Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2005-06

Davide Guidetti

Esistenza e unicità globale per un problema inverso integrodifferenziale parabolico semilineare

8 giugno 2006

Davide Guidetti

ABSTRACT

We consider the problem of recovering a convolution kernel, together with the solution, in a semilinear integrodifferential mixed initial-boundary value problem of parabolic type. We present some results of local existence, global uniqueness and, under proper further assumptions, global existence.

In questo seminario presenterò alcuni risultati di esistenza e unicità globale per un problema integrodifferenziale inverso di tipo parabolico, che ho ottenuto recentemente in collaborazione con Fabrizio Colombo (Politecnico di Milano).

Il risultato in questione (vedi [2]) è relativo a un'equazione astratta. Per semplicità di trattazione, mi limiterò a considerare un caso particolare concreto.

Supponiamo allora di voler studiare un sistema della forma

$$
\begin{cases}
\partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x) + h * \Delta u(t,x) + f(u(t,x)) + G(t,x), \\
t \in (0,\tau), x \in \Omega, \\
u(0,x) = u_0(x), \ x \in \Omega, \\
D_\nu u(t,x) = 0, \quad t \in (0,\tau), \ x \in \partial\Omega,
\end{cases}
\tag{1}
$$

con Ω aperto limitato e regolare in $\mathbf{R}^n$, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ (preciseremo meglio nel seguito le ipotesi), D_ν derivata rispetto al versore normale esterno in $\partial\Omega$, $h : [0,T] \to \mathbf{R}$. $*$ indica la convoluzione in $\mathbf{R}^+$: se $v : [0,T] \times \Omega \to \mathbf{R}$ e $t \in [0,T]$, porremo

$$
(h * v)(t,.) := \int_0^t h(t-s)v(s,.)ds. \tag{2}
$$

Adotteremo la solita convenzione di identificare spazi di funzioni della variabile t ($\in \mathbf{R}$) a valori in spazi di funzioni nella variabile x con corrispondenti spazi di funzioni nelle variabili (t,x).

Sotto condizioni ragionevoli sui dati u_0, G, h, il problema (1) ha un'unica soluzione "locale" su un certo insieme della forma $[0,\tau) \times \Omega$, con $0 < \tau \leq T$.

Ora, nei casi concreti, il nucleo di convoluzione h, tradizionalmente supposto noto, non è direttamente misurabile. È dunque più realistico pensare ad h come un'ulteriore incognita nel sistema (1). Naturalmente, per quanto detto, è necessario fornire qualche ulteriore dato per poter sperare che il sistema ammetta, al più , una soluzione. Si suppone allora di conoscere qualche aspetto della soluzione u che non derivi direttamente dai dati sul bordo e iniziale. Precisamente, si suppone di conoscere in ogni istante t il valore $\Phi[u(t)]$ di un certo funzionale Φ applicabile alla soluzione u. Dunque, il sistema (1) viene integrato con l'ulteriore informazione

$$
\Phi[u(t)] = g(t), t \in (0,\tau). \tag{3}
$$

Considereremo perciò un sistema della forma (1)-(3).

Osserviamo adesso che la prima equazione in (1) è di Volterra di prima specie nell'incognita h. Ora, una delle "strategie" per affrontare questo tipo di problema, consiste nel derivare l'equazione rispetto a t, allo scopo di trasformarla in un'equazione di Volterra di seconda specie nella stessa incognita. Perché ciò sia possibile, bisogna supporre la soluzione u sufficientemente regolare e, naturalmente, le ipotesi andranno calibrate in maniera tale da consentire l'esistenza di una soluzione della regolarità necessaria.

Il problema (1)-(3), nel caso lineare, è stato studiato per la prima volta in [4]. Nel caso semilineare e anche quasi lineare, risultati di esistenza locale e unicità globale sono stati ottenuti, per esempio, in [3] e [1].

