Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2005-06

Alberto Parmeggiani

Positività e geometria dell'insieme caratteristico

11 maggio 2006

ABSTRACT

We give here an overview on certain aspects of positivity estimates of **scalar** mth-order pseudodifferential operators in relation to the geometry of the characteristic set. This talk is based on joint work with C.Parenti and M.Mughetti.

1. Introduzione

Voglio in prima istanza precisare cosa si intende qui per *positività* di un operatore pseudodifferenziale $P = P^*$ di ordine m ($m > 0$ è il caso che ci interessa). Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia $P = P^* \in \mathrm{OPS}^m_{\mathrm{cl}}(X)$ un operatore pseudodifferenziale *classico* (propriamente supportato) su X di ordine m. L'operatore P si dice essere classico se il simbolo (totale) p di P ha lo sviluppo asintotico $p \sim \sum_{j \geq 0} p_{m-j}$, dove $p_{m-j}(x, t\xi) = t^{m-j} p_{m-j}(x, \xi)$, $t > 0$. Diremo qui che P è *positivo se si può trovare un numero $s \geq 0$ tale che per ogni compatto $K \subset X$ esiste una costante $C_K > 0$ tale che*

$$(Pu, u) + C_K \|u\|^2_{(m-s)/2} \geq 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(K). \tag{1}$$

Motiviamo ora la (1).

La prima osservazione è che la (1) vale banalmente con $s = 0$ in virtù della continuità di P tra spazi di Sobolev: si ha infatti

$$|(Pu, u)| \leq C_K \|u\|^2_{m/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(K).$$

Il primo caso interessante con $s > 0$ è dato dalla classica *disuguaglianza di Gårding* (cfr. [1]):

Teorema 1.1. *Se il simbolo principale p_m di P è ellittico positivo allora per ogni compatto $K \subset X$ esistono costanti $c_K, C_K > 0$ tali che*

$$(Pu, u) \geq c_k \|u\|^2_{m/2} - C_K \|u\|^2_{(m-1)/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(K). \tag{2}$$

Ci si pone allora la domanda di cosa succeda quando p_m non è più ellittico. In questo caso Hörmander (cfr. [1]) ha provato ciò che comunemente si chiama *disuguaglianza Sharp-Gårding*:

Teorema 1.2. *Se $p_m \geq 0$ allora per ogni compatto $K \subset X$ esiste $C_K > 0$ tale che*

$$(Pu, u) \geq -C_K \|u\|^2_{(m-1)/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(K). \tag{3}$$

Adesso la domanda è se è possibile ottenere una positività simile alla (3) ma con una costante positiva, cioè del tipo seguente

$$(Pu, u) \geq c_k \|u\|^2_{(m-1)/2} - C_K \|u\|^2_{(m-2)/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(K),$$

con c_K e C_K positive. A questa domanda A.Melin ha risposto con la *disuguaglianza di Melin* (cfr. [1]):

Teorema 1.3. *Se*

$$\begin{cases} p_m \geq 0, \\ p_m(x,\xi) = 0 \Longrightarrow p^s_{m-1}(x,\xi) + \mathrm{Tr}^+ F_{(x,\xi)} > 0, \end{cases} \tag{4}$$

allora per ogni compatto $K \subset X$ esistono costanti $c_K, C_K > 0$ tali che

$$(Pu,u) \geq c_k \|u\|^2_{(m-1)/2} - C_K \|u\|^2_{(m-2)/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(K). \tag{5}$$

Voglio soffermarmi un attimo sugli “invarianti” che sono comparsi fino a questo punto.

- Il primo è il *simbolo principale* p_m di P, il quale è una funzione sulla varietà $T^*X \setminus 0 = X \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.
- Il secondo è il *simbolo sottoprincipale* p^s_{m-1} di P definito da

  $$p^s_{m-1}(x,\xi) = p_{m-1}(x,\xi) + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 p_m}{\partial x_j \partial \xi_j}(x,\xi),$$

  il quale è invariantemente definito sull'insieme dove il simbolo principale ha degli zeri doppi (dove cioè $p_m = 0$ e $dp_m = 0$). Esso è quindi un oggetto naturale associato agli zeri di un simbolo non-negativo. Si ha inoltre che p^s_{m-1} è *reale* se $P = P^*$.
- Il terzo è dato dalla “traccia positiva della matrice fondamentale”. La *matrice fondamentale* (anche *mappa di Hamilton*) appare naturalmente sull'insieme Σ degli zeri doppi di p_m, sottoinsieme dell'**insieme caratteristico** $p_m^{-1}(0)$ di P, come la “simplettizzazione” della matrice Hessiana di p_m : se $\sigma = \sum_{j=1}^n d\xi_j \wedge dx_j$ è la forma simplettica canonica su T^*X, allora per $(x,\xi) \in \Sigma$ si definisce la $F_{(x,\xi)}$ tramite

  $$\sigma(v, F_{(x,\xi)} w) = \frac{1}{2}\langle \mathrm{Hess}(p_m)(x,\xi) v, w\rangle, \quad \forall v,w \in T_{(x,\xi)}T^*X,$$

  cioè

  $$F_{(x,\xi)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \mathrm{Hess}(p_m)(x,\xi).$$

È importante anche notare che la matrice $F_{(x,\xi)}$ è la linearizzazione del campo Hamiltoniano

$$H_{p_m}=\sum_{j=1}^{n}\Big(\frac{\partial p_m}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial p_m}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}\Big),$$

nei punti di Σ. Finalmente la *traccia positiva* è definita da

$$\mathrm{Tr}^+F_{(x,\xi)}=\sum_{\mu>0,\, i\mu\in \mathrm{Spec}(F_{(x,\xi)})}\mu.$$

È importante notare che quando $p_m\geq 0$ allora $\Sigma=p_m^{-1}(0)$ e per $\rho\in\Sigma$ si ha o $\mathrm{Spec}(F_\rho)=\{0\}$ oppure $\mathrm{Spec}(F_\rho)=\{0\}\cup\{\pm i\mu_j;\ \mu_j>0,\ 1\leq j\leq\nu\}$.

