SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico 2006-07

Davide Guidetti

UN PROBLEMA INVERSO PER UN'EQUAZIONE DELLE ONDE FORTEMENTE SMORZATA

22 marzo 2007

Abstract

We study an abstract inverse problem of reconstruction of the solution of an integrodifferential initial-boundary value problem, together with the convolution kernel. The supplementary information is different from usual. The abstract result is applied to a semilinear strongly damped wave equation, with a memory term. In this concrete case, we assume that a certain flux of the solution through a certain part of the boundary is given.

In questo seminario presenterò alcuni risultati ottenuti in collaborazione con F. Colombo (Politecnico di Milano).

Consideriamo lo spostamento longitudinale di un corpo unidimensionale omogeneo, per esempio una sbarra con sezione di spessore costante. Identifichiamo il corpo con l'intervallo Ω in $\mathbb{R}$. Ω costituirà la configurazione di riferimento. Seguiamo l'evoluzione temporale della particella con posizione di riferimento $x \in \Omega$ e ne indichiamo con $u(t,x)$ il relativo spostamento all'istante t (in altre parole, all'istante t la particella si trova nel punto $x + u(t,x)$). Lo "sforzo" (strain) ϵ è definito come

$$\epsilon(t,x) := \frac{\partial u}{\partial x}(t,x).$$

Supponiamo che la densità del materiale sia uniformemente unitaria. Allora l'equazione di bilancio delle forze diventa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(t,x) + f(t,x), \tag{1}$$

ove σ è il cosi̇̀ detto "stress" e f è la forza esterna per unità di volume applicata. Lo stess rappresenta, grosso modo, la forza di contatto per unità di area, vale a dire, la forza che agisce fra i due lati di un'immaginaria sezione trasversale del corpo.

Lo stress è legato allo sforzo da una relazione che dipende dal materiale. Nel caso viscoelastico, si considera spesso σ della forma

$$\sigma(t,x) = \phi(\epsilon(t,x)) + \eta \frac{\partial \epsilon}{\partial t}(t,x). \tag{2}$$

Prendiamo

$$\phi(\epsilon) := \alpha\epsilon \quad (\alpha \in \mathbb{R}^+).$$

Sostituendo (2) in (1), si ottiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(t,x) + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + f(t,x). \tag{3}$$

Ma per alcuni materiali, detti "con memoria" (per esempio, i polimeri) il modello matematico che abbiamo delineato non è soddisfacente, perché lo stress dipende anche dalla storia passata dello sforzo. In questo caso, un modello più realistico potrebbe essere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(t,x) + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \int_0^t h(t-s) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,x) ds + f(t,x), \tag{4}$$

e, più in generale, supponendo che la forza esterna possa dipendere anche da u,

$$(5)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) = \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(t,x) + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + \int_0^t h(t-s) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s,x) ds + f(t, u(t,x), \frac{\partial u}{\partial x}(t,x)).$$

La discussione precedente si ispira all'introduzione di [7]. Noi considereremo un caso pluridimensionale, ma supporremo che la deformazione sia sostanzialmente unidimensionale. Precisamente,considereremo la seguente variante di (5):

$$(6)\quad \begin{aligned} D_t^2 u(t,x) &= \Delta_x D_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) + \textstyle\int_0^t h(t-s) \Delta_x u(s,x) ds \\ &+ \phi(u(t,x), \nabla_x u(t,x)) + \Gamma(t,x), \quad (t,x) \in (0,\tau) \times \Omega. \end{aligned}$$

con Ω aperto regolare in $\mathbb{R}^n$. Naturalmente, (6) dovrà essere integrata con opportune condizioni iniziali e al contorno.

Tuttavia, in molti casi concreti, è virtualmente impossibile misurare il nucleo di convoluzione h, per cui sembra più realistico prendere h come ulteriore incognita del problema, assieme a u. Se anche h è incognita, i dati tradizionali del problema non sono più sufficienti per determinare u e h. Nel caso specifico che stiamo considerando, si suppone di conoscere il flusso

$$(7)\quad \textstyle\int_S (D_t D_\nu u(t,x') + D_\nu u(t,x') + h * D_\nu u(t,x')) \sigma(dx')$$

attraverso un'opportuna parte S della frontiera del dominio Ω.

