb{N}$ *è* Lipschitz intrinseca*, se e solo se* $\exists L > 0$ *tale che*

$$\left\|f(x)^{-1} \cdot f(x')\right\| \le L \left\|f(x)^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x' \cdot f(x)\right\|, \quad \forall x, x' \in \mathcal{A};$$

(ii) *se* $\mathbb{B}$ *è un sottogruppo orizzontale e* $\mathbb{N}$ *è un sottogruppo normale, allora* $f : \mathcal{A} \subset \mathbb{B} \to \mathbb{N}$ *è* Lipschitz intrinseca *se e solo se* $\exists L > 0$ *tale che*

$$\left\|x'^{-1} \cdot x \cdot f(x)^{-1} \cdot x^{-1} \cdot x' \cdot f(x')\right\| \le L \left\|x^{-1} \cdot x'\right\|, \quad \forall x, x' \in \mathcal{A}.$$

Proposizione 0.8. *Le superficie* $\mathbb{H}$*-regolari (nel senso di* [5]*) di ogni dimensione sono localmente grafici di funzioni Lipschitz intrinseche.*

Il seguente esempio mostra che, quando si considerino funzioni $\mathbb{W} \to \mathbb{V}$, la condizione di Lipschitzianità usuale non è invariante rispetto a traslazioni del grafico; ne segue che né $\mathbb{H}$-Lipschitz implica Lipschitz, né il contrario.

Controesempio 0.1. *Consideriamo i sottogruppi* $\mathbb{V}$ *e* $\mathbb{W}$ *di* $\mathbb{H}^1 \equiv \mathbb{R}^3$ *definiti come*

$$\mathbb{V} = \{x = (x_1, 0, 0)\}, \quad \mathbb{W} = \{x = (0, x_2, x_3)\}.$$

Allora $\mathbb{W}$ è un sottogruppo normale e $\mathbb{H}^1 = \mathbb{W}\cdot\mathbb{V}$ come in Definizione 0.1 e, $\forall w \in \mathbb{W}$ e $\forall v \in \mathbb{V}$, $\|w\| = \max\{|w_2|, |w_3|^{1/2}\}$ e $\|v\| = |v_1|$.

Sia $\varphi : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ definito come $\varphi(0, w_2, w_3) = \big(1 + |w_3|^{1/2}, 0, 0\big)$. Allora è facile verificare che la usuale Lipschitzianità vale con $L = 1$. Al contrario, φ non è $\mathbb{H}$-Lipschitz. Infatti, sia $p := (1, 0, 0) \in \mathrm{graph}(\varphi)$, dalla Proposizione 0.4 abbiamo $\varphi_{p^{-1}}(w) = \big(|w_2 + w_3|^{1/2}, 0, 0\big)$ così che (8) è falsa.

Al contrario, la funzione $\psi(w) := \big(1 + |w_3 - w_2|^{1/2}, 0, 0\big)$ è Lipschitz intrinseca, ma non Lipschitz in senso usuale.

Controesempio 0.2. *Per finire, osserviamo che, anche se $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ è molto regolare, la parametrizzazione 'naturale' del grafico (f) data da*

$$\Phi : \mathbb{W} \to \mathrm{graph}(f) \subset \mathbb{H}^n, \qquad \Phi(w) = w \cdot f(w)$$

non è una mappa Lipschitz tra spazi metrici. Infatti, consideriamo ancora i sottogruppi $\mathbb{V}$ e $\mathbb{W}$ di $\mathbb{H}^1 \equiv \mathbb{R}^3$ definiti da

$$\mathbb{V} = \{x = (x_1, 0, 0)\}, \quad \mathbb{W} = \{x = (0, x_2, x_3)\}$$

e sia $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ la mappa costante $f(w) = (1, 0, 0) \in \mathbb{V}$. Allora il grafico di f è un piano verticale in $\mathbb{R}^3$ parallelo a $\mathbb{W}$. La parametrizzazione Φ agisce come

$$\Phi(w) = (1, w_2, w_3 + \frac{1}{2}w_2).$$

Quindi $\Phi(e) = (1, 0, 0)$ e, se $\bar{w} = (0, \varepsilon, 0) \in \mathbb{W}$, $\Phi(\bar{w}) = (1, \varepsilon, \frac{\varepsilon}{2})$. È facile verificare che $\|\Phi(e)^{-1} \cdot \Phi(\bar{w})\|$ iè confrontabile a $\varepsilon^{1/2}$ mentre $\|\bar{w}\|$ è confrontabile con ε.

