SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico 2005-06

Andrea Bonfiglioli e Ermanno Lanconelli

FUNZIONI GAUGE, EQUAZIONE EIKONALE E TEOREMA DI BÔCHER SUI GRUPPI DI LIE STRATIFICATI

30 marzo 2006

Abstract

Let $\mathcal{L}=\sum_{i=1}^m X_i^2$ be a real sub-Laplacian on a Carnot group $\mathbb{G}$ and denote by $\nabla_{\mathcal{L}}=(X_1,\dots,X_m)$ the intrinsic gradient related to $\mathcal{L}$. Our aim in this present note is to analyze some features of the $\mathcal{L}$-gauge functions on $\mathbb{G}$, i.e., the homogeneous functions d such that $\mathcal{L}(d^\gamma)=0$ in $\mathbb{G}\setminus\{0\}$ (for some $\gamma\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$). We consider the relation of $\mathcal{L}$-gauge functions with: the $\mathcal{L}$-Eikonal equation $|\nabla_{\mathcal{L}}u|=1$ in $\mathbb{G}$; the Mean Value Formulas for the $\mathcal{L}$-harmonic functions; the fundamental solution for $\mathcal{L}$; the Bôcher-type theorems for nonnegative $\mathcal{L}$-harmonic functions in the "punctured open sets $\dot\Omega:=\Omega\setminus\{x_0\}$.

1. Presentazione dei risultati

Sia $\mathcal{L} = \sum_{i=1}^m X_i^2$ un sub-Laplaciano reale su un gruppo di Lie stratificato $\mathbb{G}$ e denotiamo con

$$\nabla_{\mathcal{L}} = (X_1, \dots, X_m)$$

il *gradiente intrinseco* relativo a $\mathcal{L}$. Ci proponiamo di analizzare alcune speciali proprietà delle funzioni $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$ in relazione con:

(i) l'equazione $\mathcal{L}$-eikonale

$$|\nabla_{\mathcal{L}} u| = 1 \quad \text{q.d. in } \mathbb{G};$$

(ii) la formula di media per le funzioni $\mathcal{L}$-armoniche;

(iii) la soluzione fondamentale per $\mathcal{L}$;

(iv) i teoremi di tipo Bôcher per le funzioni $\mathcal{L}$-armoniche non negative negli aperti puntati $\dot{\Omega} := \Omega \setminus \{x_0\}$, dove $x_0 \in \Omega \subseteq \mathbb{G}$ è fissato.

Per precisare il contenuto di questa nota, fissiamo anzitutto alcune notazioni.

Un gruppo di Lie *stratificato* (o *gruppo* di *Carnot*) è un gruppo di Lie conesso e semplicemente connesso la cui algebra di Lie $\mathfrak{g}$ ammette una stratificazione, i.e. una scomposizione in somma diretta $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_r$ con

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1} \text{ (for } i \leq r-1), \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_r] = \{0\}. \tag{1.1}$$

Il numero intero positivo r è il passo di nilpotenza di $\mathfrak{g}$ ed è chiamato il *passo di* $\mathbb{G}$. Il numero intero positivo $Q = \sum_{i=1}^r i \dim(\mathfrak{g}_i)$ è chiamato la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$. *Assumeremo sempre* $Q \geq 3$ (se $Q = 2$ allora $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^2, +)$). A meno di isomorfismi l'unico gruppo di Carnot di *passo* $r = 1$ è il gruppo Euclideo $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, +)$.

Sia $X_1, \dots, X_m$ una base di $\mathfrak{g}_1$. L'operatore

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^m X_i^2$$

è chiamato un *sub-Laplaciano su* $\mathbb{G}$. Con la naturale identificazione di $\mathbb{G}$ con la sua algebra di Lie, attraverso la mappa esponenziale, non è restrittivo supporre, come faremo sempre d'ora in avanti, che $\mathbb{G} = \mathbb{R}^N$ sia munito di una famiglia di automorfismi di gruppo (chiamate *dilatazioni*) $\{\delta_\lambda\}_{\lambda>0}$, della forma

$$\delta_\lambda(x_1, \dots, x_N) = (\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_N} x_N), \tag{1.2}$$

dove gli esponenti α_i sono interi consecutivi tali che $1 = \alpha_1 \le \cdots \le \alpha_N = r$. Di conseguenza, l'elemento neutro di $\mathbb{G}$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^N$. Raggruppando le x_i relative agli stessi esponenti α_i nella notazione $x^{(i)}$, scriveremo anche

$$x = (x^{(1)}, \dots, x^{(r)}). \tag{1.3}$$

La condizione di stratificazione (1.1) assicura che l'algebra di Lie generata da $X_1, \dots, X_m$ coincide con $\mathfrak{g}$ ed è perciò di rango N in ogni punto. Di conseguenza, per il teorema di Hörmander [7], $\mathcal{L}$ è ipoellittico e quindi ogni soluzione distribuzionale di $\mathcal{L}u = f$ in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ è di classe C^∞ se f è di classe C^∞.