Riassumendo, considereremo il seguente problema:

$$(8)\quad \begin{cases} D_t^2 u(t,x) = \Delta_x D_t u(t,x) + \Delta_x u(t,x) + \int_0^t h(t-s) \Delta_x u(s,x) ds + \phi(u(t,x), \\ \qquad \nabla_x u(t,x)) + \Gamma(t,x), \quad (t,x) \in (0,\tau) \times \Omega, \\ D_\nu u(t,x') + b(x') u(t,x') = 0, \quad t \in (0,\tau), x' \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ D_t u(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

nelle incognite u e h, con l'ulteriore informazione

$$\int_S (D_t D_\nu u(t,x') + D_\nu u(t,x') + h * D_\nu u(t,x'))\sigma(dx') = g(t), \quad t \in (0,\tau). \tag{9}$$

Il problema di determinare u e h sotto le condizioni descritte ci è stato posto da M. Grasselli (Politecnico di Milano) e sarà risolto come caso particolare di un problema più generale, di tipo astratto, che andiamo a illustrare.

Consideriamo il seguente problema:

$$\begin{cases} U'(t) = AU(t) + h * BU(t) + f(U(t)) + G(t), & t \in (0,\tau) \\ U(0) = U_0, & \\ \Phi_0(U(t)) + \Phi_1(h * U(t)) = g(t), & t \in (0,\tau), \end{cases} \tag{10}$$

nelle incognite U e h. Introduciamo le ipotesi seguenti:

(H1) *$D(A)$, X e Y sono spazi di Banach, $D(A) \hookrightarrow Y \hookrightarrow X$, $D(A)$ è denso in X ed esistono $C > 0$ e $\theta \in [0,1)$ tali che, $\forall u \in D(A)$,*

$$\|u\|_Y \le C\|u\|_X^{1-\theta}\|u\|_{D(A)}^{\theta},$$

$A \in \mathcal{L}(D(A), X)$.

In generale, se $x \in X$, scriveremo $\|x\|$ invece di $\|x\|_X$.

(H2) *$\forall T \in \mathbb{R}^+$, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} U'(t) = AU(t) + f(t), & t \in (0,T), \\ U(0) = 0 & \end{cases} \tag{11}$$

è ben posto in $L^p(0,T;X)$ $(1 < p < \infty)$, nel senso seguente: che, $\forall f \in L^p(0,T;X)$, (11) ha un'unica soluzione U appartenente a $W^{1,p}(0,T;X) \cap L^p(0,T;D(A))$.

(H3) *$B \in \mathcal{L}(D(A), X)$.*

(H4) *$U_0 \in D(A)$.*

(H5) *Poiché $D(A)$ è denso in X, possiamo identificare X' (lo spazio duale di X) con un sottospazio di $D(A)'$. Chiediamo che $\Phi_0, \Phi_1 \in D(A)'$ e Φ_0 appartenga alla chiusura di X' in $D(A)'$.*

(H6) *$f \in C^1(Y,X)$ e $f' : Y \to \mathcal{L}(Y,X)$ è lipschitziana sui sottoinsiemi limitati di Y.*

(H7) *$G \in W^{1,p}(0,T;X)$.*

(H8) $V_0 := AU_0 + f(U_0) + G(0) \in (X, D(A))_{1-1/p,p}$.

(H9) $\Phi_1(U_0) \neq 0$.

(H10) $g \in W^{1,p}(0,T)$ *con* $\Phi_0(U_0) = g(0)$.

Aggiungiamo, inoltre, la seguente condizione:

(H11) $f' : Y \to \mathcal{L}(Y, X)$ *è limitata (ricordiamo che* f' *è il differenziale di Fréchet di* f*).*

Riguardo alle ipotesi (H1)-(H11), è il caso di osservare quanto segue.

1) Il sottosistema delle prime due equazioni in (10) è (nel caso in cui h sia assegnata), un sistema integrodifferenziale semilineare di tipo parabolico astratto. Si potrebbe, infatti, dimostrare che l'ipotesi (H2) implica che A è (essenzialmente) il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico (vedi [3]).

