Seminario di Analisi Matematica
Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2006-07

Andrea Pascucci

Problema con ostacolo e arresto ottimo con applicazioni in finanza

1 marzo 2007

Abstract

Let L be an ultra-parabolic operator of Kolmogorov type with continuous and bounded coefficients. We prove that the obstacle problem for L with Cauchy (or Cauchy-Dirichlet) boundary conditions has a unique strong solution u. Moreover we show that u solves an optimal stopping problem and admits a Feynman-Kač representation formula.

1. Introduzione

Presentiamo alcuni risultati ottenuti in [9], in collaborazione con Di Francesco e Polidoro, e in [34].

Dato un operatore differenziale del second'ordine su un dominio e assegnate delle condizioni al bordo, il problema dell'ostacolo consiste nel determinare la più piccola soprasoluzione maggiore di una data funzione, detta ostacolo. Questo problema interviene in alcune applicazioni in fisica e biologia; inoltre in finanza appare nello studio dei cosiddetti "contratti derivati di tipo Americano".

I nostri principali risultati riguardano l'esistenza e unicità della soluzione forte del problema di Cauchy o Cauchy-Dirichlet relativo alla disequazione differenziale

$$\max\{Lu + au - f, \varphi - u\} = 0. \tag{1}$$

In (1) L indica un operatore ultra-parabolico di tipo Kolmogorov a coefficienti continui e limitati (in C_b), $a, f \in C_b$ e la funzione "ostacolo" φ è Lipschitziana e convessa (in un senso debole che specificheremo in seguito). Inoltre proviamo che la soluzione u ammette la seguente rappresentazione[1] in termini di soluzione del problema di arresto ottimo:

$$u(t, X_t) = \sup_{\tau \geq t} E\left[\varphi(X_\tau)\right], \tag{2}$$

dove X indica il processo di diffusione associato all'operatore L e τ varia nell'insieme dei tempi di arresto maggiori o uguali a t.

È noto che, anche nel caso classico uniformemente parabolico, l'equazione (1) non ammette in generale soluzioni regolari (di classe C^2) ed è quindi necessario considerare una formulazione debole del corrispondente problema di Cauchy-Dirichlet. In letteratura sono note tecniche per provare l'esistenza di soluzioni in senso *variazionale* (cf., per esempio, Bensoussan e Lions [4], Kinderlehrer e Stampacchia [24]), in senso *forte* (cf., per esempio, Friedman [14], [15]) e, più recentemente, in senso *viscoso* (cf., per esempio, Fleming e Soner [11], Barles [1]).

[1] Qui consideriamo per semplicità solo il caso $a = f = 0$.

Qui intendiamo utilizzare un classico metodo di penalizzazione che permette di provare l'esistenza di una soluzione forte come limite di soluzioni di un'opportuna classe di problemi *non-lineari*. Questa tecnica risulta vantaggiosa in quanto fornisce risultati di esistenza e regolarità della soluzione del problema in forma *non variazionale* (così come appare in molte applicazioni) che risultano appropriati per lo studio del problema di arresto ottimo (2).

Per quanto riguarda le applicazioni in finanza, supponiamo che X_t indichi il prezzo, al tempo t, di un titolo rischioso descritto da un opportuno processo di diffusione: la (2) definisce il valore di un contratto finanziario (per esempio, un'opzione) che, esercitato al tempo t, frutta al possessore un "premio" pari a $\varphi(X_t)$. Precisamente la (2) *definisce il valore dell'opzione in termini di media dei premi che si ottengono esercitando nel momento ottimale.* Una teoria rigorosa della valutazione di questo tipo di opzioni, comunemente denominate di tipo Americano, è relativamente recente ed è stata sviluppata a partire dai lavori di Bensoussan [3] e Karatzas [22] che hanno determinato formule di valutazione con metodi probabilistici basati sugli inviluppi di Snell e da Jaillet, Lamberton e Lapeyre [20] con metodi variazionali.

