SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico 2005-06

Daniele Morbidelli

IL TEOREMA DI LIOUVILLE PER LE MAPPE CONFORMI NELLA METRICA DI GRUSHIN

18 maggio 2006

Abstract

Consider the vector fields in $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$,

$$X_j = \partial_{x_j}, \quad j = 1, \dots, p \quad \text{and} \quad Y_k = (\alpha + 1)|x|^\alpha \partial_{y_k}, \quad k = 1, \dots q,$$

where $\alpha > 0$. We prove a classification theorem for conformal maps in the control metric associated with the vector fields X_j, Y_k. More precisely we show that, if $p \geq 3$, $q \geq 1$, then any conformal map can be obtained as a composition of suitable isometries, dilations and inversions. This is a natural generalization of the classical Liouville Theorem on conformal maps.

1. Introduzione

Descriviamo qui alcuni risultati parzialmente ottenuto in collaborazione con Roberto Monti, Università di Padova.

Se Ω è un aperto di una varietà Riemanniana (M, g), allora un diffeomorfismo $f : \Omega \to M$ si dice conforme se vale

$$g(f_*X, f_*Y) = u^{-2} g(X, Y), \quad \forall\ X, Y \in T_P M, \forall P \in \Omega \tag{1}$$

per una opportuna funzione u (fattore conforme).

Consideriamo la metrica in $M = (\mathbb{R}^p \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^q \ni (x, y)$

$$\widehat{g} = |dx|^2 + \frac{|dy|^2}{(\alpha+1)^2 |x|^{2\alpha}}. \tag{2}$$

Chiamiamo questa metrica "di Grushin" perché la distanza da essa generata coincide con alla distanza di Carnot-Carathéodory associata ai campi vettoriali di tipo Grushin

$$\partial_{x_j}, \quad j = 1, \dots, p \quad \text{e } (\alpha+1)|x|^\alpha \partial_{y_k}, \quad k = 1, \dots, q$$

introdotta in [FL] nello studio di operatori di tipo $\Delta_x + (\alpha+1)^2 |x|^{2\alpha} \Delta_y$.

In questo seminario discutiamo il problema della classificazione delle mappe conformi rispetto alla metrica $\widehat{g}$.

1.1. Mappe conformi elementari.

Poniamo

$$\begin{aligned} &\|z\| = \|(x, y)\| = \left(|x|^{2(\alpha+1)} + |y|^2\right)^{1/(2(\alpha+1))} \qquad \text{e} \\ &\delta_\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda^{\alpha+1} y), \qquad \lambda > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

È facile vedere che le seguenti mappe sono conformi nella metrica di Grushin.

$$(x, y) \mapsto \gamma(x, y) = (Ax, By + b), \quad A \in O(p),\ B \in O(q),\ b \in \mathbb{R}^q \quad \text{(isometrie)}; \tag{4}$$

$$z \mapsto \delta_\lambda(z) \qquad \lambda > 0 \quad \text{(dilatazioni)}; \tag{5}$$

$$(x, y) = z \mapsto \delta_{\|z\|^{-2}} z \qquad \text{(inversioni)}. \tag{6}$$

Il risultato discusso qui è il seguente:

Teorema 1.1. *Sia $p \geq 3$ e $q \geq 1$. Se $\Omega \subset M$ è connesso ed $f : \Omega \to M$ è conforme, allora f è una composizione delle mappe conformi elementari scritte sopra. Precisamente ha la forma*

$$f(z) = \gamma\Big(\delta_{\lambda \|(x,y-b)\|^{-2}}(x, y-b)\Big), \tag{7}$$

con γ isometria di tipo (4), *$\lambda > 0$ e $b \in \mathbb{R}^q$.*

Il teorema appena enunciato è falso per $p = 2$ e q qualsiasi.

2. Il Teorema di Liouville classico e Riemanniano

2.1. **Mappe conformi nello spazio Euclideo.** Prendiamo $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, con Ω aperto connesso di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Supponiamo per ipotesi che f sia regolare a sufficienza e sia conforme, cioè che soddisfi il sistema di Cauchy Riemann

$$Df(x)^T Df(x) = u(x)^{-2} I_n, \qquad \forall x \in \Omega. \tag{8}$$

per qualche fattore conforme $u > 0$ (qui Df =matrice Jacobiana). Se $n = 2$, ogni funzione olomorfa o antiolomorfa soddisfa (8). Se $n \geq 3$ le mappe conformi sono invece classificabili come segue:

Teorema 2.1 (Liouville). *Se $n \geq 3$, ogni f che soddisfa* (8) *in un aperto connesso, è del tipo*

$$f(x) = b + \frac{\alpha A(x-a)}{|x-a|^{\epsilon}}, \tag{9}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in O(n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon = 0$ oppure 2.