Tutti questi lavori considerano solo soluzioni locali. Un risultato di esistenza di una soluzione globale è stato dimostrato, nel caso lineare, per la prima volta in [5]. Può sembrare strano il porsi il problema dell'esistenza di una soluzione globale nel caso lineare. Si consideri però il fatto che il sistema (1)-(3), se si considera anche h come incognita, non è mai lineare, in quanto nella convoluzione $h * \Delta u$ entrambi i fattori sono incogniti.

Introduciamo ora le ipotesi precise con cui lavoreremo:

(h1) Ω è un aperto regolare e limitato in $\mathbf{R}^n$;

(h2) $p \in (1, +\infty)$, $n \in \mathbf{N}$, with $n < p$, $p \neq 3$;

(h3) $u_0 \in W_B^{2,p}(\Omega) := \{u \in W^{2,p}(\Omega) : D_\nu u \equiv 0\}$;

(h4) $\Phi(v) = \int_\Omega \phi(x)v(x)dx$, con $\phi \in L^{p'}(\Omega)$;

(h5) $f \in C^1(\mathbf{R})$ e f' è lipschitziana sui limitati di $\mathbf{R}$;

(h6) $v_0 := \Delta u_0 + f(u_0) + G(0) \in B_{p,p,B}^{2(1-1/p)}(\Omega)$, con

$$B_{p,p,B}^{2(1-1/p)}(\Omega) = \begin{cases} B_{p,p}^{2(1-1/p)}(\Omega) & \text{se } p < 3, \\ \{v \in B_{p,p}^{2(1-1/p)}(\Omega) : D_\nu v \equiv 0\} & \text{se } p > 3; \end{cases}$$

(h7) $g \in W^{2,p}(0,T)$ con $\Phi(u_0) = g(0)$ e $\Phi(v_0) = g'(0)$;

(h8) $\Phi(\Delta u_0) := \int_\Omega \phi(x)\Delta u_0(x)dx \neq 0$;

(h9) $G \in W^{1,p}(0,T; L^p(\Omega))$;

A queste aggiungiamo a parte

(h10) f' è globalmente limitata.

I principali risultati sono i seguenti:

Teorema 1 *(di esistenza locale) Consideriamo il problema (1)-(3) con le ipotesi (h1)-(h9). Allora esiste $\tau \in (0,T]$ su cui è definita una soluzione (u,h) con le seguenti proprietà:*

$$u \in W^{2,p}(0,\tau;L^p(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,\tau;W^{2,p}(\Omega)); \tag{4}$$

$$h \in L^p(0,\tau). \tag{5}$$

Teorema 2 *(di unicità globale) Consideriamo il problema (1)-(3) con le ipotesi (h1)-(h9). Allora, se $\tau \in (0,T]$ e, per ciascun $j \in \{1,2\}$, (u_j,h_j) è una soluzione tale che $u_1,u_2 \in W^{2,p}(0,\tau;L^p(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,\tau;W^{2,p}(\Omega))$, $h_1,h_2 \in L^p(0,\tau)$, allora $u_1 \equiv u_2$ e $h_1 \equiv h_2$.*

Teorema 3 *(di esistenza globale) Consideriamo il problema (1)-(3) con le ipotesi (h1)-(h10). Allora esiste una e una sola soluzione (u,h) tale che*

$$u \in W^{2,p}(0,T;L^p(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,T;W^{2,p}(\Omega)); \tag{6}$$

$$h \in L^p(0,T). \tag{7}$$

Vorrei, innanzi tutto, illustrare brevemente alcune delle ipotesi (h1)-(h10).

(h2) Vogliamo che l'applicazione $u \to f \circ u$ sia di classe almeno C^1 da $W^{1,p}(\Omega)$ a $L^p(\Omega)$. Il differenziale di Frechèt dovrebbe essere l'applicazione $v \to f'(u)v$. Poiché non non abbiamo posto condizioni di crescita sulla f (a parte (h10), che però viene utilizzata esclusivamente per il teorema 3), dovremo metterci nel caso in cui $f'(u)$ sia limitata per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Ciò avviene proprio per $p > n$, in virtù del teorema di immersione di Sobolev.