La situazione è tuttavia completamente diversa per mappe $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$.

Un'altra caratterizzazione delle funzioni $\mathbb{H}^n$-Lipschitz può essere data in termini della limitatezza dei loro rapporti incrementali. Cominciamo con una definizione di rapporto incrementale.

Definizione 0.5. *Siat $\mathbb{H}^n = \mathbb{W}\cdot\mathbb{V}$. Se $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$, $w \in \mathbb{W}$, $p := w \cdot f(w) \in \mathrm{graph}(f)$, il* $\mathbb{H}^n$-rapporto incrementale di f, in$w$ lungo la direzione $Y \in \mathfrak{w}$, *è*

$$\Delta_Y f(w; t) = \Delta_Y f_{p^{-1}}(e; t) = \delta_{1/t}\left(f_{p^{-1}}(\exp tY)\right).$$

Simmetricamente, se $g : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *e* $V \in \mathfrak{v}$, $q := v \cdot g(v)$ *il* $\mathbb{H}^n$-rapporto incrementale *è*

$$\Delta_V g(v;t) = \Delta_V g_{q^{-1}}(e;t) = \delta_{1/t}\left(g_{q^{-1}}(\exp tV)\right).$$

Più esplicitamente, per la Proposizione 0.4 otteniamo che, per $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$,

$$\Delta_Y f(w;t) = \delta_{1/t}\left(f(w)^{-1} \cdot f(w \cdot f(w) \cdot \exp tY \cdot f(w)^{-1})\right), \tag{9}$$

e per $g : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$

$$\Delta_V g(v;t) = \delta_{1/t}\left(\exp tV^{-1} \cdot g(v)^{-1} \cdot \exp tV \cdot g(v \cdot \exp tV)\right). \tag{10}$$

Definizione 0.6. *Sia* $\mathbb{H}^n = \mathbb{W} \cdot \mathbb{V}$. *La* derivata direzionale $D_Y f(x)$ *è definita come*

$$D_Y f(x) := \lim_{t \to 0} \Delta_Y f(x;t). \tag{11}$$

Notiamo che $f(x) = e$ implica $\Delta_Y f(x;t) := \delta_{1/t}\left(f(x \cdot \exp tY)\right)$. Osserviamo che, se $D_Y f(x)$ esiste, allora $\forall \lambda > 0$,

$$\begin{aligned} D_{\lambda Y} f(x) &= \lim_{t \to 0} \delta_{1/t} \Delta_{\lambda Y} f(x;t) \\ &= \delta_\lambda \lim_{t \to 0} \delta_{1/\lambda t} \Delta_Y f(x;\lambda t) = \delta_\lambda D_Y f(x). \end{aligned}$$

Chiaramente, le derivate direzionali sono invarianti per traslazioni, cioè, se $p = x \cdot f(x)$,

$$D_Y f(x) = D_Y f_{p^{-1}}(e). \tag{12}$$

Il nostro prossimo teorema fornisce una caratterizzazione delle funzioni $\mathbb{H}$-Lipschitz in termini della limitatezza dei loro rapporti incrementali lungo *direzioni orizzontali.* Sottolineamo che, nonostante la somiglianza di questo risultato con la caratterizzazione delle funzioni Lipschitz $\mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$ in termini della lipschitzianità lungo le direzioni orizzontali di $\mathbb{H}^n$, il presente risultato è essenzialmente diverso. Infatti, in generale, $\mathbb{W}$ non è un gruppo di Carnot in quanto la sua algebra di Lie non è generata dallo strato orizzontale.

Proposizione 0.9. *Sia* $\mathbb{H}^n = \mathbb{W} \cdot \mathbb{V}$.

(i): *Se* $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ *è* $\mathbb{H}^n$*-Lipschitz costante di* L *then,*

$$\|\Delta_Y f(x;t)\| \le L \|\exp Y\|, \quad \forall Y \in \mathfrak{w}.$$

La stessa affermazione vale se $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$, *con* $Y \in \mathfrak{v}$.