Tuttavia esistono diversi tipi di opzioni Americane, normalmente trattati sui mercati finanziari, per cui il processo X è associato ad un operatore di tipo Kolmogorov che non è uniformemente parabolico: si tratta generalmente di *modelli con memoria*, che incorporano una dipendenza dal passato attraverso una o più variabili di stato (tipicamente, medie di prezzi su un certo periodo). Due esempi notevoli, sono le *opzioni Asiatiche* e alcuni modelli di *volatilità stocastica* (cf. per esempio, Hobson e Rogers [17], Di Francesco e Pascucci [7], Foschi e Pascucci [13]). In letteratura esistono numerosi lavori sulla valutazione di opzioni Asiatiche Americane: Barraquand e Pudet [2], Barles [1], Hansen e Jorgensen [16], Meyer [30], Wu, You e Kwok [41], Jiang e Dai[21], Peskir e Shiryaev [35], Marcozzi [29], Dai e Kwok [6], Huang e Thulasiram [19]. Tuttavia la maggior parte di questi articoli sono dedicati a questioni numeriche (approssimazione del prezzo e del tempo ottimale d'esercizio, corrispondente alla soluzione numerica di un problema a frontiera libera): al momento una teoria dell'esistenza, unicità e regolarità delle soluzioni è disponibile solo nel caso uniformemente parabolico ed è basata sui risultati classici di Bensoussan e Lions

[4], Friedman [15] e van Moerbeke [39], [40]. Alcuni risultati più generali di esistenza e di approssimazione numerica sono stati ottenuti da Barles [1], Jiang e Dai [21] nell'ambito della teoria delle soluzioni viscose: tuttavia questi non forniscono stime adeguate degli errori e della velocità di convergenza. In effetti, in vista dell'utilizzo di metodi numerici standard come per esempio schemi alle differenze finite, lo studio dell'esistenza di soluzioni in senso forte sembra la scelta più naturale.

2. Ipotesi e risultati preliminari

Consideriamo un operatore di Kolmogorov in $\mathbb{R}^{N+1}$ della forma

$$Lu(z) := \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(z)\partial_{x_i x_j} u(z) + \sum_{i=1}^{m} b_i(z)\partial_{x_i} u(z) + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} u(z) - \partial_t u(z)$$

dove $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $1 \leq m \leq N$, e $b_{ij} \in \mathbb{R}$, per ogni $i,j = 1,\dots,N$. Assumiamo inoltre:

H1: i coefficienti $a_{ij} = a_{ji}$ e b_i sono funzioni continue e limitate per ogni $i,j = 1,\dots,m$ ed esiste una costante positiva Λ tale che

$$\Lambda^{-1}|\zeta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(z)\zeta_i\zeta_j \leq \Lambda|\zeta|^2, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R}^{N+1};$$

H2: l'operatore a coefficienti costanti

$$Ku := \sum_{i=1}^{m} \partial_{x_i x_i} u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u \tag{1}$$

è ipoellittico.

Ricordiamo (cf. [25]) che **H2** è equivalente alla condizione di Hörmander [18]

$$\text{rank Lie}\,(\partial_{x_1},\dots,\partial_{x_m},Y)(z) = N+1, \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^{N+1}$$

dove

$$Y := \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i \partial_{x_j} - \partial_t.$$

Inoltre nell'ipotesi **H2** esiste una base di $\mathbb{R}^N$ rispetto alla quale B assume la forma

$$\begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & B_r \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix} \tag{2}$$

dove B_j è una matrice $m_{j-1} \times m_j$ di rango m_j, con

$$m =: m_0 \geq m_1 \geq \ldots \geq m_r \geq 1, \qquad m_0 + m_1 + \ldots + m_r = N,$$

e $*$ sono blocchi arbitrari (e costanti).

Sin dai lavori di Folland [12], Rothschild e Stein [37], Nagel, Stein e Wainger [32] è noto che l'ambito naturale per lo studio delle proprietà di regolarità di operatori di Hörmander è l'analisi sui gruppi di Lie. Lanconelli e Polidoro in [25] hanno determinato la struttura di gruppo associata ad operatori di Kolmogorov e hanno provato che K in (1) è invariante per traslazioni rispetto alla legge

$$(\xi, \tau) \circ (x, t) = (x + E(t)\xi, t + \tau),$$

dove $E(t) = e^{-tB^T}$ e B^T indica la trasposta di B. Inoltre, nel caso in cui i blocchi $*$ in (2) siano nulli, l'operatore in (1) è anche omogeneo di grado due rispetto alla famiglia di dilatazioni in $\mathbb{R}^{N+1}$

$$D(\lambda) = \mathrm{diag}(\lambda I_{m_0}, \lambda^3 I_{m_1}, \ldots, \lambda^{2r+1} I_{m_r}, \lambda^2)$$

dove I_{m_j} indica la matrice identità $m_j \times m_j$. Indichiamo con

$$Q + 2 = m_0 + 3m_1 + \ldots + (2r+1)m_r + 2$$

la dimensione omogenea di $\mathbb{R}^{N+1}$ e con $\|\cdot\|$ una norma omogenea rispetto a $D(\lambda)$.