2) Come già osservato, essendo h incognita, abbiamo bisogno di qualche osservazione supplementare, fornita dalla terza equazione. La "novità " sta nella struttura di questa terza equazione. Infatti, nell'impostazione data a questo tipo di problemi in [6], questa informazione supplementare è della forma

$$\Phi(U(t)) = g(t), \tag{12}$$

con Φ funzionale lineare e continuo definito sullo spazio base X. Questo punto di vista è stato imitato, ad esempio, in [1], [2], [4], [5]. Qui, invece, consideremo una il caso in cui l'ulteriore informazione fornita, per ricavare u e h, sia di tipo un po' diverso, e precisamente della forma

$$\Phi_0(U(t)) + \Phi_1(h * U(t)) = g(t), \tag{13}$$

con Φ_0 e Φ_1 non necessariamente definite in tutto X. L'ipotesi (H5) richiede solo che Φ_0 e Φ_1 siano definite in $D(A)$ e che Φ_0 appartenga alla chiusura di X' in $D(A)'$. Si ricorda, in proposito, che, essendo $D(A)$ denso in X, ogni elemento di X' è univocamente determinato dalla sua restrizione a $D(A)$, che è un elemento di $D(A)'$. Questo genere di ipotesi identifica l'elemento di X' con la sua restrizione a $D(A)$.

Osserviamo, comunque, che la nuova ipotesi (13) non è più generale di (12), in quanto l'ipotesi (H9) implica che $\Phi_1 \neq 0$.

3) Nel caso in cui X sia riflessivo, si ha che X' è denso in $D(A)'$. In tal caso l'ipotesi fatta su X_0 è automaticamente siddisfatta:

Lemma 0.1. *Sia A un operatore chiuso nello spazio di Banach X, con $D(A)$ denso in X. Allora, se X è riflessivo, X' è denso in $D(A)'$.*

Dimostrazione Osserviamo, innanzi tutto che $D(A)$, con la norma del grafico è a sua volta riflessivo, in quanto isometrico a un sottospazio chiuso di $X \times X$. Supponiamo allora che il teorema sia falso. Per il teorema di Hahn-Banach, esiste ψ, funzionale lineare continuo su $D(A)'$, non identicamente nullo, tale che

$$\psi(x') = 0 \quad \forall x' \in X'.$$

Poiché $D(A)$ è riflessivo, esiste $x_0 \in D(A)$, tale che

$$\psi(y') = y'(x_0) \quad \forall y' \in D(A)'.$$

Dunque, $x'(x_0) = 0$, $\forall x' \in X'$. Poiché $x_0 \in X$, un altro corollario del teorema di Hahn-Banach fornisce $x_0 = 0$, in contraddizione col fatto che ψ non si annulla identicamente su $D(A)'$.

Enunciamo ora il principale risultato astratto:

Teorema 0.1. *Se sono soddisfatte le ipotesi $(H1) - (H10)$, il sistema (10) possiede una soluzione locale (U, h) tale che*

$$U \in W^{2,p}(0, \tau; X) \cap W^{1,p}(0, \tau; D(A)), h \in L^p(0, \tau),$$

per qualche $\tau \in (0, T]$.

Se $(U_j, h_j) \in [W^{2,p}(0, \tau; X) \cap W^{1,p}(0, \tau;\ D(A))] \times L^p(0, \tau)$, per qualche $\tau \in (0, T]$ e $j \in \{1, 2\}$, allora $U_1 = U_2$, $h_1 = h_2$.

Se vale la condizione $(H11)$, esiste un'unica soluzione "globale" $(U, h) \in [W^{2,p}(0, T; X) \cap W^{1,p}(0, T;\ D(A))] \times L^p(0, T)$.