(ii): *Se* $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *e*

$$\|\Delta_V f(x;t)\| \le L \|\exp V\|, \quad \forall Y \in \mathfrak{v},$$

allora f *è* $\mathbb{H}^n$*-Lipschitz con costante di Lipschitz* L*.*

(iii): *Se* $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ *e*

$$\|\Delta_Y f(x;t)\| \le L \|\exp Y\|, \quad \forall Y \in \mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{w},$$

allora f *è* $\mathbb{H}^n$*-Lipschitz con costante di Lipschitz* $C = C(L, \mathbb{V}, \mathbb{W})$*.*

Teorema 0.1. *Assumiamo che* $\mathbb{H}^n = \mathbb{W}\cdot\mathbb{V}$ *come nella Definizione 0.1, e sia* k*,* $1 \le k \le n$*, la dimensione di* $\mathbb{V}$*. Se* $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ *è una funzione* $\mathbb{H}^n$*-Lipschitz con costante di Lipschitz* L*, allora* $\mathrm{graph}(f)$ *ha dimensione metrica* $2n+2-k$ *ed esiste una costante geometrica* $c = c(\mathbb{V}, \mathbb{W}) > 0$ *tale che*

$$\mathcal{H}^{2n+2-k}\left(\mathrm{graph}(f) \cap B(p,R)\right) \le c(1+L)^{2n+2-k} R^{2n+2-k}. \tag{13}$$

Simmetricamente, se $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *allora* $\mathrm{graph}(f)$ *ha dimensione metrica* k *e*

$$\mathcal{H}^{k}\left(\mathrm{graph}(f) \cap B(p,R)\right) \le c(1+L)^{k} R^{k}. \tag{14}$$

Teorema 0.2. *Assumiamo che* $\mathbb{H}^n = \mathbb{W} \cdot \mathbb{V}$ *con* $\mathbb{V}$ *1 dimensionale. Se* $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$*è* $\mathbb{H}^n$ *Lipschitz, allora il sottografico di* f *è un insieme di perimetro localmente finito.*

Questa proprietà cruciale dei grafici Lipschitz può essere provata come conseguenza diretta del Teorema 0.1 grazie al Teorema 0.3 sotto..

Teorema 0.3. *Sia* $\Omega, \omega \subset \mathbb{H}^n$ *un aperto tale che* $\partial\Omega$ *ha localmente misura di Hausdorff* $(Q-1)$*-dimensionale intrinseca finita in* ω*. Allora* Ω *ha perimetro localmente finito in* ω*.*

Definizione 0.7. *Diciamo che*

(i): $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ *è una mappa* $\mathbb{H}^n$*-lineare quando,* $\forall v, v' \in \mathbb{V}$ *e* $\forall \lambda > 0$*,*

$$L(\delta_\lambda v) = \delta_\lambda(Lv)$$
$$L(v \cdot v') = (v')^{-1} \cdot Lv \cdot v' \cdot Lv'.$$

(ii): *$L : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ è una mappa $\mathbb{H}^n$-lineare quando $\forall w, w' \in \mathbb{W}$ and $\forall \lambda > 0$,*

$$L(\delta_\lambda w) = \delta_\lambda(Lw)$$

$$L(w \cdot w') = L(w) \cdot L(w').$$

Notiamo che le mappe $\mathbb{H}^n$-lineari $\mathbb{W} \to \mathbb{V}$ sono precisamente mappe H-lineari $\mathbb{W} \to \mathbb{V}$. Al contrario, le due nozioni sono differenti per mappe $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$.

Proposizione 0.10. *Assumiamo che $\mathbb{H}^n = \mathbb{W} \cdot \mathbb{V}$ come nella Definizione 0.1.*

(i): Se $L : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ è una mappa $\mathbb{H}^n$-lineare, allora $\mathrm{graph}(L)$ *è un sottogruppo omogeneo di $\mathbb{H}^n$ e la mappa Φ_L definita da $\Phi_L(v) := v \cdot L(v)$ è un omeomorfismo omogeneo (cioè una mappa H-lineare) $\mathbb{V} \to \mathrm{graph}(L)$.*

(ii): Se $L : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ è $\mathbb{H}^n$-lineare, allora $\mathrm{graph}(L)$ *è un sottogruppo omogeneo di $\mathbb{H}^n$ e la mappa $\Phi_L : \mathbb{W} \to \mathrm{graph}(L)$ definita da $\Phi_L(w) := w \cdot L(w)$ soddisfa*

$$\Phi_L(\delta_\lambda w) = \delta_\lambda(\Phi_L(w))$$

$$\Phi_L(w \cdot w') = \Phi_L(w) \cdot \Phi_L((Lw)^{-1} \cdot w' \cdot Lw).$$

Definizione 0.8. *Assumiamo $\mathbb{H}^n = \mathbb{W} \cdot \mathbb{V}$ come nella Definizione 0.1.*

(i): sia $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$; diciamo che f è $\mathbb{H}$-differenziabile in $w \in \mathbb{W}$ se esiste una mappa $\mathbb{H}$-lineare $df_w : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ tale che

$$\left\| df_w(\xi)^{-1} \cdot f(w)^{-1} \cdot f(w \cdot f(w) \cdot \xi \cdot f(w)^{-1}) \right\| = o(\|\xi\|) \tag{15}$$

quando $\|\xi\| \to 0$.

