Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2006-07

Daniele Morbidelli

Estensioni biolomorfe di mappe CR in una classe di domini pseudoconvessi

19 giugno 2007

Abstract

We discuss a method for proving a localization property for holomorphic automorphisms in domains $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$. The method can be applied to get a new proof of some results by Dini and Selvaggi Primicerio.

1. Introduzione al problema

In questo seminario discuteremo una questione recentemente studiata con Roberto Monti (Università di Padova).

Un fenomeno scoperto da Poincaré in [5] è il seguente.

Teorema 1.1 (Poincaré [6])**.** *Sia $B = B(0,1) \subset \mathbb{C}^2$ la palla unitaria. Sia $z \in \partial B$ un punto del bordo e sia V un intorno di z in $\mathbb{C}^2$. Allora se $f : V \to V' \subset \mathbb{C}^2$ è biolomorfa e manda punti di ∂B in punti di ∂B, cioè*

$$f(V \cap (\partial B)) \subset \partial B,$$

esiste $F \in \mathrm{Aut}(B)$ che coincide con f in $V \cap B$.

Qui e altrove $\mathrm{Aut}(\Omega)$ denota l'insieme degli automorfismi olomorfi di un dominio Ω.

Il Teorema di Poincaré è stato riscoperto/generalizato al caso della palla di $\mathbb{C}^{n+1}$ da Tanaka [7] e Alexander [1].

Linguaggio. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$ un aperto con bordo analitico:

- Siano $V, V' \subset \mathbb{C}^{n+1}$ aperti connessi che intersecano $\partial\Omega$. Chiamiamo ogni diffeomorfismo biolomorfo $f : V \to V'$ una **mappa locale** di Ω.
- Diciamo che Ω ha la **proprietà di estensione biolomorfa** se per ogni mappa locale $f : V \to V'$ di Ω esiste $F \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ con $f = F$ in $V \cap \Omega$.

Il seguente esempio prova che è molto facile trovare aperti che non hanno la proprietà di estensione biolomorfa.

Esempio 1.1. *Prendiamo $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^4 < 1\}$. Funzioni del tipo*

$$(z_1, z_2) \mapsto f(z_1, z_2) = (z_2^2, z_1^{1/2})$$

provano che Ω non ha la proprietà di estensione.

1.1. **Alcuni risultati noti.**

Ulteriori esempi di domini con la proprietà di estensione sono stati prodotti da Webster [9], che prova che gli ellissoidi hanno la proprietà di estensione. Segnaliamo anche il lavoro [3], dove le tecniche di Webster vengono generalizzate e unite ad argomenti topologici.

Inoltre citiamo il seguente risultato di Pinchuk [5].

Teorema (Pinchuk [5]). Se $\Omega \subset \mathbb{C}^{n+1}$ è strettamente pseudoconvesso, con $\partial\Omega$ semplicemente connesso e analitico, allora Ω ha la proprietà di estensione.

Al di fuori del caso strettamente pseudoconvesso, una classe di esempi di domini con la proprietà di estensione è stata prodotta da Dini e Selvaggi Primicerio [2].

1.2. **Una nuova classe di esempi.** Consideriamo $z \in \mathbb{C}^{n+1}$ e scriviamo

$$z = (z^1, z^2, \dots, z^s) \in \mathbb{C}^{k_1} \times \mathbb{C}^{k_2} \times \mathbb{C}^{k_s}, \qquad \sum_{j=1}^{s} k_j = n+1.$$

con $z^1 = (z_1, z_2, \dots, z_{k_1})$, $z^2 = (z_{k_1+1}, \dots, z_{k_1+k_2})$ e via dicendo. Consideriamo un aperto del tipo

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : p(z, \bar{z}) := |z^1|^{2m_1} + \cdots + |z^s|^{2m_s} < 1\}. \tag{1}$$

Qui $m_j = 1, 2, \dots$.

Teorema. (Dini, Selvaggi Primicerio [2]) Se $k_j > 1$ ogni volta che $m_j > 1$, allora la proprietà di estensione è valida.

In questo seminario proponiamo un approccio allo studio della proprietà di estensione un po' differente da quelli sinora utilizzati in letteratura.