(h6) Il principale risultato sulle equazioni paraboliche lineari (eventualmente integrodifferenziali) che utilizziamo è il seguente:

Teorema 4 *Supponiamo che sia soddisfatta l'ipotesi (h1). Sia inoltre $\hat{h} \in L^1(0,T)$. Consideriamo il problema*

$$(8)\qquad \begin{cases} \partial_t v(t,x) = \Delta v(t,x) + \int_0^t \hat{h}(t-s)\Delta v(s,x)ds + F(t,x), \\ t \in (0,T), x \in \Omega, \\ u(0,x) = v_0(x), \ x \in \Omega, \\ D_\nu u(t,x) = 0, \quad t \in (0,\tau), \ x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

Allora, se $p \in (1,+\infty)$ e $p \neq 3$, le seguenti condizioni sono necessarie e sufficienti affinché (8) ammetta una soluzione (unica) v nello spazio $W^{1,p}(0,T; L^p(\Omega)) \cap L^p(0,T;W^{2,p}(\Omega))$:
(a) $F \in L^p(0,T;L^p(\Omega))$;
(b) v_0 appartiene allo spazio di Besov $B^{2(1-1/p)}_{p,p}(\Omega)$ e, se $p > 3$ $D_\nu v_0 \equiv 0$.

La notazione $B^{2(1-1/p)}_{p,p}(\Omega)$ indica lo spazio di Besov con gli indici corrispondenti (vedi [6]). La condizione al contorno sul dato iniziale va applicata nel caso sia definita sullo spazio $B^{2(1-1/p)}_{p,p}(\Omega)$. Ciò avviene se

$$2(1-1/p) - 1 > 1/p,$$

che fornisce $p > 3$. Il caso limite $p = 3$ è escluso.

Nel problema che stiamo considerando, il teorema 4 va applicato a un "sottoproblema" che ha come soluzione la derivata $v = \partial_t u$. Dalla prima equazione in (1) si ricava subito

$$(9)\qquad v(0) = \partial_t u(0) = \Delta u_0 + f(u_0) + G(0).$$

Il teorema 4 e (9) giustificano allora l'ipotesi (h6).

L' ipotesi (h7) contiene naturali condizioni di compatibilità : da $\Phi[u(t)] \equiv g(t)$, esgue subito $\Phi[u'(t)] \equiv g'(t)$, da cui $g(0) = \Phi[u(0)] = \Phi[u_0]$ e $g'(0) = \Phi[u'(0)] = \Phi[v_0]$.

L'idea di base per dimostrare i teoremi 1-3 è di trasformare il sistema (1) in un sistema costituito (all'ingrosso) da un'equazione parabolica e da un'equazione di Volterra di seconda specie. Ciò può essere ottenuto derivando la prima equazione rispetto a t. Questo spiega anche perché si cerchi una soluzione (u,h) così regolare (ricordiamo che stiamo cercando $u \in W^{2,p}(0,\tau;L^p(\Omega)) \cap W^{1,p}(0,\tau;W^{2,p}(\Omega))$). Ponendo

$$(10)\qquad v := \partial_t u,$$

si ottiene

$$(11)\quad \begin{cases} \partial_t v(t,x) = \Delta v(t,x) + h(t)\Delta u_0(x) + h * \Delta v(t,x) + f'(u_0(x) \\ \qquad +1 * v(t,x))v(t,x) + \partial_t G(t,x), \\ \qquad t \in (0,\tau), x \in \Omega, \\ v(0,x) = v_0(x), x \in \Omega, \\ D_\nu v(t,x) = 0, t \in (0,\tau), x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

con $v_0 = \Delta u_0 + f(u_0) + G(0)$. Applichiamo adesso Φ alla prima equazione in 11. Usando il fatto che $\Phi \circ v \equiv g'$, e quindi $\Phi \circ v' \equiv g''$, si ottiene

$$(12)\quad \begin{aligned} g''(t) &= \Phi[\Delta v(t,.)] + h(t)\Phi(\Delta u_0) + h * \Phi(\Delta v)(t) \\ &+\Phi[f'(u_0 + 1 * v(t,.))v(t)] + \Phi[\partial_t G(t,.)] \end{aligned}$$