Chiameremo $\mathcal{L}$-*armonica* in Ω ogni funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $\mathcal{L}u = 0$. Denoteremo con $\mathcal{H}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni $\mathcal{L}$-armoniche in Ω.

Chiameremo *norma omogenea* su $\mathbb{G}$ una qualunque funzione continua

$$d : \mathbb{G} \to [0, \infty)$$

tale che

$$d(\delta_\lambda(x)) = \lambda\, d(x) > 0,$$

per ogni $x \in \dot{\mathbb{G}}$ e $\lambda > 0$. Qui, e nel seguito, denotiamo $\dot{\mathbb{G}} := \mathbb{G} \setminus \{0\}$. Se $*$ è la legge di composizione in $\mathbb{G}$, indichiamo con $B_d(x, r)$ la d-palla di centro x e raggio r, i.e. l'insieme

$$B_d(x, r) = \{y \in \mathbb{G} \mid d(x^{-1} * y) < r\}.$$

Sia d una norma omogenea su $\mathbb{G}$, di classe C^∞ in $\dot{\mathbb{G}}$. Se esiste una costante reale $\gamma \neq 0$ tale che

$$d^\gamma \text{ è } \mathcal{L}\text{-armonica in } \dot{\mathbb{G}}, \tag{1.4}$$

diremo che d è una $\mathcal{L}$-*gauge*. Un risultato di Folland assicura che su ogni gruppo di Carnot, e per ogni sub-Laplaciano $\mathcal{L}$, una $\mathcal{L}$-gauge esiste (si vedano [5, Theorem 2.1] e

[6]; si veda anche [4, Theorem 2.2]).

Uno dei nostri principali risultati è il teorema seguente.

Teorema 1.1. *Se esiste una $\mathcal{L}$-gauge d verificante l'equazione eikonale*

$$|\nabla_{\mathcal{L}} d| = 1 \quad \textit{in} \;\; \dot{\mathbb{G}}$$

allora $\mathbb{G}$ ha passo uno, i.e. $\mathbb{G}$ è il gruppo Euclideo.

Una notevole norma omogenea su un gruppo di Carnot $\mathbb{G}$ è data da

$$d_C(x) := d_X(x, 0), \quad x \in \mathbb{G}, \tag{1.5}$$

dove d_X denota la distanza di Carnot-Carathéodory relativa alla famiglia di di campi vettoriali $X = \{X_1, \ldots, X_m\}$. La norma d_C in (1.5) sarà chiamata la norma $\mathcal{L}_C$ in $\mathbb{G}$.

In uno studio sulle misure di superficie negli spazi Carnot-Carathéodory, Monti e Serra-Cassano hanno dimostrato che la norma d_C soddisfa la $\mathcal{L}$-equazione eikonale , i.e.,

$$|\nabla_{\mathcal{L}} d_C| = 1 \quad \text{quasi dappertutto in } \mathbb{G}$$

(si veda [8, Theorem 3.1]). Questo risultato, insieme col nostro Teorema 1.1, dà il seguente corollario.

Corollario 1.2. *Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Carnot diverso dal gruppo Euclideo e sia $\mathcal{L}$ un sub-Laplaciano su $\mathbb{G}$. Allora la norma $\mathcal{L}_C$ (1.5)* non è *una $\mathcal{L}$-gauge. Più esplicitamente: per ogni $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,*

$$d_C^{\gamma} \text{ non è } \mathcal{L}\textit{-armonica in } \dot{\mathbb{G}}.$$

Quando d è una $\mathcal{L}$-gauge , il nucleo

$$K := |\nabla_{\mathcal{L}} d|^2 \tag{1.6}$$

compare in alcune notevoli formule di media, che estendono ai gruppi di Carnot il Teorema di Gauss per le funzioni armoniche classiche. Per precisare questo punto, fissiamo alcune altre notazioni.

Definiamo

$$\mathcal{K} := \frac{K}{|\nabla d|} = \frac{|\nabla_{\mathcal{L}} d|^2}{|\nabla d|}, \tag{1.7}$$

e poniamo

$$m_r(u) := \int_{\partial B_d(0,r)} u\, \mathcal{K}\, \mathrm{d}H^{N-1}, \tag{1.8}$$

dove ∇ e H^{N-1} denotano, rispettivamente, il gradiente standard e la misura di Hausdorff $(N-1)$-dimensionale.