Dati un dominio limitato Ω di $\mathbb{R}^{N+1}$ e $p \geq 1$, poniamo

$$\mathcal{S}^p(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j} u, Yu \in L^p(\Omega), i, j = 1, \ldots, m\}$$

e

$$\|u\|_{\mathcal{S}^p(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m} \|\partial_{x_i} u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{m} \|\partial_{x_i x_j} u\|_{L^p(\Omega)} + \|Yu\|_{L^p(\Omega)}.$$

Inoltre indichiamo rispettivamente con $C_B^{\alpha}(\Omega)$, $C_B^{1,\alpha}(\Omega)$ e $C_B^{2,\alpha}(\Omega)$ gli spazi di funzioni Hölderiane definiti dalle seguenti norme:

$$\|f\|_{C_B^{\alpha}(\Omega)} = \sup_{\Omega} |f| + \sup_{\substack{z,\zeta,\in\Omega \\ z\neq\zeta}} \frac{|f(z) - f(\zeta)|}{\|z^{-1} \circ z\|^{\alpha}},$$

$$\|f\|_{C_B^{1,\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{C_B^{\alpha}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{m} \|\partial_{x_i} f\|_{C_B^{\alpha}(\Omega)},$$

$$\|f\|_{C_B^{2,\alpha}(\Omega)} = \|f\|_{C_B^{1,\alpha}(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{m} \|\partial_{x_i x_j} f\|_{C_B^{\alpha}(\Omega)} + \|Yf\|_{C_B^{\alpha}(\Omega)}.$$

Nello studio del problema con ostacolo, i teoremi di immersione e le stime interne seguenti giocano un ruolo cruciale. Questi risultati sono stati provati in diversi lavori: nel caso omogeneo, da Bramanti, Cerutti e Manfredini [5], Manfredini e Polidoro [28], Manfredini [27]; sono estesi al caso non-omogeneo in [9]. Le stime interne di Schauder sono state provate da Di Francesco e Polidoro [10]. Nelle seguenti disuguaglianze, O indica un dominio contenuto con la sua chiusura in Ω e c una costante che dipende solo da L, Ω, O e $p > 1$; solo nella (5) la costante c dipende anche da $\|a_{ij}\|_{C_B^{\alpha}(\Omega)}$ e $\|b_i\|_{C_B^{\alpha}(\Omega)}$.

- *Stime interne in $\mathcal{S}^p$:*

$$\|u\|_{\mathcal{S}^p(O)} \leq c \left(\|Lu\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \right). \tag{3}$$

- *Teorema di immersione:*

$$\|u\|_{C_B^{1,\alpha}(O)} \leq c\|u\|_{\mathcal{S}^p(\Omega)}, \qquad \alpha = 1 - \frac{Q+2}{p},\ p \geq Q+2. \tag{4}$$

- *Stime interne di tipo Schauder:*

$$\|u\|_{C_B^{2,a}(O)} \leq c \left(\sup_{\Omega} |u| + \|f\|_{C_B^{\alpha}(\Omega)} \right). \tag{5}$$

3. Problema con ostacolo

Consideriamo il problema

$$
\begin{cases} \max\{Lu + au - f, \varphi - u\} = 0, & \text{in } H(T) := H\times]0,T[, \\ u|_{\partial_P H(T)} = g, \end{cases} \tag{1}
$$

dove H è un dominio limitato di $\mathbb{R}^N$ e

$$
\partial_P H(T) := \partial H(T) \setminus (H \times \{T\})
$$

è il bordo parabolico di $H(T)$. Diciamo che $u \in \mathcal{S}^1_{\mathrm{loc}}(H(T)) \cap C(\overline{H(T)})$ è una soluzione forte di (1) se la disequazione differenziale è soddisfatta q.o. in $H(T)$ e il dato al bordo è assunto puntualmente.