Sfruttando allora l'ipotesi (h8) e ponendo $\chi := \Phi(\Delta u_0)^{-1}$, otteniamo il sistema

$$(13)\quad \begin{cases} \partial_t v(t,x) = \Delta v(t,x) + h(t)\Delta u_0(x) + h * \Delta v(t,x) + f'(u_0(x) \\ \qquad +1 * v(t,x))v(t,x) + \partial_t G(t,x), \\ \qquad t \in (0,\tau), x \in \Omega, \\ v(0,x) = v_0(x), x \in \Omega, \\ D_\nu v(t,x) = 0, t \in (0,\tau), x \in \partial\Omega, \\ h(t) = \chi\{g''(t) - h * \Phi(\Delta v)(t) - \Phi[Av(t,.) \\ \qquad +f'(u_0 + 1 * v(t,.))v(t)] - \Phi[\partial_t G(t,.)]\}, \end{cases}$$

che è quello che viene effettivamente studiato.

Del sistema (13), si cercano soluzioni (v,h) con

$$(14)\quad v \in X(\tau,p) := W^{1,p}(0,\tau;L^p(\Omega)) \cap L^p(0,\tau;W^{2,p}(\Omega)), h \in L^p(0,\tau).$$

Vogliamo ora accennare alla dimostrazione del teorema 3, che rappresenta l'elemento di "novità " del lavoro [2]. Ricordiamo che alle ipotesi (h1)-(h9) si aggiunge l'ipotesi (h10) (f' limitata). La principale difficoltà consiste allora nel controllo della convoluzione $h * \Delta v$ con entrambi i fattori incogniti.

Cominciamo coi seguenti

Lemma 1 *Siano soddisfatte le ipotesi (h1)-(h9). Supponiamo che, per qualche $\tau \in (0,T)$, il sistema (13) ammetta una soluzione (unica come conseguenza del teorema 2) $(v,h) \in X(\tau) \times L^p(0,\tau)$. Allora esiste $\delta \in (0, T-\tau]$, tale che (v,h) è prolungabile a una soluzione $(\tilde{v}, \tilde{h})$ appartenente a $X(\tau + \delta) \times L^p(0, \tau+\delta)$.*

Lemma 2 *Sia $v \in X(T)$, tale che esistono C_1 e C_2 in $\mathbf{R}^+$, per cui si ha*

$$\|v\|_{X(t,p)} \leq C_1 + C_2 \|v\|_{L^p(0,t;L^p(\Omega))} \qquad \forall t \in (0,T].$$

Allora

$$\|v\|_{X(t,p)} \leq C,$$

con $C \in \mathbf{R}^+$, dipendente solo da C_1, C_2, p, $\|v(0\|_{L^p(\Omega)}$, T.

Lemma 3 *Sia $T \in \mathbf{R}^+$. Allora $\forall \epsilon \in \mathbf{R}^+$ esiste $C(\epsilon, T) \in \mathbf{R}^+$, tale che, $\forall \tau \in (0,T]$, $\forall v \in X(\tau)$,*

$$\|\Phi[\Delta v]\|_{L^p(0,\tau)} \leq \epsilon \|v\|_{X(\tau)} + C(\epsilon, T) \|v\|_{L^p(0,\tau;L^p(\Omega))}.$$