Prima di proseguire, è giusto porsi la domanda di quanto le condizioni sufficienti fin qui esposte sono anche necessarie. Il modo di scoprirlo consiste nello scegliere un punto $(x_0,\xi_0)\in T^*X\setminus 0$ con $|\xi_0|=1$ (non è restrittivo in virtù delle "classicità" di P) e quindi una particolare funzione test (wave-packet) della forma

$$u_t(x)=e^{it^2\langle x,\xi_0\rangle}v(t(x-x_0)),\quad v\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ t\geq 1,$$

che si inserisce nella disuguaglianza voluta, prendendo infine il limite per $t\to+\infty$. Si vede allora che

- per quanto riguarda la disuguaglianza Sharp-Gårding una condizione necessaria è che sia $p_m(x_0,\xi_0)\geq 0$ e quindi, data l'arbitrarietà di (x_0,ξ_0), si deduce che deve necessariamente essere $p_m\geq 0$ su $T^*X\setminus 0$;
- per quanto riguarda la disuguaglianza di Melin, si deve ovviamente avere (per il punto precendente) che $p_m\geq 0$ su $T^*X\setminus 0$, ed in più che quando $p_m=0$ allora deve essere $p^s_{m-1}+\mathrm{Tr}^+F\geq 0$. Quest'ultima condizione può essere interpretata come una condizione di non-negatività dell'autovalore minimo dell'operatore ottenuto quantizzando (secondo Weyl) nelle direzioni (t,τ) normali a Σ nel punto $\rho\in\Sigma$ l'approssimazione di Taylor di $p_m+p^s_{m-1}$ data da $\langle \mathrm{Hess}(p_m/2)(\rho)(t,\tau),(t,\tau)\rangle+p^s_{m-1}(\rho)$.

Ora ci chiediamo: si può indebolire la seconda condizione in (4) ad una disuguaglianza ≥ 0? (Del resto ciò è quanto richiesto dalla condizione necessaria). In caso valga

$$\begin{cases} p_m \geq 0, \\ p_m(x,\xi) = 0 \Longrightarrow p^s_{m-1}(x,\xi) + \mathrm{Tr}^+ F_{(x,\xi)} \geq 0, \end{cases} \tag{6}$$

allora dalla disuguaglianza di Melin stessa si ottiene (basta considerare $P + \varepsilon|D|^{m-1}$) che *per ogni* $\varepsilon > 0$, *per ogni compatto* $K \subset X$ *esiste una costante* $C_{\varepsilon,K} > 0$ *tale che*

$$(Pu,u) \geq -\varepsilon\|u\|^2_{(m-1)/2} - C_{\varepsilon,K}\|u\|^2_{(m-2)/2} \geq 0, \quad \forall u \in C_0^\infty(K).$$

Quando si può allora prendere $\varepsilon = 0$? A questo livello si presentano due situazioni.

Quando per il simbolo (totale) vale $p(x,\xi) \geq 0$, senza ipotesi su Σ e P non necessariamente classico, Fefferman e Phong hanno provato la *disuguaglianza di Fefferman-Phong* (cfr. [1]):

Teorema 1.4. *Se* $p \geq 0$ *allora per ogni compatto* $K \subset X$ *esiste* $C_K > 0$ *tale che (consideriamo qui* $P = p^{\mathrm{w}}(x,D)$*, la quantizzazione Weyl di* $p(x,\xi)$*; si noti che quando* p *è reale allora* $P = P^*$*)*

$$(Pu,u) \geq -C_K\|u\|^2_{(m-2)/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(K). \tag{7}$$

D'altra parte Hörmander ha provato, per P classico, che la stima (7) può valere anche quando il simbolo tende a $-\infty$ in certe direzioni caratteristiche. Si ha infatti la seguente *disuguaglianza di Hörmander* (cfr. [1]):

Teorema 1.5. *Se* $p_m \geq 0$*, l'insieme caratteristico* Σ *è una varietà liscia e conica di* $T^*X \setminus 0$*,* $\sigma\big|_\Sigma$ *ha rango costante,* p_m *si annulla esattamente al secondo ordine su* Σ*, e*

$$p^s_{m-1}(x,\xi) + \mathrm{Tr}^+ F_{(x,\xi)} \geq 0, \tag{8}$$

allora per ogni compatto $K \subset X$ *esiste* $C_K > 0$ *tale che*

$$(Pu,u) \geq -C_K\|u\|^2_{(m-2)/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(K). \tag{9}$$

Osservazione 1.1. *Si noti che sia nella disuguaglianza di Fefferman-Phong che nella disuguaglianza di Melin non sono state fatte ipotesi di alcun tipo sull'insieme caratteristico. Si noti anche che la disuguaglianza di Hörmander diventa significativa quando in (8) si suppone che ci siano punti* $\rho \in \Sigma$ *tali che* $p^s_{m-1}(\rho) + \mathrm{Tr}^+ F_\rho = 0$, *altrimenti si può applicare il Teorema di Melin.*

Osservazione 1.2.

- *L'ipotesi che* p_m *si annulli esattamente al secondo ordine su* Σ *si chiama* **trasversa ellitticità di** p_m **rispetto a** Σ *e si riformula nei seguenti due modi (equivalenti):*

$$p_m(x,\xi) \approx |\xi|^m \mathrm{dist}_\Sigma(x, \xi/|\xi|)^2, \tag{10}$$

$$\mathrm{Ker}\, F_\rho = T_\rho\Sigma, \quad \forall \rho \in \Sigma. \tag{11}$$

- *L'ipotesi di costanza del rango di* $\sigma\big|_\Sigma$ *significa che*

$$\mathrm{rango}\, \sigma\big|_{\Sigma,\rho} = \dim\Big(\frac{T_\rho\Sigma}{T_\rho\Sigma \cap T_\rho\Sigma^\sigma}\Big) = \text{costante} \tag{12}$$

