Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2005-06

Annamaria Montanari

Formule integrali per una classe di equazioni di curvatura ed applicazioni a problemi di simmetria

29 giugno 2006

Abstract

In a joint paper with Lanconelli [10] we introduced the k-th Levi curvature for real hypersurfaces in $\mathbb{C}^{n+1}$ in terms of elementary symmetric functions of the eigenvalues of the normalized Levi form, and we proved a strong comparison principle, leading to identification theorems for domains with comparable curvatures. These results suggested the conjecture that spheres are the only compact hypersurfaces with constant Levi curvatures. This problem was first considered by Houni and Lanconelli in [4], who established the result for Reinhardt domains of $\mathbb{C}^2$. Then, in [11] Monti and Morbidelli proved a Darboux type theorem for $n \geq 2$,: any umbilical hypersurface of $\mathbb{C}^{n+1}$ with all constant Levi curvatures is a sphere or a cylinder.

Here we prove some integral formulas for closed hypersurfaces in $\mathbb{C}^{n+1}$ and we follow the Reilly approach to prove an isoperimetric inequality. As an application, we obtain the "Soap Bubble Theorem" for starlike domains with constant Levi curvatures bounding the classical mean curvature from above.

Lavoro in collaborazione con Vittorio Martino

1. Introduzione

Lo studio di superfici nello spazio euclideo con curvatura di Gauss o curvatura media costanti hanno ricevuto in passato molta attenzione. Nel 1899 Liebmann [7] dimostrò che le sfere sono le uniche superfici compatte di $\mathbb{R}^3$ con curvatura di Gauss costante. Nel 1952 Süss [17] estese i risultati di Liebmann dimostrando che un'ipersuperficie compatta e convessa dello spazio Euclideo, se per qualche r la $r-$esima funzione simmetrica elementare nelle curvature principali è costante, allora è una sfera. Nel 1954 Hsiung [6] dimostrò che la condizione di convessità può essere rilassata nella condizione di insieme stellato. Le dimostrazioni di questi risultati sono basate sulla formula di Minkowski. Un lavoro molto innovativo per lo studio di questi problemi è quello di Alexandrov [1], che nel 1956 dimostrò che le sfere sono le uniche ipersuperfici compatte immerse nello spazio Euclideo con curvatura media costante. Il metodo di Alexandrov è completamente differente dal metodo di Liebmann-Süss ed è basato sulla tecnica dei piani mobili, sul principio del massimo su aperti per equazioni ellittiche e sul principio del massimo al bordo di Hopf per equazioni uniformemente ellittiche. Nel 1978 Reilly [12] ottiene una nuova prova del teorema di Alexandrov, combinando la formula di Minkowski con nuovi eleganti argomenti. In questo seminario utilizziamo le idee di Relly per ipersuperfici compatte di $\mathbb{C}^{n+1}$. In un recente lavoro con Lanconelli [10] abbiamo introdotto la nozione di k-esima curvatura di Levi per un'ipersuperficie reale in $\mathbb{C}^{n+1}$, in termini delle funzioni simmetriche elementari degli autovalori della forma di Levi normalizzata, ed abbiamo dimostrato un principio del confronto forte, che porta ad alcuni risultati di simmetria per domini con r-esima curvatura di Levi costante. Precisamente:

Teorema 1.1. *Sia $D \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ un dominio strettamente r-pseudoconvesso con bordo connesso, $1 \leq r \leq n$. Sia $B_R(z_0) \subseteq D$ una sfera tangente a ∂D in qualche punto $p \in \partial D$. Se*

$$K_(\partial D)^{(r)}(z) \geq 1/R^r, \quad \forall z \in \partial D,$$

allora $D = B_R(z_0)$.

In [10] dimostriamo che se Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^{n+1}$, con bordo un'ipersuperficie reale di classe C^2, allora la j-esima curvatura di Levi di $\partial\Omega$ in $z \in \partial\Omega$ si può scrivere in termini di una funzione definente f di $\Omega = \{f(z) < 0\}$ come

$$K^{(j)}_{\partial\Omega}(z) = -\frac{1}{\binom{n}{j}} \frac{1}{|\partial f|^{j+2}} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_{j+1} \le n+1} \Delta_{(i_1,\cdots,i_{j+1})}(f) \tag{1}$$