L'osservazione fondamentale, per dimostrare il teorema 3, è la seguente: la convoluzione è un operatore bilineare, ma, appena ci si stacca un po' da 0, in un certo senso diventa lineare. Infatti, supponiamo che h e v siano funzioni di dominio $[0, 2\tau]$ ($\tau \in \mathbf{R}^+$), siano note in $[0,\tau]$ e incognite in $(\tau, 2\tau]$. Precisamente, valgano

$$h(t) = \hat{h}(t), v(t) = \hat{v}(t), \qquad t \in [0,\tau].$$

Sia $t \in [\tau, 2\tau]$. Poniamo, per $t \in [0,\tau]$,

$$h_\tau(t) := h(\tau + t), \qquad v_\tau(t) := v(\tau + t).$$

Allora, se $t \in [\tau, 2\tau]$, si verifica facilmente la formula

$$(h * v)(t) = \int_0^t \hat{h}(t-s) v_\tau(s) ds + \int_0^t h_\tau(t-s) \hat{v}(s) ds + \int_t^\tau \hat{h}(t+\tau-s)\hat{v}(s) ds.$$

Dunque, in $[\tau, 2\tau]$, $h * v$ è "affine" nelle incognite h_τ e v_τ.

Siamo ora in grado di provare il seguente

Lemma 4 *Siano soddisfatte le ipotesi (h1)-(h10). Sia poi* $(\hat{v}, \hat{h}) \in X(\tau, p) \times L^p(0, \tau)$ *una soluzione di (3) in* $[0, \tau]$, *con* $0 < \tau < T$. *Allora esiste* $C > 0$, *tale che,* $\forall \delta \in (0, \tau \wedge (T - \tau)]$, *se* $(v, h) \in X(\tau + \delta) \times L^p(0, \tau + \delta)$ *è una soluzione di (13) in* $[0, \tau + \delta]$, *vale*

$$\|v_\tau\|_{X(\delta)} + \|h_\tau\|_{L^p(0,\delta)} \leq C,$$

con

$$\hat{v}(t) := v(\tau + t), \quad \hat{h}(t) := h(\tau + t), \quad t \in [0, \delta]. \tag{15}$$

Dimostrazione Per il teorema 2,

$$v_\tau = v_{[0,\tau]}, \qquad h_\tau = h_{[0,\tau]}.$$

Si verifica facilmente che (v_τ, h_τ) soddisfa il sistema

$$\begin{cases} \partial_t v_\tau(t,x) & = \Delta v_\tau(t,x) + (\hat{h} * \Delta v_\tau)(t,x) + h_\tau(t)\Delta u_0(x) \\ & +(h_\tau * \Delta \hat{v})(t,x)(t,x) + f'(u(\tau,.) + 1 * v_\tau)(t,x)) \\ & v_\tau(t,x) + \tilde{f}(t,x), \\ t \in (0,\delta), x \in \Omega, & \\ v_\tau(0,x) = \hat{v}(\tau,x), & x \in \Omega, \\ D_\nu v_\tau(t,x) = 0, & t \in (0,\delta), x \in \partial\Omega, \\ h_\tau(t) & = \chi\{g''_\tau(t) - \Phi[A v_\tau(t) + h_\tau * \Delta\hat{v}(t) + \hat{h} * \Delta v_\tau(t) \\ & +f'(u(\tau) + 1 * v_\tau(t,.))v_\tau(t) + \tilde{f}(t)]\}, \end{cases} \tag{16}$$

con

$$u(\tau) := u_0 + \int_0^\tau \hat{v}(s)ds,$$

$$\tilde{f}(t) := \partial_t G(t+\tau) + \int_t^\tau \hat{h}(\tau + t - s)\Delta\hat{v}(s)ds,$$

$$g_\tau(t) := g(\tau + t).$$

Nel seguito, indicheremo con C una costante positiva, dipendente solo dai dati del problema, $\hat{v}$ e $\hat{h}$ e, in particolare, indipendente da $\delta \in (0, \tau \wedge (T - \tau))$.