(sulle componenti connesse di Σ*) e quindi che* $\dim(T_\rho\Sigma \cap T_\rho\Sigma^\sigma) =: \ell$ *è costante (dove* $T_\rho\Sigma^\sigma$ *indica l'ortogonale rispetto alla forma simplettica* σ*). In particolare si ha che esiste anche un altro intero* ν *tale che*

$$2\nu = \dim\Big(\frac{T_\rho\Sigma^\sigma}{T_\rho\Sigma \cap T_\rho\Sigma^\sigma}\Big),$$

per cui

$$\mathrm{codim}\, \Sigma = 2\nu + \ell, \quad \mathrm{rango}\, \sigma\big|_\Sigma = 2n - 2(\nu + \ell).$$

- *Riguardo la struttura di* $\mathrm{Spec}(F_\rho)$ *si ha che (essendo* $p_m \geq 0$*)*

$$\mathrm{Ker}\, F_\rho \subset \mathrm{Ker}\, F_\rho^2 = \mathrm{Ker}\, F_\rho^3, \quad \text{e} \quad \mathrm{Spec}(F_\rho) = \{0\} \cup \underbrace{\{\pm i\mu_j;\ \mu_j > 0,\ 1 \leq j \leq \nu\}}_{\text{autovalori regolari}}.$$

Si può supporre (non è restrittivo) che l'ordine di P sia 2. L'osservazione fondamentale di Hörmander è usare il *fibrato normale di* Σ, $N\Sigma = TT^*X\big|_\Sigma / T\Sigma \longrightarrow \Sigma$, e la sua complessificazione scritta, usando la F, come somma (simplettico-ortogonale) di Whitney

$${}^{\mathbb{C}}N\Sigma = {}^{\mathbb{C}}\mathrm{Im}(F^2) \oplus {}^{\mathbb{C}}\Big(\frac{\mathrm{Ker}(F^2)}{\mathrm{Ker}\, F}\Big) = (V \oplus \overline{V}) \oplus {}^{\mathbb{C}}W \longrightarrow \Sigma,$$

dove $W \longrightarrow \Sigma$ è un fibrato reale di rango ℓ e $V \longrightarrow \Sigma$ è un fibrato complesso di rango ν tale che

$$V_\rho = \bigoplus_{\mu>0,\, i\mu\in\mathrm{Spec}(F_\rho)} \mathrm{Ker}(F_\rho - i\mu), \quad \rho \in \Sigma.$$

Facendo allora uso dell'algebra lineare simplettica di F_ρ e del Lemma di Morse (cosa possibile in virtù della trasversa ellitticità), si può riscrivere (microlocalmente) p_2 come *somma di quadrati di due famiglie di "campi"*, la prima costruita a partire da sezioni di $V \to \Sigma$ e la seconda costruita a partire da sezioni di $W \to \Sigma$. Si scopre che i commutatori dei primi su Σ contribuiscono esattamente per il termine Tr^+F (mentre i secondi commutano su Σ) e che quindi alla fine P si può scrivere come una somma di quadrati di campi più un operatore di ordine 1 con simbolo non-negativo (una estensione di $p_1^s\big|_\Sigma + \mathrm{Tr}^+F$), al quale si può applicare la disuguaglianza Sharp-Gårding.

Non darò dettagli della dimostrazione del Teorema 1.5 (si veda [1]), ma mi limiterò a discutere un esempio, sperando di chiarire la natura delle ipotesi. Bisogna tenere presente che il problema è introdurre la condizione (8). Consideriamo allora un operatore P di ordine 2 con simbolo $p(x,\xi) = p_2(x,\xi) + p_1(x,\xi) + \ldots$, dove $p_2(x,\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + f(x)^2\xi_3^2$. Supponiamo che $f(x) = 0 \Longrightarrow \nabla f(x) \neq 0$. Allora

$$\Sigma = \{(x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^3 \setminus 0;\ \xi_1 = \xi_2 = f(x) = 0,\ \xi_3 \neq 0\}$$

risulta essere una varietà liscia, e per $\rho = (x_0; 0, 0, \xi_3 \neq 0) \in \Sigma$ si calcola

$$T_\rho\Sigma = \{(\delta x; \delta\xi);\ \langle \nabla f(x_0), \delta x\rangle = 0,\ \delta\xi_1 = \delta\xi_2 = 0\},$$

$$T_\rho\Sigma^\sigma = \{(\delta x', 0; \alpha\nabla f(x_0));\ \delta x' \in \mathbb{R}^2_{(\delta x_1, \delta x_2)},\ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Siccome

$$F_\rho \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta\xi \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} \delta\xi_1 \\ \delta\xi_2 \\ 0 \\ \hline -\langle \nabla f(x_0), \delta x\rangle \xi_3^2 \nabla f(x_0) \end{array}\right],$$

è facile vedere che

$$\mathrm{Ker}\, F_\rho = T_\rho\Sigma, \quad \forall \rho \in \Sigma,$$

da cui segue che l'ipotesi di trasversa ellitticità è soddisfatta. Riguardo all'ipotesi di rango costante di $\sigma\big|_\Sigma$ si vede che essa è soddisfatta se e solo se **una soltanto** delle seguenti alternative vale:

- o $f(x) = 0 \Longrightarrow \nabla_{x'} f(x) \neq 0$, che è il caso in cui $\ell = 1$, $\nu = 1$ e quindi rango $\sigma\big|_\Sigma = 6 - 2(1 + 1) = 2$ (si ha in questo caso $\mathrm{Tr}^+ F_\rho = |\nabla_{x'} f(x)||\xi_3|$);
- oppure $f(x) = 0 \Longrightarrow \nabla_{x'} f(x) = 0$, che è il caso in cui $\ell = 3$, $\nu = 0$ e quindi rango $\sigma\big|_\Sigma = 6 - 6 = 0$ (si ha in questo caso $\mathrm{Tr}^+ F_\rho = 0$).