per ogni $j = 1, \ldots, n$, dove

$$\Delta_{(i_1,\cdots,i_{j+1})}(f) = \det \begin{pmatrix} 0 & f_{\bar{i}_1} & \cdots & f_{\bar{i}_{j+1}} \\ f_{i_1} & f_{i_1,\bar{i}_1} & \cdots & f_{1,\bar{i}_{j+1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_{j+1}} & f_{i_{j+1},\bar{i}_1} & \cdots & f_{i_{j+1},\bar{i}_{j+1}} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Il Teorema 1.1 ha suggerito la seguente congettura: le sfere sono le uniche ipersuperfici compatte con curvature di Levi costanti. Una prima risposta affermativa a questo problema è stata data Klingenberg in [8] che dimostra che un'ipersuperficie compatta strettamente pseudoconvessa e con curvatura media di Levi costante e tale che la direzione caratteristica è un autovettore per la seconda forma fondamentale (condizione di parallelismo della struttura CR), necessariamente è una sfera. Successivamente Hounie e Lanconelli in [4] dimostrano il risultato per domini di Reinhardt di $\mathbb{C}^2$, cioè per domini D tali che se $(z_1, z_2) \in D$ allora $(e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2) \in D \quad \forall\, \theta_1, \theta_2$. Sotto questa ipotesi, in un intorno di un punto, esiste una funzione definente F che dipende solo dai raggi $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$, $F(r_1, r_2) = f(r_2^2) - r_1^2$ con f soluzione dell'equazione differenziale ordinaria

$$sff'' = sf'^2 - k(f + sf'^2)^{3/2} - ff' \tag{3}$$

Il Teorema di Alexandrov segue allora dall'unicità della soluzione dell'equazione differenziale ordinaria (3). Osserviamo che se $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ è un dominio di Reinhardt di classe C^2 e $p \in \partial\Omega$ è un punto di stretta pseudoconvessità allora p è un punto di convessità. La stessa tecnica è stata poi utilizzata dagli stessi autori in [5] per dimostrare Alexandrov per domini di Reinhardt a simmetria sferica. Successivamente in [11] Monti e Morbidelli dimostrano un teorema di tipo Darboux per $n \ge 2$: le uniche ipersuperfici ombelicali di $\mathbb{C}^{n+1}$ con tutte le curvature di Levi costanti sono sfere o cilindri.

In questo seminario dimostriamo delle formule integrali per ipersuperfici chiuse e seguiamo l'approccio di Reilly per provare le seguenti stime isoperimetriche

Teorema 1.2. *Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^{n+1}$ con bordo un'ipersuperficie reale di classe C^∞. Se $K^{(j)}_{\partial\Omega}$ è non negativa in ogni punto di $\partial\Omega$ allora*

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{K^{(j)}_{\partial\Omega}(x)} \right)^{1/j} d\sigma(x) \geq 2(n+1)|\Omega| \tag{4}$$

dove $|\Omega|$ è la misura di Lebesgue di Ω. Se $K^{(j)}_{\partial\Omega}$ è costante, allora l'uguaglianza in (4) vale se e solo se Ω è una palla di raggio $\left(\frac{1}{K^{(j)}_{\partial\Omega}} \right)^{1/j}$.

In particolare, se $K^{(j)}_{\partial\Omega}$ è costante, allora

$$\left(K^{(j)}_{\partial\Omega} \right)^{1/j} \leq \frac{\operatorname{meas}(\partial\Omega)}{2(n+1)|\Omega|} \tag{5}$$

e vale un Teorema di Aleksandrov per domini stellati e con curvatura media classica limitata dalla j-esima curvatura di Levi costante.

Corollario 1.1 (UN TEOREMA DI TIPO ALEKSANDROV)**.** *Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ un dominio stellato limitato con bordo un'ipersuperficie reale regolare. Se la j-curvatura di Levi di $\partial\Omega$ è una costante K in ogni punto ed il massimo della curvatura media di $\partial\Omega$ è superiormente limitato da K, allora $\partial\Omega$ è una sfera e Ω è una palla.*

Sottolineamo che se sono verificate le ipotesi di parallelismo della struttura CR di Klingenberg [8], allora dai risultati contenuti nella tesi di dottorato di Vittorio Martino [9] segue che il massimo della curvatura media per un ipersuperficie compatta con curvatura media di Levi costante K, necessariamente deve essere limitato da K.

Nella Sezione 2 usiamo la proprietà della Langrangiana nulla per le funzioni simmetriche elementari degli autovalori della matrice Hessiana complessa ed il classico teorema della divergenza per dimostrare la formula integrale (7) per la j-esima curvatura di Levi introdotta in [10]. Nella Sezione 3 dimostriamo la stima (4) della j-esima curvatura di Levi e utilizziamo la formula di Minkowski per la curvatura media classica per concludere la prova del Corollario 1.1.