A titolo di esempio, discutiamo i seguenti due casi del risultato [2]:

$$\Omega = \Big\{z \in \mathbb{C}^{n+1} : \sum_{j=1}^{s-1} |z^j|^{2m_j} + |z_{n+1}|^2 < 1\Big\}, \qquad \textbf{(Caso 1)}$$

con $z^j \in \mathbb{C}^{k_j}$ e $k_j, m_j \geq 2$ per ogni $j = 1, \dots, s-1$, oppure

$$\Omega = \Big\{ \sum_{j=1}^{s} |z^j|^{2m_j} < 1\Big\}, \qquad \textbf{(Caso 2)}$$

con $k_j, m_j \geq 2$ per ogni j, allora Ω ha la proprietà di estensione biolomorfa.

Per riconoscere la proprietà di estensione, l'idea e' quella di classificare tutte le mappe locali e constatare che sono di fatto automorfismi. I punti fondamentali sono i seguenti.

(A) Studio della "Levi–conformalità" in $\partial\Omega$ di una mappa locale.

(B) Studio degli invarianti di Chern-Moser

Lavorando con questi strumenti nelle parti strettamente pseudoconvesse di $\partial\Omega$, è possibile riuscire a caratterizzare esplicitamente tutte le mappe locali e riconoscere che sono in effetti tutti automorfismi.

2. Gli strumenti usati

In questo paragrafo descriviamo brevemente alcuni strumenti che abbiamo usato.

2.1. **Il linguaggio delle superfici CR..** Scriviamo $\partial\Omega = \{\Phi(z, \bar{z}) = 0\}$, dove Φ è una funzione definente. Preso $z \in \mathbb{C}^{n+1}$, indichiamo con

$$T_z^{1,0}\mathbb{C}^{n+1} = \Big\{\sum_{\alpha=1}^{n+1} t_\alpha \partial_\alpha : t_\alpha \in \mathbb{C}\Big\}$$

lo spazio tangente olomorfo a $\mathbb{C}^{n+1}$. Qui $\partial_\alpha = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\Big)$. Poniamo poi $T_z^{0,1}\mathbb{C}^{n+1} = \{\bar{Z} : Z \in T_z^{1,0}\mathbb{C}^{n+1}\}$.

Fissiamo la forma

$$\theta = i(\partial - \bar{\partial})\Phi = \sum_{\alpha=1}^{n+1} i(\Phi_\alpha dz_\alpha - \Phi_{\bar{\alpha}} d\bar{z}_\alpha).$$

Qui $\Phi_\alpha = \partial_\alpha \Phi$, $\Phi_{\bar{\alpha}} = \partial_{\bar{\alpha}}\Phi$. Allora, se $z \in \partial\Omega$, lo spazio tangente olomorfo a $\partial\Omega$ è

$$T_z^{10}(\partial\Omega) = \Big\{Z = \sum t_\alpha \partial_\alpha \in T^{10}\mathbb{C}^{n+1} : Z\Phi = 0\Big\} = \Big\{Z \in T^{10}\mathbb{C}^{n+1} : \theta(Z) = 0\Big\}$$

Osserviamo che $T_z^{10}\Sigma$ è uno spazio vettoriale complesso di dimensione n.

La forma di Levi associata a θ è, dati $Z = \sum t_\alpha \partial_\alpha$ e $W = \sum s_\alpha \partial_\alpha \in T^{1,0}\partial\Omega$,

$$L(Z, \bar{W}) = -id\theta(Z, \bar{W}) = 2\sum_{\alpha,\beta} \Phi_{\alpha\bar{\beta}} t_\alpha \bar{s}_\beta.$$

Dato $\Sigma \subset \partial\Omega$, si dice che Σ è *pseudoconvesso* se

$$L(Z, \bar{Z}) \geq 0 \quad \forall\, Z \in T^{1,0}\Sigma.$$

Si dice che Σ è *strettamente pseudoconvesso* se

$$L(Z, \bar{Z}) > 0 \quad \forall\, Z \in T^{1,0}\Sigma, \quad Z \neq 0.$$

Se Σ è strettam. pseudoconvesso, il *campo caratteristico* associato alla forma di contatto θ è il campo reale T definito univocamente da

$$\theta(T) = 1, \quad \text{e} \quad d\theta(Z, T) = 0 \; \forall \, Z \in T^{1,0}\Sigma.$$