Il simbolo p_2 va bene come è scritto quando $\ell = 3$ (che è un caso *involutivo*), mentre quando $\ell = 1$ si considerano i campi complessi (costruiti a partire da sezioni del fibrato complesso $V \longrightarrow \Sigma$, quelli i cui commutatori forniscono su Σ il termine $\mathrm{Tr}^+ F$ in virtù del Principio di Indeterminazione; essi sono associati alla "parte simplettica" di Σ)

$$X(x, \xi) = \frac{\langle \nabla_{x'} f(x), \xi' \rangle}{|\nabla_{x'} f(x)|} - i f(x)|\xi_3|,$$

ed i campi reali (costruiti a partire da sezioni del fibrato reale $W \longrightarrow \Sigma$, i cui commutatori su Σ sono zero)

$$Y(x, \xi) = \frac{1}{|\nabla_{x'} f(x)|}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)\xi_1 - \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\xi_2\Big),$$

per i quali vale

$$p_2(x, \xi) = |X(x, \xi)|^2 + Y(x, \xi)^2,$$

che è quindi una decomposizione di p_2 come somma di quadrati con le proprietà richieste. Infatti l'operatore $Q_1 = P - (X^* X + Y^* Y)$ è del primo ordine, con simbolo principale q_1 che si scrive per $\rho \in \Sigma$ come

$$q_1(\rho) = p_1^s(\rho) - \frac{1}{2i}\{\bar{X}, X\}(\rho) = p_1^s(\rho) + |\nabla_{x'} f(x)||\xi_3| = p_1^s(\rho) + \mathrm{Tr}^+ F_\rho \geq 0.$$

(Qui $\{\bar{X}, X\} = \sum_{j=1}^n (\partial_{\xi_j}\bar{X}\partial_{x_j} X - \partial_{x_j}\bar{X}\partial_{\xi_j} X)$ denota la parentesi di Poisson tra $\bar{X}$ e X). Si può allora scegliere $\tilde{Q}_1$ del primo ordine, il cui simbolo principale $\tilde{q}_1$ è non-negativo ovunque (vicino a Σ) e tale che $q_1\big|_\Sigma = \tilde{q}_1\big|_\Sigma$, e deformare i campi X ed Y con operatori di ordine 0, r ed s, in modo tale che $P - (X + r)^*(X + r) - (Y + s)^2 - \tilde{Q}_1$ abbia ordine zero. Utilizzando la disuguaglianza Sharp-Gårding per $\tilde{Q}_1$ si ottiene la disuguaglianza cercata.

Osservazione 1.3. *È chiaramente un problema interessante dare condizioni su P in modo da avere la disuguaglianza di Hörmander con costante positiva, cioè una stima del tipo*

$$(Pu, u) \geq C_K \|u\|^2_{(m-2)/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(K), \ \textit{dove} \ \ C_K > 0.$$

Condizioni sufficienti, nel caso di Σ simplettica, sono state date nel lavoro [6] *in termini della validità della disuguaglianza di Melin per un opportuno sistema indotto su Σ.*

Fino a che punto le ipotesi su Σ di costanza del rango di $\sigma\big|_\Sigma$ e trasversa ellitticità sono "necessarie"?

Nel prossimo paragrafo 2 farò vedere come l'ipotesi di costanza di rango possa essere indebolita, e nel successivo paragrafo 3 discuterò situazioni in cui la trasversa ellitticità non è soddisfatta (in modo "forte" e "debole").

2. Non-costanza del rango della forma simplettica sull'insieme caratteristico

La non-costanza del rango di $\sigma\big|_\Sigma$ nell'esempio considerato alla fine del precedente paragrafo si manifesta col fatto che se in $f^{-1}(0)$ ci sono sia punti nei quali $\nabla_{x'} f \neq 0$ che punti nei quali $\nabla_{x'} f = 0$, allora $\sigma\big|_\Sigma$ passa dall'avere rango 2 all'avere rango 0. Chiamiamo $S = f^{-1}(0)$ (supposta essere una varietà liscia) e supponiamo che ci sia $\emptyset \neq S' \subset S$ tale che $S \setminus S'$ sia denso in S e per il quale si abbia che $\nabla_{x'} f\big|_{S\setminus S'} \neq 0$ e $\nabla_{x'} f\big|_{S'} = 0$. Supponiamo che il campo $\nabla_{x'} f / |\nabla_{x'} f|$ si estenda in maniera C^∞ su S'. Ciò equivale a richiedere (si veda [7]) che $\nabla_{x'} f(x) = \lambda(x) q(x)$ ovunque in S, dove $S \ni x \longmapsto q(x) \in \mathbb{S}^1$ è un campo vettoriale unitario liscio e $\lambda \geq 0$ è in $C^\infty(S)$ e si annulla **solamente** su S'. (Nel modello del paragrafo precedente si può ad esempio prendere $f(x) = x_2^3(x_1^3 + 1) - x_3$, sull'aperto $X = \{x \in \mathbb{R}^3;\ x_1 \neq -1\}$; qui $S' = \{x \in X;\ x_2 = 0\}$). Allora si ha che la disuguaglianza di Hörmander vale per P. Questo fatto è una conseguenza del seguente teorema (cfr. [7]).

Teorema 2.1. *Supponiamo $p_m \geq 0$ sia trasversalmente ellittico. Supponiamo che Σ sia una varietà conica liscia di $T^*X \setminus 0$, e che esista un sottoinsieme conico $\Sigma' \subset \Sigma$ tale che*

$\Sigma \setminus \Sigma'$ sia denso in Σ e sia tale che

$$\begin{cases} \operatorname{rango} \sigma\big|_{\Sigma,\rho} = 2n - 2(\nu + \ell), & \forall \rho \in \Sigma \setminus \Sigma', \\ \operatorname{rango} \sigma\big|_{\Sigma,\rho} < 2n - 2(\nu + \ell), & \forall \rho \in \Sigma'. \end{cases} \tag{13}$$

Si consideri, per $\rho = (x, \xi) \in \Sigma \setminus \Sigma'$ con $|\xi| = 1$ (poi esteso per omogeneità di grado $m-1$),

$$\Pi_+(\rho) := F_\rho \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} (\zeta - F_\rho)^{-1} d\zeta \Big),$$

dove $\Gamma_+ \subset \{\zeta \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im} \zeta > 0\}$ è un opportuno circuito (orientato in senso antiorario) che racchiude gli autovalori $i\mu$ ($\mu > 0$) di F_ρ. Supponiamo che $\Pi_+(\rho)$ possa essere estesa in maniera C^∞ su tutta Σ e che (8) valga. Allora $\Sigma \ni \rho \longmapsto \operatorname{Tr}^+ F_\rho$ è liscia e la disuguaglianza (9) vale.