Ci sono (almeno) 2 schemi di dimostrazione per questo teorema.

- **(A)** Se $\Sigma \subset \Omega$ è una superficie e $\gamma \subset \Sigma$ è una linea di curvatura, allora $f(\gamma)$ è anch'essa una linea di curvatura di $f(\Sigma)$. Quindi si deduce, grazie al classico Teorema di Darboux, [1] che una mappa conforme manda sfere in sfere. Poi si riconosce che una mappa che manda sfere in sfere deve essere del tipo (9). Questa idea di dimostrazione è quella originale di Liouville ed è descritta in [B].

[1] Che vale solo per $n \geq 3$.

(B) La seconda idea consiste nel differenziare il sistema di Cauchy-Riemann (8) e provare che il fattore conforme u soddisfa un sistema di equazioni sovradeterminato le cui uniche soluzioni sono polinomi di grado 2. Dopo di che, ci si riconduce al caso di una isometria. Questo argomento è dovuto a Nevanlinna [N], si veda anche [DNF] e [B].

2.2. **Mappe conformi di una varietà Riemanniana.** Se (M, g) è una varietà Riemanniana, allora, come già detto, un diffeomorfismo $f : \Omega \to M$, Ω aperto connesso di M è conforme se vale $g(f_*U, f_*V) = u^{-2}g(U, V)$ per ogni U, V vettori tangenti. In altre parole, se poniamo $\widetilde{g} = f^*g$, [2] sarà

$$\widetilde{g} = u^{-2}g. \tag{10}$$

È facile poi vedere che $u = |J_f|^{-1/n}$, lo Jacobiano Riemanniano ($n = \dim(M)$).

Entrambi i metodi **(A)** e **(B)** sopra descritti danno delle informazioni anche nel caso Riemanniano.

Metodo A Sia (M, g) una varietà Riemanniana. Se facciamo cambio di metrica $\widetilde{g} = e^{2\phi}g$ e indichiamo con $\widetilde{s}$ la seconda forma scalare di una superficie Σ rispetto alla metrica $\widetilde{g}$ e a una normale N, allora risulta

$$\widetilde{s}(X, Y) = e^{\phi}[s(X, Y) - g(X, Y)N\phi], \tag{11}$$

per X, Y tangenti a Σ. In particolare se Σ è ombelicale rispetto a g, cioè se vale

$$s(X, Y) = \kappa g(X, Y),$$

per ogni X, Y tangenti a Σ e per una opportuna funzione scalare κ, allora sarà

$$\widetilde{s}(X, Y) = e^{\phi}\{\kappa - N\phi\}g(X, Y) = e^{-\phi}\{\kappa - N\phi\}\widetilde{g}(X, Y)$$

Quindi la superficie è ombelicale anche rispetto a $\widetilde{g}$, eventalmente con una diversa curvatura.

In sintesi, una f conforme da una varietà Riemanniana in se' manda superfici ombelicali in superfici ombelicali.

[2] Cosicché $f : (\Omega, \widetilde{g}) \to (f(\Omega), g)$ è per costruzione un isometria.

Metodo B (Vedi [SY], [IM], [KR]). Se $f : \Omega \to M$ è conforme, allora il fattore conforme soddifa il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ric}(f_*U, f_*V)\\ &= \mathrm{Ric}(U,V) + (n-2)u^{-1}\nabla^2 u(U,V) - g(U,V)u^{-2}\big\{(n-1)|\nabla u|^2 - u\Delta u\big\},\end{aligned} \tag{12}$$

per ogni U, V vettori tangenti. [3] Ora, se la varietà ha $\mathrm{Ric} = 0$, allora si vede subito che i termini si semplificano e resta il sistema di equazioni $(n-2)u^{-1}\nabla_a\nabla_b u - g_{ab}u^{-2}\big\{(n-1)|\nabla u|^2 - u\Delta u\big\} = 0$, che contiene solo la u.