Teorema 1.3. *Sia d una $\mathcal{L}$-gauge e sia γ il corrispondente esponente in* (1.4)*. Allora, se u è $\mathcal{L}$-armonica nel disco puntato $\dot{B} = B_d(0,1) \setminus \{0\}$, esistono due costanti reali a, b tali che*

$$r^{\gamma-1} m_r(u) = a\, r^{\gamma} + b \quad \textit{per ogni } r \in]0,1[. \tag{1.9}$$

Da questo teorema si deduce facilmente la seguente caratterizzazione delle funzioni $\mathcal{L}$-gauge in termini della soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ (si veda anche il Corollario 1.9-(ii), per una generalizzazione di questo risultato).

Corollario 1.4. *Sia d una $\mathcal{L}$-gauge e sia γ il corrispondente esponenente in* (1.4)*. Allora*

$$\gamma = 2 - Q$$

(dove Q è la dimensione omogenea di $\mathbb{G}$) e

$$\Gamma = \beta_d\, d^{2-Q} \tag{1.10}$$

è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$ con polo nell'origine. Qui

$$\beta_d^{-1} = Q(Q-2) \int_{B_d(0,1)} K. \tag{1.11}$$

Questo risultato implica, in particolare, l'*unicità* della funzione $\mathcal{L}$-gauge, a meno di costanti moltiplicative. Inoltre, poichè Γ in (1.10) è la soluzione fondamentale di $\mathcal{L}$, ponendo

$$M_r(u)(x) = \frac{Q(Q-2)\beta_d}{r^Q} \int_{B_d(x,r)} K(x^{-1} * y)\, u(y)\, \mathrm{d}y, \tag{1.12}$$

abbiamo l'estensione (precedentemente menzionata) ai sub-Laplaciani $\mathcal{L}$ del classico teorema di Gauss-Koebe.

Teorema 1.5. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un aperto e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

(i) $u \in C^\infty(\Omega)$ *e* $\mathcal{L}u = 0$ *in* Ω,

(ii) $u \in C(\Omega)$ *e* $u(x) = M_r(u)(x)$ *per ogni* $B_d(x, r) \Subset \Omega$.

Una dimostrazione di questo teorema è contenuta in [3]. Quando $\mathbb{G} = (\mathbb{R}^N, +)$ è il gruppo euclideo allora K in (1.6) è costante e

$$M_r(u)(x) = \fint_{|y-x|<r} u(y)\, \mathrm{d}y$$

è il consueto operatore di media di Gauss. Anche il viceversa è vero, come segue subito dal Teorema 1.1

Corollario 1.6. *Sia d una $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$ e sia K il nucleo nell'operatore di media M_r in* (1.12). *Se K ècostante, allora $\mathbb{G}$ ha passo uno, i.e, $\mathbb{G}$ è il gruppo Euclideo.*

Formule di media con nuclei costanti in $\mathbb{R}^N$ caratterizzano le soluzioni di operatori alle derivate parziali con coefficienti costanti e omogenei rispetto alle dilatazioni Euclidee $x \mapsto \lambda\, x$, si veda [9]. Il nostro precedente corollario dimostra che queste stesse formule *caratterizzano il gruppo Euclideo nella famiglia di tutti i gruppi di Carnot.*

Torniamo ora all'operatore m_r in (1.8) e definiamo l'operatore di media di superficie

$$\mathcal{M}_r(u) := \tfrac{(Q-2)\beta_d}{r^{Q-1}}\, m_r(u) = \tfrac{(Q-2)\beta_d}{r^{Q-1}} \int_{\partial B_d(0,r)} u\, \mathcal{K}\, \mathrm{d}H^{N-1}.$$

Si riconosce facilmente che $\mathcal{M}_r(1) = 1$ per ogni $r > 0$. Seguendo un procedimento introdotto da Axler, Bourdon and Ramey [1] in ambito classico, data una funzione regolare $u : \dot{B} \to \mathbb{R}$, definiamo

$$\mathcal{S}(u)(x) := \mathcal{M}_{d(x)}(u), \quad x \in \dot{B}. \tag{1.13}$$

Allora, se u è $\mathcal{L}$-armonica in $\dot{B}$, per il Teorema 1.3 e il Corollario 1.4 abbiamo

$$\mathcal{S}(u)(x) = a\, d^{2-Q}(x) + b, \quad x \in \dot{B},$$

per opportuni $a, b \in \mathbb{R}$. Quindi $\mathcal{S}(u)$ è $\mathcal{L}$-armonica in $\dot{B}$ e "radialmente" simmetrica, i.e.,

$$\mathcal{S}(u)(x) = \mathcal{S}(u)(y) \quad \text{se } d(x) = d(y).$$

Inoltre, poichè $\mathcal{M}_r(1) = 1$ e d è costante su $\partial B_d(0,1)$, abbiamo

$$\mathcal{S}(\mathcal{S}(u)) = \mathcal{S}(a\, d^{2-Q} + b) = a\, d^{2-Q} + b = \mathcal{S}(u). \tag{1.14}$$

L'operatore $\mathcal{S}$ può essere usato per provare il seguente risultato di simmetria radiale per funzioni $\mathcal{L}$-armoniche e non negative su un disco puntato, nulle sul bordo.