2.2. **Levi-conformalità delle mappe locali.** Vale il seguente fatto:

Fatto standard. *Se $f : V \to V'$ è una mappa locale di $\Omega = \{\Phi < 0\}$ e se $V \cap \partial\Omega := \Sigma$ e $V' \cap \partial\Omega := \Sigma'$ sono strettamente pseudoconvessi, allora f è conforme rispetto a $\theta = i(\partial - \bar\partial)\Phi$ nel senso seguente. Esiste una funzione $u : \Sigma \to \,]0, +\infty[$ tale che*

$$L(f_* Z, f_* \bar W) = u^{-1} L(Z, \bar W), \quad \forall \, Z, W \in T^{1,0}\Sigma \tag{2}$$

Prova. Il fatto è standard, ma includiamo una breve prova.

Passo 1. Proviamo che esiste $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $f^*\theta = u^{-1}\theta$. Per vedere ciò, basta ricordare che, poiché f è olomorfa, essa preserva il fibrato olomorfo: $f_*(Z) \in T^{1,0}\Sigma$, ogni volta che $Z \in T^{1,0}\Sigma$. QUindi

$$(f^*\theta)(Z) = \theta(f_* Z) = 0,$$

perché θ annulla $T^{1,0}$. Prendendo questa equazione e la sua coniugata scopriamo che $f^*\theta$, pensata come forma reale, annulla il sottospazio $\mathrm{Re}(T^{1,0}\Sigma \oplus T^{01}\Sigma)$ che dimensione $2n$ e codimensione uno in $T\Sigma$. Quindi $f^*\theta = u^{-1}\theta$ per qualche funzione scalare u.

Passo 2. Stabiliamo il segno di u. Prendiamo $Z \in T^{1,0}$. Allora [1]

$$L(f_* Z, f_* \bar Z) = -i d\theta(f_* Z, f_* \bar Z) = i\theta(f_*[Z, \bar Z]) = i u^{-1}\theta([Z, \bar Z]) = i u^{-1} L(Z, \bar Z).$$

Siccome $L(f_* Z, f_* \bar Z)$ e $L(Z, \bar Z)$ sono entrambi strettamente positivi, sarà $u > 0$. □

L'equazione (2) è in effetti un sistema sovradeterminato. Una strategia per affrontare questo tipo di sistemi (si pensi alla prova del Teorema di Liouville sulle mappe conformi in $\mathbb{R}^3$) è quella di differenziare le equazioni e cercare di ottenere delle equazioni differenziali

[1] Ricordiamo che, dati $U, V \in T^{1,0}\Sigma$ vale, per definizione di differenziale

$$d\theta(U, \bar V) = U(\theta(\bar V)) - \bar V(\theta(U)) - \theta([U, \bar V]) = -\theta([U, \bar V]).$$

per la funzione u. Un modo sistematico per differenziare il sistema (2) è quello di usare un po' di Geometria Differenziale.

Da qui in poi lavoriamo su una $f : V \to V'$, mappa locale di Ω, assumiamo che $\partial\Omega \cup V$, $\partial\Omega \cup V'$ siano strettam. pseudoconessi e supponiamo che valga (2).

2.3. **Un sistema sovradeterminato per u.** Sia ora ∇ la connessione di Tanaka Webster [8], [10] associata a θ, sia

$$R(Z, \bar{W}, U, \bar{V}) = L(R(U, \bar{V})Z, \bar{W})$$

il suo tensore di curvatura. Indichiamo inoltre con $\mathrm{Ric}(Z, \bar{W})$ il tensore di Ricci-Webster. [2] Sia ora f una mappa locale di Ω. Essa è Levi-conforme rispetto a θ come in (2). Allora risulta

$$\begin{aligned}\mathrm{Ric}(f_*Z, f_*\bar{W}) = \mathrm{Ric}(Z, \bar{W}) &+ \frac{n+2}{2u}\Big\{\nabla_{\bar{W}}\nabla_Z u + \nabla_Z\nabla_{\bar{W}} u - \frac{2}{u} Zu\bar{W}u\Big\} \\ &+ \frac{1}{2u}\Big\{\Delta u - \frac{2(n+2)}{u}|\nabla u|^2_\theta\Big\} L(Z, \bar{W}).\end{aligned} \tag{4}$$

dove Δu è il sublaplaciano associato a θ, mentre $|\nabla u|^2_\theta$ è la lunghezza rispetto a θ del gradiente di u. La formula (4) segue dalle formule di Lee [4] per la trasformazione della curvatura sotto cambi di forma di contatto del tipo $\widetilde{\theta} = u^{-1}\theta$.