Terminologia usata in letteratura:

- Se f è conforme e in più tale che $\mathrm{Ric}(f_*U, f_*V) = \mathrm{Ric}(U,V)$ per ogni campo U, V, si dice che e una *trasformazione di Liouville o una quasisimilarità* (si veda [KR]).
- Se invece f è conforme e soddisfa $\mathrm{B}(f_*U, f_*V) = \mathrm{B}(U,V)$ per ogni U, V, dove $B_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{n}Rg_{ab}$ è il tensore di Ricci senza traccia, allora f si dice una *trasformazione di Möbius o concircolare* (si veda [OS] e le referenze citate li'). Le trasformazioni di Möbius mandano cerchi geodetici in cerchi geodetici e curve a curvatura costante in curve a curvatura costante.

3. Invarianti associati al tensore di Weyl

Le superfici ombelicali sono rare in geometria Riemanniana. In dimensione ≥ 4, una ostruzione standard (si veda ad esempio [S]) alla esistenza di una superficie ombelicale con normale assegnata in un punto è data dalle equazioni di Codazzi, [4] che nel caso di

[3]Questa formula segue subito dalla formula classica sulla trasformazione della curvatura di Ricci per cambi conformi di metrica [E], [S]: se $\widetilde{g} = u^{-2}g$, allora la curvatura di Ricci si trasforma secondo la formula

$$\widetilde{R}_{ab} = R_{ab} + (n-2)u^{-1}\nabla_a\nabla_b u - g_{ab}u^{-2}\big\{(n-1)|\nabla u|^2 - u\Delta u\big\}.$$

[4]Ricordiamo che, se s è la seconda forma fondamentale scalare su una superficie Σ sispetto a una normale fissata N, allora le equazioni di Codazzi affermano che $\nabla^\top_U s(V,W) - \nabla^\top_V s(U,W) = R(N,W,U,V) = 0$. Qui $\nabla^\top$ indica la connessione tangente su Σ e $R(N,W,U,V) := g\big(N, \nabla_U\nabla_V W - \nabla_V\nabla_U W - \nabla_{[U,V]}W\big)$ il tensore di curvatura.

una superficie ombelicale $s(X,Y) = \kappa g(X,Y)\ \forall X,Y$ tangenti a Σ, si riducono a

$$g(V,W)(U\kappa) - g(U,W)(V\kappa) = R(N,W,U,V),$$

per ogni U,V,W campi tangenti a Σ. Qui $R(N,W,U,V) = g(N, \nabla_U\nabla_V W - \nabla_V\nabla_U W - \nabla_{[U,V]}W)$ indica il tensore di curvatura. Ora, se N è il vettore normale a Σ ombelicale in P e scegliamo U,V,W tangenti a Σ e ortogonali tra loro, allora il membro di sinistra è zero e otteniamo

$$R(N,W,U,V) = 0, \quad \forall U,V,W \perp N, \text{con } U,V,W \text{ ortogonali a coppie} \tag{13}$$

Queto tipo di ostruzione può essere espressa in termini del tensore di Weyl, che in coordinate si scrive

$$W_{abcd} = R_{abcd} - \frac{1}{n-2}(R_{ac}g_{bd} - R_{ad}g_{bc} + R_{bd}g_{ac} - R_{bc}g_{ad}) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(g_{bd}g_{ac} - g_{bc}g_{ad}). \tag{14}$$

Dalla definizione appena detta si vede subito che se X,Y,U,V formano una quaterna ortogonale, vale $W(X,Y,U,V) = R(X,Y,U,V)$.

Il tensore di Weyl è conformemente covariante di peso 2. Cioè, se $\widetilde{g}_{ab} = e^{2\phi}g_{ab}$, allora

$$\widetilde{W}_{abcd} = e^{2\phi}W_{abcd}. \tag{15}$$

Definizione 3.1. *Definiamo, in* (M,g) *qualsiasi,* $\dim(M) \geq 4$, $P \in M$,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_P = \{X \in T_PM : W(X,Y,U,V) = 0 \ \textit{per ogni}\ Y,U,V \\ \textit{tali che}\ X,Y,U,V\ \textit{sia una quaterna ortogonale in}\ T_PM\ \}\end{aligned} \tag{16}$$

Osserviamo che $\mathcal{U}_P$ è un cono contenuto in T_PM. La definizione si giustifica per la ragione seguente: se $f : \Omega \to M$ è conforme, $\Omega \subset M$, allora (15) assicura che

$$f_*(\mathcal{U}_P) = \mathcal{U}_{f(P)}, \qquad \forall\ P \in \Omega.$$

L'individuazione precisa dell'insieme $\mathcal{U}_P$ per ogni $P \in M$ è uno strumento utile per lo studio delle mappe conformi su varietà. Si veda [L], per l'introduzione di invarianti simili associati al tensore di Weyl.