Ringraziamenti Desidero ringraziare Daniele Morbidelli per averci suggerito le referenze [13] e [15].

2. Proprietà della Lagrangiana nulla per le funzioni simmetriche elementari della matrice Hessiana complessa

Data una matrice hermitiana A denotiamo con $\sigma_j(A)$ la j-esima funzione simmetrica elementare negli autovalori di A. Ad esempio, se A è una matrice $(n+1)\times(n+1)$ con autovalori $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}$ allora

$$\sigma_j(A) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_j\le n+1} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_j}.$$

Se scegliamo $A = [a_{\ell\bar{k}}] = \partial\bar{\partial}f$ la matrice Hessiana complessa di una funzione regolare f ed indichiamo con $\frac{\partial\sigma_j(A)}{\partial a_{\ell\bar{k}}}$ la derivata parziale della funzione σ_j rispetto all'elemento di posto $\ell\bar{k}$, allora

$$\sum_{\ell} \partial_\ell \left(\frac{\partial\sigma_{j+1}(\partial\bar{\partial}f)}{\partial a_{\ell\bar{k}}} \right) = 0, \forall k \tag{6}$$

(si veda ad esempio [14] per la matrice Hessiana reale). Utilizzando questa proprietà della lagrangiana nulla delle funzioni simmetriche elementari negli autovalori della matrice Hessiana complessa ed il classico teorema della divergenza otteniamo le seguenti formule integrali per ipersuperfici chiuse.

Teorema 2.1. *Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{C}^{n+1}$ con bordo un'ipersuperficie reale di classe C^2. Per ogni funzione definente f di classe C^2 di $\Omega = \{f(z) < 0\}$ si ha che per ogni $j = 1,\dots,n$*

$$\int_\Omega \sigma_{j+1}(\partial\bar{\partial}f)dx = \binom{n+1}{j+1} \frac{1}{2(n+1)} \int_{\partial\Omega} K^{(j)}_{\partial\Omega}(z)|\partial f|^{j+1} d\sigma(x), \tag{7}$$

dove $K^{(j)}_{\partial\Omega}$ è la j-esima curvatura di Levi di $\partial\Omega$.

Dimostrazione. Poichè σ_j è omogenea di grado j, cioè $\sigma_j(tA) = t^j\sigma_j(A)$ per ogni t reale, si ha

$$\sigma_{j+1}(\partial\bar{\partial}f) = \frac{1}{j+1} \sum_{\ell,k=1}^{n+1} \frac{\partial\sigma_{j+1}(\partial\bar{\partial}f)}{\partial a_{\ell\bar{k}}} f_{\ell\bar{k}}$$

Posto $\nu_\ell = \frac{\partial_\ell f}{|\partial f|}$ e identificando $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ con $x \in \mathbb{R}^{2(n+1)}$, per (6) e per il classico teorema della divergenza

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sigma_{j+1}(\partial\bar\partial f)dx &= \frac{1}{j+1}\int_\Omega \sum_{\ell,k=1}^{n+1} \partial_\ell \left(\frac{\partial \sigma_{j+1}}{\partial a_{\ell\bar k}}(\partial\bar\partial f) f_{\bar k}\right) dx \\
&= \frac{1}{2(j+1)}\int_{\partial\Omega} \sum_{\ell,k=1}^{n+1} \left(\frac{\partial \sigma_{j+1}}{\partial a_{\ell\bar k}}(\partial\bar\partial f) f_{\bar k}\nu_\ell\right) d\sigma(x) \\
&= \frac{1}{2(j+1)}\int_{\partial\Omega} \sum_{\ell,k=1}^{n+1} \frac{\left(\frac{\partial \sigma_{j+1}}{\partial a_{\ell\bar k}}(\partial\bar\partial f) f_{\bar k} f_\ell\right)}{|\partial f|} d\sigma(x) \\
&= -\frac{1}{2(j+1)}\int_{\partial\Omega} \frac{\sum_{1\le i_1<\cdots<i_{j+1}\le 2(j+1)} \Delta_{(i_1,\cdots,i_{j+1})}(f)}{|\partial f|} d\sigma(x) \\
&= \binom{n}{j}\frac{1}{2(j+1)}\int_{\partial\Omega} K^{(j)}_{\partial\Omega}(z)|\partial f|^{j+1} d\sigma(x) \\
&= \binom{n+1}{j+1}\frac{1}{2(n+1)}\int_{\partial\Omega} K^{(j)}_{\partial\Omega}(z)|\partial f|^{j+1} d\sigma(x).
\end{aligned}$$

□

3. Stime isoperimetriche e Teorema di tipo Aleksandrov

In questa sezione utilizziamo la formula integrale (7) per ottenere una stima della j-esima curvatura di Levi di un'ipersuperficie chiusa e per dimostrare il Teorema 1.2.