L'idea è quella di pensare (4) come ad un sistema di equazioni differenziali nell'incognita scalare u.

2.4. **L'analisi degli invarianti di Chern-Moser.** Indichiamo con $R = h^{\alpha\bar{\beta}}R_{\alpha\bar{\beta}}$ la curvatura scalare. Webster ha riconosciuto in [10] che il tensore di Chern Moser ha la forma

$$\begin{aligned}S_{\beta\bar{\alpha}\varrho\bar{\sigma}} = R_{\beta\bar{\alpha}\varrho\bar{\sigma}} &- \frac{1}{n+2}\{h_{\beta\bar{\alpha}}R_{\varrho\bar{\sigma}} + h_{\varrho\bar{\alpha}}R_{\beta\bar{\sigma}} + h_{\beta\bar{\sigma}}R_{\varrho\bar{\alpha}} + h_{\varrho\bar{\sigma}}R_{\beta\bar{\alpha}}\} \\ &+ \frac{R}{(n+1)(n+2)}\{h_{\beta\bar{\alpha}}h_{\varrho\bar{\sigma}} + h_{\varrho\bar{\alpha}}h_{\beta\bar{\sigma}}\}\end{aligned} \tag{5}$$

[2]Piu' precisamente, se $\{Z_\alpha, \alpha = 1, \ldots, n\}$ è un frame locale di $T^{1,0}$ e se poniamo $h_{\alpha\bar{\beta}} = L(Z_\alpha, Z_{\bar{\beta}})$, allora scriviamo

$$\mathrm{Ric}_{\alpha\bar{\beta}} \equiv R_{\alpha\bar{\beta}} = R_{\sigma}{}^{\sigma}{}_{\alpha\bar{\beta}} = h^{\sigma\bar{\mu}}R_{\sigma\bar{\mu}\alpha\bar{\beta}}, \tag{3}$$

Vale inoltre la proprietà notevole di invarianza

$$S(f_*Z, f_*\bar{W}, f_*U, f_*\bar{V}) = u^{-1}S(Z, \bar{W}, U, \bar{V}), \tag{6}$$

se f soddisfa (2).

La formula (6) permette di affermare che, preso $z \in \Sigma$, il cono

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \{Z \in T_z^{10}\Sigma : S(Z,\bar{W}, U, \bar{V}) = 0 \quad \forall U, V, W \in T_z^{10}\Sigma \quad \text{con} \\ L(Z, \bar{W}) = L(Z, \bar{V}) = L(U, \bar{V}) = L(U, \bar{W}) = 0\} \end{aligned} \tag{7}$$

è un invariante CR. Cioè

$$Z \in \mathcal{H} \quad \Rightarrow f_*Z \in \mathcal{H}.$$

3. I casi studiati.

3.1. **Caso 1.** Presentiamo una piccola discussione del Caso 1, limitandoci però alla situazione particolare in cui $s = 2$. Dopo una trasformazione biolomorfa [3] che non altera la natura del problema, giungiamo a un aperto definito da

$$\mathrm{Im}(z_{n+1}) > |z|^{2m}, \qquad (z, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, \quad n \geq 2.$$

Ciò che si ottiene è il seguente risultato:

Teorema 3.1. Per $m \geq 2$ ed $n \geq 2$, nelle coordinate (z, t), le mappe locali sono tutte ottenute combinando le seguenti mappe elementari:

$$\begin{aligned} &(z, z_{n+1}) \mapsto (\lambda z, \lambda^{2m} z_{n+1}) \\ &(z, z_{n+1}) \mapsto (Az, z_{n+1} + b), \quad A \in U(n), b \in \mathbb{R} \\ &(z, z_{n+1}) \mapsto I(z, z_{n+1}) = \Big(\frac{z}{z_{n+1}^{1/m}}, -\frac{1}{z_{n+1}}\Big). \end{aligned} \tag{8}$$

La prova del teorema si articola nei seguenti passi: si prende la forma di contatto

$$\theta = \frac{1}{2}(dz_{n+1} + d\bar{z}_{n+1}) + im|z|^{2(m-1)}(z_\alpha d\bar{z}_\alpha - \bar{z}_\alpha dz_\alpha)$$

e si calcola la sua curvatura di Webster.