4. Il caso Grushin

4.1. **La metrica di Grushin in coordinate polari.** Nella stessa classe conforme di $\widehat{g}$ si trova la metrica

$$g = (\alpha+1)^2|x|^{2\alpha}|dx|^2 + |dy|^2, \tag{17}$$

che risulta essere decisamente più comoda della $\widehat{g}$ per i nostri scopi. [5]

Se passiamo a coordinate cilindriche e contemporaneamente facciamo uno stretching nella x, scrivendo $|x|^{\alpha+1} = r$, $\theta = \frac{x}{|x|} \in \mathbb{S}^{p-1}$, possiamo pensare alla nostra varietà di partenza

$$M = (\mathbb{R}^p \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^q, \text{ con metrica } \quad (\alpha+1)^2|x|^{2\alpha}|dx|^2 + |dy|^2$$

come identificabile (isometrica) al prodotto $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^q) \times_f \mathbb{S}^{p-1}$, dove $\times_f$ indica il prodotto con metrica warped

$$g = dr^2 + |dy|^2 + (\alpha+1)^2 r^2 g_{\mathsf{S}}, \tag{18}$$

g_{S} metrica strandard sulla sfera $\mathbb{S}^{p-1} \subset \mathbb{R}^p$. Notazione:

$$\mathsf{H} = \{(r,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^q, \text{ con metrica Euclidea } dr^2 + |dy|^2\}$$

$$\mathsf{S} := \mathbb{S}^{p-1} \subset \mathbb{R}^p, \text{ con metrica standard } g_{\mathsf{S}} \quad \text{e } f(r,y) = (\alpha+1)r.$$

Per ogni $P = (r,y,\theta) \in \mathsf{H} \times \mathsf{S}$, decomponiamo

$$U \in T_P(\mathsf{H} \times \mathsf{S}), \qquad U = U_{\mathsf{H}} + U_{\mathsf{S}} \in T_P\mathsf{S} \oplus T_P\mathsf{H}, \tag{19}$$

dove $T_P\mathsf{S}$ e $T_P\mathsf{H}$ indicano i lifting banali degli spazi tangenti $T_\theta\mathsf{S}$ e $T_{(r,y)}\mathsf{H}$.

Usando le formule standard sulla curvatura di una metrica warped, otteniamo

$$R(U,V,X,Y) = -\alpha(\alpha+2)(\alpha+1)^{-2}r^{-2}\Big\{g(U_{\mathsf{S}},X_{\mathsf{S}})g(V_{\mathsf{S}},Y_{\mathsf{S}}) - g(U_{\mathsf{S}},Y_{\mathsf{S}})g(V_{\mathsf{S}},X_{\mathsf{S}})\Big\}, \tag{20}$$

dove i vettori U,V,X,Y sono decomposti come in (19). Osserviamo che per $p=2$ la metrica è piatta. [6] Questo spiega perché il Teorema 1.1 è falso per $p=2$.

---

[5] Se scriviamo $\xi = |x|^\alpha x$, allora $g = (\alpha+1)^2|d\xi|^2 - (\alpha^2+2\alpha)\frac{\langle \xi, d\xi\rangle^2}{|\xi|^2} + |dy|^2$. Da cui si vede che per $p=1$ la metrica è euclidea nelle coordinate (ξ,y).

[6] Infatti $\mathsf{S} = \mathbb{S}^{p-1} = \mathbb{S}^1$. Quindi $U_{\mathsf{S}}, X_{\mathsf{S}}, Y_{\mathsf{S}}, V_{\mathsf{S}}$ sono tutti collineari e la parentesi graffa in (20) è zero.