Teorema 1.7. *Sia d una $\mathcal{L}$-gauge e sia w una funzione $\mathcal{L}$-armonica e non negativa in $\dot{B}$. Supponiamo w continua sino al bordo di B e $w(x) = 0$ per ogni $x \in \partial B$. Allora w è d-radialmente simmetrica. Precisamente, $w(x) = \mathcal{S}(w)(x)$ per ogni $x \in \dot{B}$, e quindi, per una opportuna costante $a \geq 0$,*

$$w(x) = a\big(d^{2-Q}(x) - 1\big) \quad \textit{per ogni } x \in \dot{B}.$$

Questo Teorema, unitamente alla invarianza di $\mathcal{L}$ rispetto alle traslazioni a sinistra, implica il seguente Teorema di tipo Bôcher.

Teorema 1.8 (Teorema di Bôcher per i sub-Laplaciani)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ un insieme aperto e sia $x_0 \in \Omega$. Sia d una $\mathcal{L}$-gauge su $\mathbb{G}$. Supponiamo $u : \Omega \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}$-armonica e non negativa. Allora esiste una costante non negativa c e una funzione v, $\mathcal{L}$-armonica in Ω, tali che*

$$u(x) = c\, d^{2-Q}(x_0^{-1} * x) + v(x) \quad \textit{per ogni } x \in \Omega \setminus \{x_0\}. \tag{1.15}$$

Combinando questo risultato con un teorema di tipo Liouville per $\mathcal{L}$, dimostrato in [2], si ottiene il seguente corollario.

Corollario 1.9. *Sia d una $\mathcal{L}$-gauge in $\mathbb{G}$. Allora*

(i) *se $u : \dot{\mathbb{G}} \to \mathbb{R}$ è una funzione $\mathcal{L}$-armonica e non negativa. esistono due costanti non negative c, b tali che $u = c\, d^{2-Q} + b$ in $\dot{\mathbb{G}}$;*

(ii) *se* $\widetilde{d}$ *è una qualunque norma omogenea in* $\mathbb{G}$*, regolare in* $\dot{\mathbb{G}}$*, e se esiste una funzione regolare* $\alpha : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *tale che* $\alpha \circ \widetilde{d}$ *è* $\mathcal{L}$*-armonica in* $\dot{\mathbb{G}}$*, allora* $\widetilde{d}$ *è una* $\mathcal{L}$*-gauge (quindi un multiplo scalare di* d*) e* $\alpha(t) = \widetilde{c}\, t^{2-Q} + \widetilde{b}$*, per opportune costanti* $\widetilde{c}, \widetilde{b} \geq 0$.

Riferimenti bibliografici

1. S. Axler, P. Bourdon and W. Ramey, *Bôcher's Theorem*, American Math. Monthly, 99 (1992) 51–55.
2. A. Bonfiglioli and E. Lanconelli, Liouville-type theorems for real sub-Laplacians, *Manuscripta Math.* 105 (2001) 111–124.
3. A. Bonfiglioli and E. Lanconelli, Subharmonic functions on Carnot groups, *Math. Ann.* 325 (2003) 97–123
4. A. Bonfiglioli, E. Lanconelli and F. Uguzzoni, Uniform Gaussian estimates of the fundamental solutions for heat operators on Carnot groups, *Adv. Differential Equations* 7 (2002) 1153–1192.
5. G. B. Folland, Subelliptic Estimates and Function Spaces on Nilpotent Groups, *Arkiv för Mat.* 13 (1975) 161–207.
6. L. Gallardo, Capacités, mouvement brownien et problème de l'épine de Lebesgue sur les groupes de Lie nilpotents, Probability measures on groups (Oberwolfach, 1981), 96–120 (Lecture Notes in Math., 928, Springer, Berlin-New York, 1982).
7. L. Hörmander, Hypoelliptic second-order differential equations, *Acta Math.* 121 (1968), 147–171.
8. R. Monti and F. Serra Cassano, Surfaces measures in Carnot-Caratheodory spaces , *Calc. Var. and Part. Diff. Eq.* 13 (2001) 339–376.
9. L. Zalcman, Mean Value and Differential Equations, *Israel J. Math.* 14 (1973)339–352 .