(ii): sia $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$; diciamo che f è $\mathbb{H}$-differenziabile in $v \in \mathbb{V}$ se esiste una mappa $\mathbb{H}$-lineare $df_v : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ tale che

$$\left\| df_v(\eta)^{-1} \cdot \eta^{-1} \cdot f(v)^{-1} \cdot \eta \cdot f(v \cdot \eta) \right\| = o(\|\eta\|) \tag{16}$$

as $\|\eta\| \to 0$.

Ci limitiamo a enunciare un paio di proprietà elementari dei $\mathbb{H}$-differenziali.

Definizione 0.9. *Assumiamo che $S := \{x \cdot f(x) : x \in A\}$, dove A è un intorno aperto di e in $\mathbb{W}$. Diciamo che un sottogruppo $\mathbb{T}$ di $\mathbb{H}^n$ è il gruppo regolare tangente di$S$ in e se* *esiste un altro sottogruppo* $\mathbb{N}$*, tale che* $\mathbb{T} \cap \mathbb{N} = \{e\}$ *e* $\mathbb{H}^n = \mathbb{T} \cdot \mathbb{N}$*, e se, per tutti gli* $\alpha > 0$*, esiste* $\lambda > 0$ *tale che*

$$C_{\mathbb{T},\mathbb{N}}(e, \alpha) \cap \delta_\lambda S \cap B(e, 1) = \{e\}.$$

Più in generale, diciamo che $\mathbb{T}$ *è il gruppo regolare tangentedi* S *in* $p \in S$ *se* $\mathbb{T}$ *è il piano regolare tangente di* $\tau_{p^{-1}} S$ *ine.*

Proposizione 0.11. *Se* $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$ *è* $\mathbb{H}^n$*-differenziabile in* x *con differenziale* df_x*, allora* $\mathbb{T} := \mathrm{graph}(df_x)$ *è il gruppo regolare tangente di* S *in* $p = x \cdot f(x)$*.*

Proposizione 0.12. *Let* $f : \mathbb{W} \to \mathbb{V}$*. Assume that* f *is* $\mathbb{H}^n$*-differentiable and* $Y \in \mathfrak{w} \cap \mathfrak{h}_1$*, then the directional derivative* $D_Y f(x)$ *exists and*

$$D_Y f(x) = df_x(\exp Y). \tag{17}$$

Supponiamo $\mathbb{H}^n = \mathbb{W} \cdot \mathbb{V}$ come nella Definizione 0.1, dove $\mathbb{V} = \{\exp(tV), t \in \mathbb{R}\}$, per qualche fissato $V \in \mathfrak{h}$. Necessariamente $V \in \mathfrak{h}_1$; senza perdere generalità, possiamo suppore $\|V\| = 1$ e poniamo $v := \exp(V)$.

Definizione 0.10. *Per ogni* $\nu \in \mathfrak{h}_1$*, poniamo*

$$\begin{aligned} &S^+_{\mathbb{H}}(\nu) := \exp\left(\{Z : \langle Z, \nu\rangle \geq 0\}\right), \quad S^-_{\mathbb{H}}(\nu) := \exp\left(\{Z : \langle Z, \nu\rangle \leq 0\}\right), \\ &T^g_{\mathbb{H}}(\nu) := \exp\big(\{Z : \langle Z, \nu\rangle = 0\}\big). \end{aligned}$$

Più in generale, se $p \in \mathbb{H}^n$ *e* $\nu \in H\mathbb{H}^p$*, allora poniamo*

$$S^+_{\mathbb{H}}(\nu) := S^+_{\mathbb{H}}(d\tau_{p^{-1}}\nu), \quad S^-_{\mathbb{H}}(\nu) := S^-_{\mathbb{H}}(d\tau_{p^{-1}}\nu), \quad T^g_{\mathbb{H}}(\nu) := T^g_{\mathbb{H}}(d\tau_{p^{-1}}\nu).$$