Contraendo,

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Ric}(U,V) = \operatorname{Ric}(U_{\mathsf{S}},V_{\mathsf{S}}) = -\alpha(\alpha+2)(p-2)(\alpha+1)^{-2}r^{-2}g(U_{\mathsf{S}},V_{\mathsf{S}}) \quad \text{e} \\
&\mathrm{Scal} = -\alpha(\alpha+2)(p-2)(p-1)(\alpha+1)^{-2}r^{-2}.
\end{aligned} \tag{21}
$$

4.2. **Il cono invariante $\mathcal{U}_P$ per la metrica di Grushin.** Partendo dall'espressione della curvatura della metrica (18), si può determinare l'insieme $\mathcal{U}_P$. Precisamente

Proposizione 4.1. *Sia $p \geq 3$. Per la nostra varietà $\mathsf{H} \times_f \mathsf{S}$, vale in ogni P,*

$$\mathcal{U}_P = \{U \in T_P M : |U_{\mathsf{H}}|\ |U_{\mathsf{S}}| = 0\}.$$

Osserviamo anche che per $p = 2$ risulta $\mathcal{U}_P = T_P$, tutto lo spazio tangente.

Dalla Proposizione 4.1 si deduce subito che

Corollario 4.1. *Se f è conforme in $\mathsf{H} \times_f \mathsf{S}$, possono verificarsi 2 possibilità:*

$$
\begin{cases}
f_*(T_P\mathsf{S}) = T_{f(P)}\mathsf{S}, \ \ e \\
f_*(T_P\mathsf{H}) = T_{f(P)}\mathsf{H}
\end{cases} \qquad \forall P \in \Omega \tag{22}
$$

oppure

$$
\begin{cases}
f_*(T_P\mathsf{S}) = T_{f(P)}\mathsf{H}, \ \ \text{e} \\
f_*(T_P\mathsf{H}) = T_{f(P)}\mathsf{S}
\end{cases} \qquad \forall P \in \Omega \tag{23}
$$

(Il caso (23) può avvenire solo se $\dim(\mathbb{S}^{p-1}) = \dim(\mathsf{H})$, cioè $p-1 = q+1$.) Corrispondentemente la nostra mappa è di tipo prodotto di uno dei seguenti due tipi:

$$(r,y,\theta) \mapsto (\widetilde{r}(r,y), \widetilde{y}(r,y), \widetilde{\theta}(\theta)) \tag{24}$$

oppure

$$(r,y,\theta) \mapsto (\widetilde{r}(\theta), \widetilde{y}(\theta), \widetilde{\theta}(r,y)), \qquad \text{con } p-1 = q+1. \tag{25}$$

4.3. **Sistema sovradeterminato per il fattore conforme.** Non è difficile verificare che, per una mappa di tipo prodotto (24) o (25) conforme nella metrica warped (18), anche il fattore conforme u assume una forma di prodotto:

$$u(r, y, \theta) = a(r, y)b(\theta).$$

A questo punto, anche tenendo conto della forma (21) della curvatura di Ricci, possiamo esaminare il sistema sovradeterminato (12) in questa classe di funzioni u.

Vale allora il seguente risultato.

Teorema 4.1. *Tutte le mappe conformi nella metrica di Grushin sono mappe di Liouville, cioè soddisfano* $\mathrm{Ric}(f_*U, f_*V) = \mathrm{Ric}(U, V)$ *per ogni* U, V. *Corrispondentemente*

$$(n-2)\nabla_a\nabla_b u - g_{ab}u^{-1}\{(n-1)|\nabla u|^2 - u\Delta u\} = 0.$$

GLi unici fattori conformi u non costanti hanno la forma esplicita

$$u = a\left(r^2 + |y-b|^2\right) = a\left(|x|^{2(\alpha+1)} + |y-b|^2\right) = a\|(x, y-b)\|^{2(\alpha+1)},$$

$a > 0$, $b \in \mathbb{R}^q$.