Prova del Teorema 1.2. Sia $f : \bar\Omega \to \mathbb{R}$ la soluzione $C^2(\bar\Omega)$ del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{trace} \partial\bar\partial f = 1, & \text{in } \Omega; \\ f = 0, & \text{sul } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Osserviamo che $\operatorname{trace} \partial\bar\partial = \frac{1}{4}\Delta$, con Δ l'operatore Laplaciano in $\mathbb{R}^{2n+2}$, e pertanto se $\partial\Omega$ è di classe $C^{2,\alpha}$, il problema di Dirichlet (8) ha un'unica soluzione $f \in C^2(\bar\Omega)$. Ricordiamo che per ogni matrice Hermitiana $n+1 \times n+1$ vale la disuguaglianza di Newton

$$\sigma_j(A) \le \binom{n+1}{j}\left(\frac{\operatorname{trace} A}{n+1}\right)^j \tag{9}$$

per ogni $j = 2, \ldots, n+1$. Inoltre, in (9) vale l'uguaglianza se e solo A è proporzionale alle matrice identità.

Applicando (9) alla matrice Hessiana complessa di f otteniamo una stima dall'alto del primo membro di (7)

(10)
$$\int_\Omega \sigma_{j+1}(\partial\bar\partial f)dx \le \binom{n+1}{j+1}\frac{1}{(n+1)^{j+1}}\int_\Omega \big(\mathrm{trace}\,(\partial\bar\partial f)\big)^{j+1}dx = \binom{n+1}{j+1}\frac{|\Omega|}{(n+1)^{j+1}}.$$

Applichiamo ora l'uguaglianza

$$\int_{\partial\Omega} |\partial f| d\sigma(x) = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \langle \nabla f, N\rangle d\sigma(x) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Delta f dx = 2|\Omega|$$

e la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz al secondo membro di (7) per ottenere

(11)
$$\begin{aligned}\binom{n+1}{j+1}\frac{1}{2(n+1)}\int_{\partial\Omega} K^{(j)}|\partial f|^{j+1}d\sigma(x) &\ge \binom{n+1}{j+1}\frac{1}{2(n+1)}\frac{\big(\int_{\partial\Omega}|\partial f|d\sigma(x)\big)^{j+1}}{\Big(\int_{\partial\Omega}\big(\frac{1}{K^{(j)}}\big)^{1/j}d\sigma(x)\Big)^j} \\ &= \binom{n+1}{j+1}\frac{1}{2(n+1)}\frac{(2|\Omega|)^{j+1}}{\Big(\int_{\partial\Omega}\big(\frac{1}{K^{(j)}}\big)^{1/j}d\sigma(x)\Big)^j}.\end{aligned}$$

Osserviamo che l'uguaglianza in (11) vale se e solo se $|\partial f|$ è proporzionale a $\big(\frac{1}{K^{(j)}}\big)^{1/j}$. Dall'uguaglianza (7) e dalle disuguaglianze (10) e (11) si deduce

$$\frac{(2|\Omega|)^j}{\Big(\int_{\partial\Omega}\big(\frac{1}{K^{(j)}}\big)^{1/j}d\sigma(x)\Big)^j} \le \frac{1}{(n+1)^j}$$

e dunque

$$\left(\int_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{K^{(j)}}\right)^{1/j}d\sigma(x)\right) \ge 2(n+1)|\Omega|.$$

Inoltre, in (7) vale l'uguaglianza se e solo se la matrice Hessiana complessa di f è propozionale all'identità. Poichè abbiamo scelto la funzione definente tale che trace $\partial\bar\partial f = 1$ deve essere $\partial\bar\partial f = \frac{1}{n+1}I$ in $\bar\Omega$ e per (1) e (2) si ha

$$(K^{(j)})^{1/j} = \frac{1}{(n+1)|\partial f|}$$

sul $\partial\Omega$. Questo in generale non sembra sufficiente per concludere che Ω è una palla. Infatti, per il principio del massimo f ha un minimo interno in $z_0 \in \Omega$. Non è restrittivo supporre $z_0 = 0$. Allora

$$f(z) = f(0) + \frac{1}{n+1}|z|^2 + h(z)$$

dove h è una funzione pluriarmonica. Però se $K^{(j)}$ è costante, allora anche $|\partial f|$ deve essere costante sul $\partial\Omega$. Ne segue che il problema di Dirichlet (8) è sovradeterminato e per il Teorema di Serrin [16] possiamo concludere che Ω è una palla e $\partial\Omega$ è una sfera. $\square$