Applicando il teorema 4 e l'ipotesi (h10), otteniamo, per $t \in (0, \delta]$,

$$\|v_\tau\|_{X(t)} \leq C(\|v_\tau\|_{L^p(0,t;L^p(\Omega))} + \|h_\tau\|_{L^p(0,t)} + 1). \tag{17}$$

Dal lemma 3, segue, $\forall \epsilon \in \mathbf{R}^+$,

$$\|h_\tau\|_{L^p(0,t)} \leq \epsilon\|v_\tau\|_{X(t)} + C(\epsilon)\|v_\tau\|_{L^p(0,t;L^p(\Omega))} + C. \tag{18}$$

Sostituendo (18) in (17), si ottiene

$$\|v_\tau\|_{X(t)} \le \epsilon \|v_\tau\|_{X(t)} + C(\epsilon)\|v_\tau\|_{L^p(0,t;L^p(\Omega))} + C. \tag{19}$$

Scegliendo allora $\epsilon = 1/2$ e utilizzando il lemma 2, otteniamo

$$\|v_\tau\|_{X(\delta)} \le C \tag{20}$$

e, da (18),

$$\|h_\tau\|_{L^p(0,\delta)} \le C. \tag{21}$$

□

Dimostrazione del teorema 3 Si tratta di provare che il sistema (13) ha una soluzione (necessariamente unica) di dominio $[0,T]$.

Poniamo

$$T_1 := \sup\{\tau \in (0,T] : (13) \text{ ha una soluzione } (v_\tau, h_\tau) \in X(\tau) \times L^p(0,\tau)\}. \tag{22}$$

Poniamo

$$v(t) := v_\tau(t), \quad h(t) := h_\tau(t) \text{ se } t \in [0,\tau]. \tag{23}$$

Per il teorema di unicità 2, la definizione è ben posta. Inoltre,

$$v \in \bigcap_{0<\tau<T_1} X(\tau), \quad h \in \bigcap_{0<\tau<T_1} L^p(0,\tau).$$

Verifichiamo che $T_1 = T$, $v \in X(T)$ e $h \in L^p(0,T)$. Supponiamo, per assurdo, $T_1 < T$. Fissiamo $\tau \in [T_1/2, T_1)$. Allora, in base al lemma 4, esiste $C > 0$ tale che, $\forall \delta \in (0, T_1 - \tau)$, si ha

$$\|v\|_{X(\tau+\delta)} + \|h\|_{L^p(0,\tau+\delta)} \le C \tag{24}$$

Facendo tendere δ a $T_1 - \tau$, da (24) segue $v \in X(T_1)$, $h \in L^p(0,T_1)$. L'ipotesi $T_1 < T$ e il lemma 1 implicano allora l'esistenza di una soluzione prolungamento di (v,h) su un intervallo che contiene propriamente $[0,T_1]$, in contraddizione con la definizione di T_1.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] F. Colombo, D. Guidetti, *A unified approach to nonlinear integro-differential inverse problems of parabolic type*, Zeitiscrift für Analysis und ihre Anwendungen, **21** (2002), 431-464.

[2] F. Colombo, D. Guidetti, *A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev Spaces*, di prossima pubblicazione in "Mathematical Models and Methods in Applied Sciences".

[3] M. Grasselli, A. Lorenzi, *An inverse problem for an abstract nonlinear parabolic integrodifferential equation*, Diff. Int. Equ. **6** (1993), 63-81.

[4] A. Lorenzi, E. Sinestrari, *An inverse problem in the theory of materials with memory*, Nonlin. Anal: Theory, Methods and Appl. **12** (1988), 1317-1335.

[5] A. Lorenzi, E. Sinestrari,*Stability results for a partial integrodifferential inverse problem", in "Volterra integrodifferential equations in Banach spaces and applications*, ed. G. Da Prato, M. Iannelli, Pitman Research Notes in Math. vol. 190 (1989), 271-294.

[6] H. Triebel, Theory of function spaces, Monographs in Mathematics, Birkhäuser (1983).