Osservazione 2.1. *Ci si può domandare allora perché non richiedere direttamente l'estendibilità del proiettore*

$$\Sigma \setminus \Sigma' \ni \rho \longmapsto \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} (\zeta - F_\rho)^{-1} d\zeta.$$

La ragione è che l'estendibilità di

$$\Sigma \setminus \Sigma' \ni \rho \longmapsto \Pi_+(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \zeta (\zeta - F_\rho)^{-1} d\zeta$$

è una condizione più debole, che tuttavia garantisce ancora il controllo della geometria di ${}^{\mathbb{C}}N\Sigma \longrightarrow \Sigma$, la quale, come già detto, permette la scrittura di p_m come somma di quadrati con le proprietà richieste (si veda [7]*).*

L.Hörmander ha osservato (cfr. [2]) che il Teorema 2.1 è un aspetto particolare di un teorema più generale.

Teorema 2.2. *Supponiamo $p_m \geq 0$, trasversalmente ellittico rispetto a Σ, varietà conica e liscia di $T^*X \setminus 0$, e che valga la condizione (8). Supponiamo anche che vicino ad ogni punto $(x_0, \xi_0) \in \Sigma$ ci sia un sottofibrato complesso V di ${}^{\mathbb{C}}TT^*X\big|_\Sigma$ tale che*

(i) *$V_{(x,\xi)}$ contiene gli autovettori di $F_{(x,\xi)}$ corrispondenti agli autovalori con parte immaginaria positiva;*

(ii) *la complessificazione di $\operatorname{Hess}(p_m/2)(x,\xi)$ si annulla su $V_{(x,\xi)}$;*

(iii) *la complessificazione di $\operatorname{Ker} F_{(x,\xi)}$ interseca $V_{(x,\xi)}$ soltanto nell'origine.*

Allora $\mathrm{Tr}^+ F_{(x,\xi)}$ *è liscia su* Σ *e la disuguaglianza (9) vale.*

Quindi il Teorema 2.1, alla luce del Teorema 2.2, dice che, se il numero ν di autovalori della matrice fondamentale è costante su un sottoinsieme aperto denso di Σ, il fibrato $V \longrightarrow \Sigma$ è la chiusura del fibrato generato dagli autovettori corrispondenti e la condizione di estendibilità di Π_+ è necessaria e sufficiente affinché $V \longrightarrow \Sigma$ sia un fibrato C^∞.

Concludo questo paragrafo dando un esempio di operatore che soddisfa, e di uno che non soddisfa, le condizioni espresse dal Teorema 2.1. Consideriamo, con $f \in C^\infty$,

$$p_2(x,\xi) = \xi_1^2 + (f(x_1) + x_2)^2 \xi_2^2.$$

Allora Σ è definita da $\xi_1 = 0$, $x_2 = -f(x_1)$, $\xi_2 \neq 0$, e quindi è una varietà liscia. Quando $|\xi_2| = 1$ e $(x,\xi) \in \Sigma$ si ha che

$$F_{(x,\xi)} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\xi_1 \\ 0 \\ -f'(x_1)\big(f'(x_1)\delta x_1 + \delta x_2\big) \\ -(f'(x_1)\delta x_1 + \delta x_2) \end{bmatrix},$$

per cui l'equazione agli autovalori $F_{(x,\xi)} v = \lambda v$ equivale a

$$\delta_1 = \lambda \delta x_1,\ \ \lambda \delta x_2 = 0,\quad f'(x_1)\big(f'(x_1)\delta x_1 + \delta x_2\big) = -\lambda \delta\xi_1,\ \ f'(x_1)\delta x_1 + \delta x_2 = -\lambda\delta\xi_2.$$

Allora per avere $\lambda \neq 0$ deve essere $f'(x_1) \neq 0$, nel qual caso si ha l'unico autovalore $i|f'(x_1)|$ con parte immaginaria positiva (l'altro autovalore è $-i|f'(x_1)|$) con autovettore corrispondente $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i|f'(x_1)| \\ i \,\mathrm{sgn}\, f'(x_1) \end{bmatrix}$. Il Teorema 2.1 (equivalentemente il Teorema 2.2) vale se e solo se f' ha segno costante vicino ad ogni punto (cioè f è localmente monotona) ed in questo caso $\mathrm{Tr}^+ F_{(x,\xi)} = |f'(x_1)||\xi_2|$.

Un esempio di operatore al quale il teorema non può essere applicato è dato da

$$p_2(x,\xi) = \xi_1^2 + (x_1^{2k} + x_2)^2 \xi_2^2.$$

In questo caso si ha $\mathrm{Tr}^+ F_{(x,\xi)} = 2k|x_1|^{2k-1}|\xi_2|$, che **non** è una funzione liscia nella x_1. La disuguaglianza (9) può tuttavia ancora valere: basta scegliere $p_1(x,\xi)$ in maniera tale che

$$p_2(x,\xi) = 0 \Longrightarrow p_1^s(x,\xi) + \mathrm{Tr}^+ F_{(x,\xi)} > 0,$$

e applicare il Teorema 1.3 (disuguaglianza di Melin).

Di nuovo il punto delicato è permettere punti caratteristici in cui si abbia $p_1^s(x,\xi) + \mathrm{Tr}^+ F_{(x,\xi)} = 0$.

3. Caso di non-trasversa ellitticità

Veniamo ora ad una discussione sull'ipotesi di trasversa ellitticità. Per fissare le idee (si veda [5]) consideriamo una varietà caratteristica liscia Σ che sia *simplettica* (il che equivale a richiedere che in ogni punto $\rho \in \Sigma$ si abbia $T_\rho\Sigma \cap T_\rho\Sigma^\sigma = \{0\}$, o, equivalentemente, che $\sigma\big|_\Sigma$ sia una forma simplettica su Σ). Dire che p_m **non** è trasversalmente ellittico rispetto a Σ equivale a dire che

$$T_\rho\Sigma \subsetneq \mathrm{Ker}\, F_\rho, \quad \text{per qualche } \rho \in \Sigma.$$

Questa è però una condizione troppo generica per sperare di ottenere risultati generali. Ci si è perciò concentrati in [5] su alcune classi di esempi, ed in particolare su classi in cui la trasversa ellitticità non è verificata in maniera "forte" e "debole".