[3]La mappa

$$(\zeta, \zeta_{n+1}) \mapsto \Big(\frac{\zeta}{(1-\zeta_{n+1})^{1/m}}, \frac{i(1+\zeta_{n+1})}{1-\zeta_{n+1}}\Big) = (z, z_{n+1})$$

è una mappa biolomorfa di $\{|\zeta|^{2m} + |z_{n+1}|^2 < 1\}$ in $\{\mathrm{Im}(z_{n+1}) > |z|^{2m}\}$.

- Si individuano i coni invarianti $\mathcal{H}$. Precisamente, fissato il frame olomorfo $Z_\alpha = \partial_\alpha + 2i|z|^{2(m-1)}\bar{z}_\alpha \partial_{n+1}$, $\alpha = 1, \dots, n$, e definito il fibrato

$$\mathcal{E} = \mathrm{span}\Big\{ E := \sum_{\alpha=1}^{n} z_\alpha Z_\alpha \Big\} \subset T^{1,0}(\partial\Omega),$$

risulta $\mathcal{H} = \mathcal{E} \cup \mathcal{E}^\perp$, dove $\perp$ indica l'ortogonale rispetto alla forma di Levi.
- Si riconosce che deve essere di necessità $f_*\mathcal{E} = \mathcal{E}$ e $f_*\mathcal{E}^\perp = \mathcal{E}^\perp$. Di conseguenza la funzione u è radiale e il sistema (4) ha soluzioni del tipo

$$u = C\big(|z|^{4m} + (t - t_0)^2\big), \quad t = \mathrm{Re}(z_{n+1}).$$

Questo fattore u, se $C = 1$ e $t_0 = 0$, è lo stesso dell'inversione I in (8).
- La funzione $f \circ I$ ha fattore conforme costante. È allora facile vedere che deve avere la forma $f(I(z, z_{n+1})) = (\lambda U z, \lambda^{2m} z_{n+1} + b)$, con U unitaria, $\lambda > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. $\square$

3.2. **Il caso 2.** Nel Caso 2 risulta che ogni mappa locale ha la forma

$$(z^1, \dots, z^n) \mapsto (f^1, \dots, f^n) = (U^1 z^{\sigma_1}, \dots, U^s z^{\sigma_s}),$$

dove U^j è una mappa unitaria e $(1, \dots, s) \mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_s)$ è una permutazione che soddisfi $k_{\sigma_j} = k_j$ e $m_{\sigma_j} = m_j$ per ogni j.

Riferimenti bibliografici

[1] H. Alexander, *Holomorphic maps from the ball and the polydisc,* Math. Ann **209** (1974), 249–256.

[2] G. Dini, A. Selvaggi Primicerio, *Localization principle of automorphisms on generalized pseudoellipsoids.* J. Geom. Anal. **7** (1997), 575–584.

[3] X Huang, S. Ji, *Global holomorpghic extension of a local map and Riemann mapping theorem for algebraic domains,* Math. Res. Letters **5** (1998), 247–260.

[4] J. Lee, *Pseudo-Einstein structures on CR manifolds,* Amer. J. Math. **110** (1988), no. 1, 157–178.

[5] Pinchuk, S. I. *Analytic continuation of mappings along strictly pseudo-convex hypersurfaces.* (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR **236** (1977), no. 3, 544–547.

[6] H. Poincaré, *Les fonctions analitiques de deux variables et la représentation conforme,* Rend. Circ. Mat. Palermo (1907), 185–220.

[7] Tanaka, N, *On the pseudoconformal geometry of hypersurfaces of the space of n complex variables,* J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 396–429

[8] N. Tanaka, *A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds,* Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University, No. 9. Kinokuniya Book-Store Co., Ltd., Tokyo, 1975.

[9] S. M. Webster, *On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces,* Invent. Math. **43** (1977), no. 1, 53–68.

[10] Webster, S. M. *Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface.* J. Differential Geom. **13** (1978), no. 1, 25–41.