Ricordiamo inoltre che $\mathfrak{h}_1$ *e* $\mathfrak{h}_2$ *sono normali, e quindi* $\{Z \in \mathfrak{h} : \langle Z, \nu\rangle = 0\}$ *è un ideale omogeneo di* $\mathfrak{h}$*. In particolare,* $T^g_{\mathbb{H}}(\nu)$*è un sottogruppo normale omogeneo di* $\mathbb{H}^n$ *e* $\mathbb{H}^n = T^g_{\mathbb{H}}(\nu) \cdot N_\nu$*, dove* $N_\nu := \exp(\mathrm{span}\,(\nu))$*.*

Per [3], Theorem 6 (o [4], Theorem 3.1), per $|\partial E(f)|_{\mathbb{H}}$–q.o. $p \in \mathrm{graph}\,(f)$ esiste $\nu = \nu(p) \in \mathfrak{h}_1$ (la normale unitaria intrinseca interna a $E(f)$ in p) tale che

$$\|\nu(p)\| = 1; \tag{18}$$

e

$$\lim_{r\to 0} \mathbf{1}_{E(f)_{r,p}} = \mathbf{1}_{S^+_{\mathbb{H}}(\nu(p))} \qquad \text{in } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H}^n), \tag{19}$$

dove

$$E(f)_{r,p} = \{q : p\cdot\delta_r(q) \in E(f)\} = \delta_{\frac{1}{r}}(\tau_{p^{-1}}(E(f))).$$

Proposizione 0.13. *Sia $\mathcal{U} \subset \mathbb{W}$ un aperto (relativo), e sia $f : \mathcal{U} \to \mathbb{V}$ una mappa $\mathbb{H}^n$-Lipschitz. Se $p_0 = w_0 \cdot f(w_0) \in \mathrm{graph}\,(f)$, con $w_0 \in \mathcal{U}$, è tale che* (18) *e* (19) *vale, allora f è $\mathbb{H}^n$-differenziabile in w_0.*

In particolare, f è $\mathbb{H}^n$-differenziabile in ogni punto $w \in \mathcal{U}$ tale che $w \cdot f(w) \in \partial^* E(f)$.

Usando il teorema di slicing Theorem 3.7 di [7], per quanto precedentemente provato abbiamo:

Teorema 0.4 (Teorema di Rademacher)**.** *Supponiamo $\mathbb{H}^n = \mathbb{W}\cdot\mathbb{V}$ come nella Definizione 0.1, dove $\mathbb{V} = \{\exp(tV),\, t \in \mathbb{R}\}$, per qualche fissato $V \in \mathfrak{h}_1$ con $\|V\| = 1$. Sia ora $\mathcal{U} \subset \mathbb{W}$ un aperto relativo, e sia $f : \mathcal{U} \to \mathbb{V}$ una mappa $\mathbb{H}^n$-Lipschitz. Allora f è $\mathbb{H}^n$-differenziabile $(\mathcal{L}^{2n} \llcorner \mathbb{W})$–q.o. in $\mathcal{U}$.*

Riferimenti bibliografici

[1] A.Bonfiglioli, E.Lanconelli, F.Uguzzoni. *Stratified lie groups and potential theory for their sub-laplacians*, Springer, Berlin (2007).

[2] H.Federer, *Geometric Measure Theory*, Springer, (1969).

[3] B.Franchi, R.Serapioni & F.Serra Cassano, *Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group*, Math. Ann. **321**, (2001), 479–531.

[4] B.Franchi, R.Serapioni & F.Serra Cassano, *On the Structure of Finite Perimeter Sets in Step 2 Carnot Groups*, The Journal of Geometric Analysis. **13** (2003), no 3, 421–466.

[5] B.Franchi, R.Serapioni & F.Serra Cassano, *Regular submanifolds, graphs and area formula in Heisenberg Groups*, Adv. Math. **211** (2007), no. 1, 152–203.

[6] M.Gromov, *Carnot-Carathéodory spaces seen from within*, in *Subriemannian Geometry*, Progress in Mathematics, **144**. ed. by A.Bellaiche and J.Risler, Birkhauser Verlag, Basel, (1996).

[7] F.Montefalcone *Some relations among volume, intrinsic perimeter and one-dimensional restrictions of BV functions in Carnot groups*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **4** (2005), no. 1, 79–128.

[8] E.M.Stein, *Harmonic Analysis: Real variable methods, orthogonality and oscillatory integrals*, Princeton University Press, Princeton (1993).

[9] N.Th.Varopoulos & L.Saloff-Coste & T.Coulhon, *Analysis and Geometry on Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, (1992).