3.1. **Caso di forte non-trasversa ellitticità.** Supponiamo qui che il simbolo principale si annulli nella seguente maniera

$$|p_m(x,\xi)| \lesssim |\xi|^m \Big(\mathrm{dist}_{\Sigma_1}(x,\xi/|\xi|)^{2h} + \mathrm{dist}_{\Sigma_2}(x,\xi/|\xi|)^2\Big), \tag{14}$$

dove Σ_1, Σ_2 sono varietà **involutive** (cioè in ogni punto $\rho \in \Sigma_j$ si ha che $T_\rho\Sigma_j^\sigma \subset T_\rho\Sigma_j$, $j = 1,2$) di codimensione ν con intersezione **trasversa e simplettica** Σ (intersezione trasversa significa che in ogni punto $\rho \in \Sigma$ vale $T_\rho\Sigma_1 + T_\rho\Sigma_2 = \mathbb{R}^n$), e dove $h \geq 2$ è un intero fissato. In questo caso si ha in particolare che

$$\mathrm{Ker}\, F_\rho = T_\rho\Sigma_2, \quad \mathrm{Tr}^+ F_\rho = 0, \quad \forall \rho \in \Sigma.$$

Assumiamo inoltre che il simbolo sottoprincipale si annulli su Σ nella seguente maniera

$$(15) \qquad |p^s_{m-1}(x,\xi)| \lesssim |\xi|^{m-1}\Big(\mathrm{dist}_{\Sigma_1}(x,\xi/|\xi|)^{h-1} + \mathrm{dist}_{\Sigma_2}(x,\xi/|\xi|)\Big),$$

il che fa sì che la condizione (8) sia ovviamente soddisfatta, essendo $p^s_{m-1}(\rho) = \mathrm{Tr}^+ F_\rho = 0$ su Σ in questo caso.

Osservazione 3.1. *Come è provato in* [5], *la condizione di annullamento (15) è* **necessaria** *affinché la stima dal basso (9) valga, almeno nel caso degli operatori differenziali* $P = P^*$ *con varietà caratteristica* $\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{x' = 0\} \cap \{\xi' = 0\}$ *(*$x', \xi' \in \mathbb{R}^\nu$*) e simbolo principale che soddisfa alla (14). Inoltre, sempre in* [5], *si vede che ordini di annullamento di* p^s_{m-1} *più alti (in* dist_{Σ_1}*) danno luogo alla stima (9) senza ulteriori condizioni (ciò è dovuto alla disuguaglianza di Fefferman-Phong).*

Infine è importante osservare che la classe di operatori pseudodifferenziali classici i cui simboli principali e sottoprincipali soddisfano le stime di annullamento (14) e (15), studiata da M.Mughetti in [3], *è* **invariante***: essa è stabile rispetto alla coniugazione con operatori integrali di Fourier ellittici.*

Un modello tipico di questa situazione è il seguente. Si prende $X = \mathbb{R}^\nu_{x'} \times \mathbb{R}_{x''}$, $\Sigma_1 = \{x' = 0\}$, $\Sigma_2 = \{\xi' = 0\}$, e $(D = -i\partial)$

$$(16) \qquad P = \sum_{j=1}^{\nu} D^2_{x'_j} + \sum_{|\alpha|=2h} c_\alpha x'^\alpha D^2_{x''} + \sum_{j=1}^{\nu} a_j(x',x'') D_{x'_j} + b(x',x'') D_{x''} + r(x',x''),$$

dove a_j, b, r sono C^∞ e

$$(17) \qquad \sum_{|\alpha|=2h} c_\alpha x'^\alpha > 0, \quad \forall x' \neq 0.$$

Assumendo (come abbiamo sempre fatto) che $P = P^*$, si ha che la condizione di Melin (8) assume qui la forma

$$(18) \qquad b(0,x'') = 0, \quad \forall x''.$$

La (18) deriva dal fatto che, essendo $\mathrm{Tr}^+ F_\rho = 0$, con $\rho = (0,x''; 0,\xi'' \neq 0) \in \Sigma$, richiedere la (8) equivale a richiedere

$$p^s_1(\rho) + \mathrm{Tr}^+ F_\rho = p^s_1(\rho) = b(0,x'')\xi'' \geq 0, \ \forall \xi'' \neq 0, \ \forall x''.$$

D'altra parte si vede che, come ricordato nell'Osservazione 3.1, per avere (9) occorre che sia, di più,

$$|b(x', x'')| \leq c|x'|^{h-1}, \quad x' \text{ vicino a } 0.$$

Ma anche quest'ultima condizione non basta. Si vede infatti che per avere la disuguaglianza di Hörmander (9) occorre sia verificata anche una ulteriore condizione necessaria spettrale:

$$(P_\rho f, f)_{L^2(\mathbb{R}^\nu)} \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu), \quad \forall \rho = (0, x'', 0, \xi'') \in \Sigma, \tag{19}$$

dove P_ρ è l'*operatore localizzato* di P in ρ:

$$P_\rho = \sum_{j=1}^{\nu} D^2_{x'_j} + \sum_{|\alpha|=2h} c_\alpha x'^\alpha |\xi''|^2 + \sum_{|\beta|=h-1} \frac{1}{\beta!}(\partial^\beta_{x'} b)(0, x'')x'^\beta \xi''.$$

È ben noto che in virtù della (17) P_ρ, come operatore non-limitato su $L^2(\mathbb{R}^\nu)$, è autoaggiunto con spettro discreto *limitato dal basso*, costituito da autovalori, di molteplicità finita, che divergono a $+\infty$. Si può pertanto definire

$$\lambda(\rho) := \min \operatorname{Spec}(P_\rho), \quad \rho \in \Sigma.$$

Richiedere perciò che $P_\rho \geq 0$ equivale a richiedere che $\lambda(\rho) \geq 0$ su Σ, che è quindi una condizione *più forte* che richiedere la (8) (che, come già osservato, nelle nostre ipotesi è automaticamente soddisfatta).