4.4. **Conclusione dell'argomento. Il caso delle isometrie.** Si verifica che la mappa $\Phi(z) = \delta_{\lambda\|(x,y-b)\|^{-2}}(x, y-b)$ ha fattore conforme $u_\Phi = \lambda^{-\alpha+1}\|(x, y-b)\|^{2(\alpha+1)}$. Se scriviamo $f(z) = F(\Phi(z))$ e ricordiamo che $u_{F\circ\Phi} = u_F u_\Phi$, scopriamo che scegliendo $\lambda^{-(\alpha+1)} = a$, la mappa F risulta essere una isometria. A questo punto basta provare il seguente semplice risultato di classificazione delle isometrie:

Proposizione 4.2. *Se $p \geq 3$, le isometrie locali della metrica* $(\alpha+1)^2|x|^{2\alpha}|dx|^2 + |dy|^2$ *sono restrizioni di mappe del tipo*

$$(x, y) \mapsto \gamma(x, y) = (Ax, By + b), \qquad A \in O(p),\ B \in O(q),\ b \in \mathbb{R}^q.$$

5. Superfici ombelicali

Abbiamo già detto che $p = 2$, allora la metrica g è piatta. Quindi per ogni P e $V \in T_P$ esiste una superficie Σ ombelicale e che ha normale che punta nella direzione V_P.

Se $p \geq 3$, lo spazio è meno ricco di superfici ombelicali. Infatti, la Proposizione 4.1 fornisce la seguente ostruzione:

Corollario 5.1. *Se $p \geq 3$ e Σ è una superficie ombelicale, $P \in \Sigma$ e N è un vettore normale a Σ in P, allora deve essere*

$$|N_{\mathsf{H}}|\,|N_{\mathsf{S}}| = 0. \tag{26}$$

Più precisamente si può provare che

Teorema 5.1. *Se $p \geq 3$, allora le uniche superfici ombelicali per la metrica g sono:*

Tipo A1. Sfere omogenee di equazione $|x|^{2(\alpha+1)} + |y-b|^2 = c^2, \quad b \in \mathbb{R}^q, c > 0.$

Tipo A2. Piani di tipo $\sum_\lambda a_\lambda y_\lambda = c$.

Tipo B. Piani di tipo $\sum_k c_k x_k = 0$

Ci sono almeno due “coincidenze” interessanti:

(1) Tutte queste superfici sono “sfere estrinseche”, cioè hanno curvatura costante, nella metrica g.

(2) Le superfici ombelicali $\left(|x|^{2(\alpha+1)} + |y|^2\right)^{1/(2(\alpha+1))} = \|z\| =$ costante sono gli insiemi di livello della funzione

$$\Gamma(z) = \|z\|^{2-Q}, \qquad Q = p + (\alpha+1)q,$$

che è una soluzione singolare con polo nell'origine dell'operatore di Grushin

$$L = \Delta_x + (\alpha+1)^2|x|^{2\alpha}\Delta_y.$$

Riferimenti bibliografici

[B] M. Berger, Geometry I. Universitext, Springer 1987

[DNF] Dubrovin, B. A.; Fomenko, A. T.; Novikov, S. P. Modern geometry—methods and applications. Part I. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields. Graduate Texts in Mathematics, 93.

[E] L. P. Eisenhart, Riemannian Geometry. 2d printing. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1949.

[FL] B. Franchi, E. Lanconelli, Une métrique associée à une classe d'oprateurs elliptiques dégénérés. (French) [A metric associated with a class of degenerate elliptic operators] Conference on linear partial and pseudodifferential operators (Torino, 1982). Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino 1983, Special Issue, 105–114 (1984).

[IM] T. Iwaniec, G. Martin, Geometric function theory and non-linear analysis, Oxford University Press.

[KR] Kühnel, W., Rademacher, H.-B. Conformal diffeomorphisms preserving the Ricci tensor. Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 2841–2848.

[KP] Kulkarni, Pinkall, Conformal Geometry. Aspects of Mathematics, Max Plank Institut, 1988.

[L] M. Listing, Conformal Einstein spaces in N-dimensions. II. J. Geom. Phys. 56 (2006), 386–404.

[MM] R. Monti, D. Morbidelli, Kelvin transform for Grushin operators and critical semilinear equations, Duke Math. J., 131 (2006), 167–202.

[N] Nevanlinna, R., On differentiable mappings. 1960 Analytic functions pp. 3–9 Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.

[OS] Osgood, B., Stowe, D., The Schwarzian derivative and conformal mapping of Riemannian manifolds, Duke Math. J. 67 (1992), 57–99.

[S] Schouten, Ricci calculus, Springer 1954.

[SY] R. Schoen, Yau, Lectures on differential geometry, Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, I. International Press, Cambridge, MA, 1994.