Vediamo ora come si può applicare il teorema 0.1 al sistema (8)-(9). Formuliamo delle ipotesi precise:

(K1) Ω *è un sottoinsieme aperto e limitato di* $\mathbb{R}^n$*, posto (localmente) su un solo lato della sua frontiera* $\partial\Omega$*, che è una varietà di classe* C^2 *di* $\mathbb{R}^n$*;*

(K2) $\phi \in C^1(\mathbb{R}^{n+1})$ *e le sue derivate del primo ordine sono lipschitziane nei sottoinsiemi limitati di* $\mathbb{R}^{n+1}$*;*

(K3) $p \in \mathbb{R}$*,* $p > n$*,* $p \neq 3$*;*

(K4) $b \in C^1(\partial\Omega)$*,* $u_0, u_1 \in W_p(\Omega) := \{u \in W^{2,p}(\Omega) : D_\nu u(x') + b(x')u(x') = 0, x' \in \partial\Omega\}$*;*

(K5) $\Gamma \in W^{1,p}(0, T; L^p(\Omega))$*;*

(K6) $v_0 := \Delta_x u_1 + \Delta_x u_0 + \phi(u_0, \nabla_x u_0) + \Gamma(0) \in$

$$\begin{cases} W^{2(1-1/p),p}(\Omega) & \textit{se } p < 3, \\ \{v \in W^{2(1-1/p),p}(\Omega) : D_\nu v + bv = 0\} & \textit{se } p > 3; \end{cases}$$

(K7) $\int_S D_\nu u_0(x')\sigma(dx') \neq 0$*;*

(K8) $g \in W^{1,p}(0, T)$*,* $\int_S D_\nu(u_0 + u_1)(x')\sigma(dx') = g(0)$*.*

Aggiungiamo a $(K1) - (K7)$ l'ipotesi ausiliaria

(K9) $\nabla\phi$ *è limitato in* $\mathbb{R}^{n+1}$*.*

Questo problema può essere ridotto al sistema astratto (10), ponendo

$$v := D_t u, \tag{14}$$

e scrivendolo nella forma:

$$
(15) \qquad \begin{cases}
D_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + h * \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u + \phi(u, \nabla u) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma \end{pmatrix}, \\
(D_\nu u + bu)_{|(0,\tau)\times\partial\Omega} & = (D_\nu v + bv)_{|(0,\tau)\times\partial\Omega} = 0, \\
& \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix},
\end{cases}
$$

con la condizione supplementare

$$
(16) \qquad \int_S (D_\nu u + D_\nu v) d\sigma + h * \int_S D_\nu u d\sigma = g.
$$

Poniamo:

$$
(17) \qquad X := W_p(\Omega) \times L^p(\Omega)
$$

$$
(18) \qquad D(A) := W_p(\Omega) \times W_p(\Omega),
$$

$$
(19) \qquad A(u, v) = (v, \Delta v), \quad (u, v) \in D(A),
$$

$$
(20) \qquad Y := X,
$$

$$
(21) \qquad \begin{cases} f : X \to X, \\ f(u, v) := (0, \Delta u + \phi(u, \nabla u)), \end{cases}
$$

$$U_0 := (u_0, u_1), \tag{22}$$

$$\begin{cases} B : D(A) \to X, \\ B(u,v) := (0, \Delta u), \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} V_0 &:= AU_0 + f(U_0) + G(0) \\ &= (u_1, \Delta u_1 + \Delta u_0 + \phi(u_0, \nabla u_0) + \Gamma(0)). \end{aligned} \tag{24}$$

V_0 appartiene a $(X, D(A))_{1-1/p,p}$, perché

(25)
$$(X, D(A))_{1-1/p,p} = \begin{cases} W_p(\Omega) \times W^{2(1-1/p),p}(\Omega) & \text{se } p < 3, \\ W_p(\Omega) \times \{v \in W^{2(1-1/p),p}(\Omega) : (D_\nu v + bv)_{|\partial\Omega} = 0\} & \text{se } p > 3. \end{cases}$$

Infine, poniamo, per $(u,v) \in D(A)$,

$$\Phi_0(u,v) := \int_S D_\nu(u+v)(x')\sigma(dx'), \tag{26}$$

$$\Phi_1(u,v) := \int_S D_\nu u(x')\sigma(dx'). \tag{27}$$

Φ_0 appartiene alla chiusura di X' in $D(A)'$, perché X è riflessivo.