Osservazione 3.2. *Per ottenere la condizione necessaria (19) si considera la disuguaglianza (9) (nel caso generale si appiattisce la Σ nella varietà $\{x' = \xi' = 0, \xi'' \neq 0\}$; qui si usa l'invarianza della classe) avendo scelto la funzione test*

$$u_t(x) := e^{it^{h+1}\langle x'', \xi''_0\rangle} v_1(tx')v_2(t(x'' - x''_0)), \quad t \gg 1,$$

dove $v_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^\nu_{x'})$, $v_2 \in C_0^\infty(|x''| < 1)$, con $\|v_2\| = 1$. Si prende poi il limite per $t \to +\infty$.

Ma allora, almeno quando $\nu = 1$, è facile costruire modelli del tipo (16) per i quali la disuguaglianza (9) non può valere. Per esempio

$$P = D^2_{x'} + cx'^{2h} D^2_{x''} + bx'^{h-1} D_{x''}, \quad c > 0, \ b \in \mathbb{R},$$

con

- $|b| > h\sqrt{c}$, quando h è **dispari**,
- oppure $|b| > (h+1)\sqrt{c}$, quando h è **pari**,

non può soddisfare la disuguaglianza (9), in quanto in questo caso $\lambda(\rho)$ è *negativo* da qualche parte su Σ (ed in effetti lo è ovunque).

È importante notare che se $\lambda(\rho) > 0$ su Σ, allora, come provato da Mughetti in [4], si ha la seguente *disuguaglianza anisotropa di Melin* (che implica la (9)): *per ogni compatto $K \subset X$ ci sono costanti $c_K, C_K > 0$ tali che*

$$(Pu, u) \geq c_K \|u\|^2_{m/2-h/(h+1)} - C_K \|u\|^2_{(m-2)/2}, \quad \forall u \in C_0^\infty(K).$$

Di nuovo il caso delicato è quando $\lambda(\rho) \geq 0$ su Σ e $\lambda(\rho) = 0$ per qualche $\rho \in \Sigma$.

Un fatto sorprendente è che la validità della (9), sotto l'ipotesi $\lambda(\rho) \geq 0$ su Σ, dipenda dalla parità di h. Per l'esempio (16), quando h è dispari ($P = P^*$) e $\lambda(\rho) \geq 0$ su Σ allora (9) vale, mentre quando h è pari ($P = P^*$), $\lambda(\rho) \geq 0$ su Σ e $\lambda(\rho) = 0$ per certi $\rho \in \Sigma$, allora in generale la (9) **non** vale. Per esempio, si prenda h pari e si consideri

$$P = D^2_{x'} + c{x'}^{2h} D^2_{x''} + (b{x'}^{h-1} - d{x'}^h) D_{x''}, \quad c, d > 0, \ b \in \mathbb{R},$$

con $|b| = (h+1)\sqrt{c}$. In questo caso $\lambda(\rho) \equiv 0$ su Σ e la disuguaglianza di Hörmander non vale a causa della presenza di una ulteriore condizione necessaria di segno di un altro operatore modello P'_ρ, una opportuna approssimazione di "ordine più alto" su Σ del simbolo di P, il quale deve essere ≥ 0 su $\mathrm{Ker}(P_\rho)$. Nel caso che stiamo considerando si ha che in $\rho = (0, x'', 0, \xi'' = 1)$

$$P'_\rho = -d{x'}^h, \quad \text{e} \quad (P'_\rho \phi, \phi)_{L^2(\mathbb{R})} < 0, \quad \forall \phi \in \mathrm{Ker}\, P_\rho \setminus \{0\}.$$

Concludo questo paragrafo con l'enunciato che fornisce una condizione sufficiente nel caso h dispari.

Teorema 3.1. *Sia $h \geq 3$ dispari. Supponiamo che p_m e p^s_{m-1} soddisfino le stime di annullamento (14) e (15) e che, di più, valga*

$$p_m(x,\xi) \gtrsim |\xi|^m \Big(\mathrm{dist}_{\Sigma_1}(x, \xi/|\xi|)^{2h} + \mathrm{dist}_{\Sigma_2}(x, \xi/|\xi|)^2 \Big). \tag{20}$$

(La condizione (20) è la (17) dell'esempio. Essa, come già detto, garantisce che P_ρ abbia spettro limitato dal basso e discreto). Si supponga inoltre che

- $$(P_\rho f, f)_{L^2(\mathbb{R}^\nu)} \geq 0, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^\nu), \quad \forall \rho \in \Sigma,$$

- l'autovalore minimo $\lambda(\rho)$ di P_ρ si annulli per qualche $\rho \in \Sigma$,

- $$\begin{cases} \text{se } \nu > 1 \text{ si abbia } p_m(x,\xi) = q_1(x,\xi) + q_2(x,\xi), \\ \text{dove} \\ q_1(x,\xi) \approx |\xi|^m \mathrm{dist}_{\Sigma_1}(x, \xi/|\xi|)^{2h}, \ q_2(x,\xi) \approx |\xi|^m \mathrm{dist}_{\Sigma_2}(x, \xi/|\xi|)^2. \end{cases}$$

Allora la disuguaglianza di Hörmander (9) vale.

La condizione sul simbolo principale quando $\nu > 1$ è dovuta ad un punto tecnico che richiede la stessa parità delle autofunzioni di P_ρ nei punti in cui $\lambda(\rho) = 0$. In generale, se $\nu > 1$ e p_m non ha la forma richiesta, l'operatore localizzato P_ρ è un operatore strettamente relato ad un operatore di Schrödinger *con campo magnetico*, e quindi con autovalore minimo che può avere molteplicità maggiore di 1 e con relativo autospazio che potrebbe perciò contenere sia autofunzioni pari che autofunzioni dispari (ciò genera, come visto in [5], una ostruzione nella prova per l'ottenimento della (9)). Lo studio della molteplicità dell'autovalore minimo, e dello spettro in generale, di operatori di Schrödinger magnetici è un campo di ricerca molto attiva.