Sia ora H_M la curvatura media Euclidea di $M = \partial\Omega$. Per la formula di Minkowski

$$\int_M d\sigma = \int_M H_M(x)\,\langle N, x\rangle d\sigma(x). \tag{12}$$

Qui N è la normale esterna unitaria.

Se Ω è stellato rispetto ad un punto e $\sup_M H_M \leq (K^{(j)})^{1/j}$ allora per (12) e per il teorema della divergenza si ha

(13)

$$\int_{\partial\Omega} d\sigma \leq (K^{(j)})^{1/j} \int_{\partial\Omega} \langle N, x\rangle d\sigma(x) = (K^{(j)})^{1/j} \int_\Omega \left(\sum_j \partial_{x_j} x_j \right) dx = 2(n+1)(K^{(j)})^{1/j}|\Omega|,$$

Siamo ora pronti per concludere la dimostrazione del Corollario 1.1

Prova del Corollario 1.1. Per (13)

$$(K^{(j)})^{1/j} \geq \frac{\operatorname{meas}(\partial\Omega)}{2(n+1)|\Omega|}$$

e per (5)

$$(K^{(j)})^{1/j} \leq \frac{\operatorname{meas}(\partial\Omega)}{2(n+1)|\Omega|}.$$

Dunque vale l'uguaglianza in (5) e per il Teorema 1.2 Ω è una palla. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] A.D. Alexandrov *Uniqueness theorems for surfaces in the large I,* Vestnik Leningrad Univ. **11** (1956), 5-17.

[2] A. Bogges, *CR Manifolds and the Tangential Cauchy-Riemann Complex*, Studies in Advanced Mathematics, 1991

[3] D. Gilgarg, N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehrer der Math. Wiss. vol. 224, Springer-Verlag, New York (1977).

[4] J.G. Hounie, E. Lanconelli, *An Alexander type Theorem for Reinhardt domains of* $\mathbb{C}^2$, to appear in Contemporary Math.

[5] J.G. Hounie, E. Lanconelli, *A sphere Theorem for a class of Reinhardt domains with constant levi curvature*, to appear in Forum Math.

[6] C.C. Hsiung *Some integral formulas for closed hypersurfaces* Math. Scand. **2** (1954) 286-294.

[7] H. Liemann*Eine neue eigenschaft der Kugel*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse (1899) 45-55.

[8] W. Klingenberg, *Real hypersurfaces in Kåler manifolds*, Asian J. Math. **5** (2001) no. 1, 1–17.

[9] V. Martino, *La forma di Levi per ipersuperfici in* $\mathbb{C}^{n+1}$ *e l'equazione di pseudocurvatura media per grafici reali,* Tesi di Dottorato. A.A. 2005-2006.

[10] A. Montanari, E. Lanconelli, *Pseudoconvex Fully Nonlinear Partial Differential Operators. Strong Comparison Theorems.* J. Differential Equations **202** (2004), no. 2, 306–331.

[11] R. Monti, D. Morbidelli, *Levi umbilical surfaces in complex space*, to appear in J. Reine Angew. Math.

[12] R. C. Relly *Applications of the Hessian operator in a Riemann manifold* Indiana Univ. Math. J., **26** (1977) 459-472.

[13] R. C. Relly *Mean curvature, the Laplacian, and Soap Bubbles* Amer. Math. Monthly 89 (1982), no. 3, 180–188, 197–198.

[14] R. C. Relly *On the Hessian of a function and the curvatures of its graph.* Michigan Math. J. 20 (1973), 373–383.

[15] A. Ros *Compact hypersurfaces with constant higher order mean curvatures*, Rev. Mat. Iberoamericana **3**(1987), no. 3-4, 447–453.

[16] J. Serrin *A symmetry problem in potential Theory* Arch. Rational Mech. Anal. 43 (1971), 304–318.

[17] W. Süuss, *Uber Kennzeichnungen der Kugel und Affinesphären durch Herrn K.P. Grotemeyer.* Arch. Math bf 3 (1952) 311-313.