Di conseguenza, vale il seguente

Teorema 0.2. *Siano soddisfatte le ipotesi* $(K1) - (K8)$. *Allora*

(I) *esiste* $\tau \in (0, T]$, *tale che il problema (8)–(9) ammette una soluzione* (u, h), *con*

$$u \in W^{3,p}(0, \tau; L^p(\Omega)) \cap W^{2,p}(0, \tau; W^{2,p}(\Omega)), \quad h \in L^p(0, \tau).$$

(II) *Se, per qualche* $\tau \in (0, T]$, (u_1, h_1) *and* (u_2, h_2) *sono soluzioni di (8)–(9), con*

$$(u_1, h_1),\ (u_2, h_2) \in [W^{3,p}(0, \tau; L^p(\Omega)) \cap W^{2,p}(0, \tau; W^{2,p}(\Omega))] \times L^p(0, \tau),$$

allora $u_1 = u_2$, $h_1 = h_2$.

(III) *Valgano le condizioni* $(K1)-(K9)$. *Allora il problema (8)–(9) ha un'unica soluzione globale*

$$(u,h) \in [W^{3,p}(0,T;L^p(\Omega)) \cap W^{2,p}(0,T;W^{2,p}(\Omega))] \times L^p(0,T).$$

Concludo con alcune osservazioni riguardo alla dimostrazione:

(1) se si considera h come incognita, la prima (e anche la terza) equazione di (10) sono equazioni integrali di Volterra di prima specie, che costituiscono un problema severamente mal posto. L'idea di base della dimostrazione è derivare rispetto a t, in modo da ottenere un'equazione di Volterra di seconda specie nell'incognita h.

(2) Il problema è intrinsecamente non lineare anche nel caso in cui f è lineare, a causa del prodotto di convoluzione $h * U$ con entrambi i fattori incogniti.

(3) Per quanto riguarda il risultato di esistenza globale, la convoluzione $h * U$ si può stimare osservando che, dopo un intervallo di lunghezza positiva, in un certo senso "si linearizza": se

$$U(t) = \begin{cases} \hat{U}(t) & \text{if } 0 \leq t \leq \tau, \\ U_\tau(t-\tau) & \text{if } \tau \leq t \leq 2\tau, \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} \hat{h}(t) & \text{if } 0 \leq t \leq \tau, \\ h_\tau(t-\tau) & \text{if } \tau \leq t \leq 2\tau, \end{cases}$$

con $\hat{U}$ e $\hat{h}$ note in $[0,\tau]$, allora, per $t \in [0,\tau]$,

$$(h * U)(\tau + t) = h_\tau * \hat{U}(t) + \hat{h} * U_\tau(t) + \int_t^\tau \hat{h}(t+\tau-s)\hat{U}(s)ds.$$

(4) Non siamo riusciti, per ora, a trovare condizioni ragionevoli su f meno restrittive della "sublinearità ", che garantiscano l'esistenza globale di una soluzione.

Riferimenti bibliografici

[1] F. Colombo, D. Guidetti, *A unified approach to nonlinear integro-differential inverse problems of parabolic type*, Zeitscrift für Analysis und ihre Anwendungen, vol. 21 (2002), 431-464.

[2] F. Colombo, D. Guidetti, *A global in time existence and uniqueness result for a semilinear integrodifferential parabolic inverse problem in Sobolev Spaces*, di prossima pubblicazione in Mathematical Models and Methods in Applied Sciences.

[3] G. Dore, *Maximal regularity in L^p spaces for an abstract Cauchy problem*, Adv. Diff. Eq., **5** (2000), 293–322.

[4] M. Grasselli, A. Lorenzi, *An inverse problem for an abstract nonlinear parabolic integrodifferential equation*, Diff. Int. Equ. 6 (1993), 63-81.

[5] D. Guidetti, A. Lorenzi, *Hyperbolic-parabolic inverse problems*, di prossima pubblicazione in "Osaka Univ. Math. Journal".

[6] A. Lorenzi, E. Sinestrari, *An inverse problem in the theory of materials with memory*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 8, 1317-1335 (1988).

[7] M. Renardy, W. J. Hrusa, J. A. Nohel, Mathematical problems in viscoelasticity, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 35, Longman (1987).