3.2. **Caso di debole non-trasversa ellitticità.** In questo caso, completamente differente dal precedente di forte non-trasversa ellitticità, consideriamo un operatore classico $P = P^*$ del secondo ordine il cui simbolo principale p_2 si scrive nella maniera seguente

$$p_2(x,\xi) = q_1(x,\xi) + \psi(x,\xi)^{2k} q_2(x,\xi) + \tilde{p}_2(x,\xi),$$

dove

- la varietà caratteristica Σ è intersezione **trasversa e simplettica** di varietà Σ_1, Σ_2 C^∞ e coniche di $T^*X \setminus 0$ tali che
  - o Σ_1, Σ_2 sono **simplettiche**
  - oppure Σ_1, Σ_2 sono **involutive** con la stessa codimensione;

- $\tilde{p}_2 \geq 0$ si annulla **soltanto** su Σ di ordine ≥ 4,
- $q_j(x,\xi) \approx |\xi|^2 \mathrm{dist}_{\Sigma_j}(x,\xi/|\xi|)^2$, $j=1,2$,
- la funzione ψ è C^∞, a valori reali, positivamente omogenea di grado 0, tale che $\Sigma \cap \psi^{-1}(0) =: \Sigma'$ è C^∞,
- e, infine, $k \geq 1$ è un intero.

In questo caso è $p_2^{-1}(0) = \Sigma$ e

$$\begin{cases} \operatorname{Ker} F_\rho = T_\rho\Sigma, & \rho \in \Sigma \setminus \Sigma', \\ \operatorname{Ker} F_\rho = T_\rho\Sigma_1, & \rho \in \Sigma'. \end{cases}$$

La trasversa ellitticità non sussiste quando si è sulla varietà Σ' e l'attributo "debole" è riferito al fatto che Σ' è una varietà C^∞. Il problema è allora vedere se la condizione di Melin (8) è sufficiente per avere la (9).

Quando Σ_1, Σ_2 sono *involutive* e k è **pari** la risposta è affermativa, mentre se k è **dispari** non conosciamo la risposta (si nota in questo caso che $\mathrm{Tr}^+ F_\rho$ **non** è una funzione liscia su Σ). Quando k è pari, una estensione dell'approccio di Hörmander rende ancora possibile lo scrivere il simbolo $q_1 + \psi^{2k} q_2$ come somma di quadrati con le proprietà viste prima, e quindi concludere come nella prova del Teorema 1.5.

Quando Σ_1, Σ_2 sono *simplettiche*, la risposta è affermativa (senza condizioni sulla partità di $k \geq 1$) assumendo però in più le condizioni

- $\psi^{-1}(0)$ è **trasversa** a Σ,
- $T_\rho \Sigma_1^\sigma \subset T_\rho \Sigma_2$, per tutti i $\rho \in \Sigma'$.

Non è affatto chiaro se queste ultime condizioni sono anche necessarie. È importante notare che in generale

$$\mathrm{Tr}^+ F_\rho > \mathrm{Tr}^+ F_{q_1}(\rho) + \psi(\rho)^{2k} \mathrm{Tr}^+ F_{q_2}(\rho), \quad \rho \in \Sigma \setminus \Sigma',$$

come si può facilmente vedere nell'esempio (che soddisfa alle condizioni esposte sopra)

$$\xi_1^2 + (x_1 + x_3^2 x_2)^2 |\xi|^2 + x_3^{2k}\bigl(\xi_2^2 + (x_2 + x_3 x_1)^2 |\xi|^2\bigr), \quad X = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_3 < 1\}.$$

Ciò suggerisce che l'idea naive di usare l'approccio di Hörmander per scrivere ogni pezzo q_1 e q_2 come somma di quadrati (con le proprietà volute) in generale dissipa una parte dell'informazione e non dà il risultato sotto l'ipotesi "ottimale" (8). Questo sarebbe possibile se fosse $T_\rho\Sigma_1^\sigma \subset T_\rho\Sigma_2$ per tutti i $\rho \in \Sigma$ in un intorno di Σ'. Quando quest'ultimo fatto è verificato soltanto su Σ', le ipotesi nelle quali ci siamo messi rendono possibile lo riscrivere $q_1 + \psi^{2k} q_2$ come una nuova somma $\tilde{q}_1 + \psi^{2k}\tilde{q}_2$, con $\tilde{q}_j(x,\xi) \approx |\xi|^2 \mathrm{dist}_{\tilde{\Sigma}_j}(x, \xi/|\xi|)^2$, $j = 1,2$ dove $\tilde{\Sigma}_1$ e $\tilde{\Sigma}_2$ sono nuove varietà simplettiche tali che ancora $\tilde{\Sigma}_1 \cap \tilde{\Sigma}_2 = \Sigma$ (con intersezione trasversa) ma di più con $T_\rho\tilde{\Sigma}_1^\sigma \subset T_\rho\tilde{\Sigma}_2$ in un intorno di Σ' (in Σ), il che permette di concludere di nuovo come nella prova del Teorema 1.5.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Hörmander. The Analysis of Linear Partial Differential Operators - Vol. III, Grundlehren der Math. Wiss. vol. 274, Springer-Verlag, New York (1985).

[2] L. Hörmander. Corrispondenza personale (Maggio 2005).

[3] M. Mughetti. *A problem of transversal anisotropic ellipticity.* Rendiconti Seminario Matematico Univ. Padova **106** (2001), 111–142.

[4] M. Mughetti. *On the Cauchy problem for a class of linear weakly hyperbolic operators.* Comm. Partial Differential Equations **28** (2003), 1641–1660.

[5] M. Mughetti, C. Parenti e A. Parmeggiani. *Lower Bound Estimates Without Transversal Ellipticity.* Preprint (2006).

[6] C. Parenti, A. Parmeggiani. *On the hypoellipticity with a big loss of derivatives.* Kyushu Journal of Mathematics **59** (2005), 155–230.

[7] C. Parenti, A. Parmeggiani. *A Remark on the Hörmander Inequality.* Comm. Partial Differential Equations **31** (2006), 1071–1084.