Nel seguito supponiamo che $H(T)$ sia regolare nel senso che in ogni punto del bordo parabolico esiste una funzione barriera:

H3: per ogni $\zeta \in \partial_P H(T)$ esiste un intorno V di ζ e una funzione C^2

$$
w : V \cap \overline{H(T)} \to \mathbb{R},
$$

tale che

i) $Lw \le -1$ in $V \cap H(T)$;

ii) $w(z) > 0$ in $V \cap \overline{H(T)} \setminus \{\zeta\}$ e $w(\zeta) = 0$.

Ora enunciamo l'ipotesi sulla funzione ostacolo φ.

H4: φ è Lipschitziana su $\overline{H(T)}$ ed esiste una costante $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$
\sum_{i,j=1}^{m} \zeta_i \zeta_j \partial_{x_i x_j} \varphi \ge C|\zeta|^2, \qquad \text{in } H(T),\ \zeta \in \mathbb{R}^m, \tag{2}
$$

in senso distribuzionale, ossia

$$
\sum_{i,j=1}^{m} \zeta_i \zeta_j \int_{H(T)} \partial_{x_i x_j} \psi(z) \varphi(z) dz \ge C|\zeta|^2 \int_{H(T)} \psi(z) dz,
$$

per ogni $\psi \in C_0^\infty(H(T)), \psi \ge 0$ e $\zeta \in \mathbb{R}^m$.

Notiamo esplicitamente che le funzioni C^2 soddisfano l'ipotesi **H4**, così come le funzioni Lipschitziane che sono convesse rispetto alle prime m variabili.

Teorema 3.1. *Siano $g \in C(\partial_P H(T))$, $g \geq \varphi|_{\partial_P H(T)}$, e $f, a \in C \cap L^\infty(H(T))$. Allora esiste una soluzione forte u del problema (1). Inoltre, per ogni $p > 1$ e O, sottoinsieme compatto di $H(T)$, esiste una costante positiva c, che dipende solo da $L, O, H(T), p$ e dalle norme L^∞ di f, g, φ e a, tale che*

$$\|u\|_{\mathcal{S}^p(O)} \leq c.$$

Proviamo il Teorema 3.1 utilizzando un metodo classico di penalizzazione. Consideriamo una famiglia $(\beta_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0,1[}$ di funzioni regolari: ogni β_ε è una funzione crescente e limitata insieme con la sua derivata del prim'ordine; inoltre $\beta_\varepsilon(0) = 0$,

$$\beta_\varepsilon(s) \leq \varepsilon, \quad s > 0, \qquad \text{e} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \beta_\varepsilon(s) = -\infty, \quad s < 0.$$

Per $\delta \in]0, 1[$, indichiamo con L^δ l'operatore con i coefficienti regolarizzati. Inoltre φ^δ (rispettivamente, a^δ, f^δ) indica la regolarizzata di φ (risp. a, f). Poiché $g \geq \varphi$ in $\partial_P H(T)$ abbiamo

$$g^\delta := g + \lambda\delta \geq \varphi^\delta, \qquad \text{in } \partial_P H(T),$$

dove λ è la costante di Lipschitz di φ. Il teorema seguente garantisce l'esistenza di una soluzione classica del problema penalizzato

$$\begin{cases} L^\delta u + a^\delta u = f^\delta + \beta_\varepsilon(u - \varphi^\delta), & \text{in } H(T), \\ u|_{\partial_P H(T)} = g^\delta. \end{cases}$$

Ricordiamo che un problema quasi-lineare per operatori di Kolmogorov omogenei è stato provato da Lascialfari e Morbidelli [26].

Teorema 3.2. *Siano $g \in C\left(\partial_P H(T)\right)$ e $h = h(z, u)$ una funzione Lipschitziana su $\overline{H(T)} \times \mathbb{R}$. Esiste una soluzione $u \in C_B^{2,\alpha}(H(T)) \cap C(\overline{H(T)})$ del problema*

(3)
$$\begin{cases} L^\delta u = h(\cdot, u), & \text{in } H(T), \\ u|_{\partial_P H(T)} = g. \end{cases}$$

Inoltre

$$\sup_{H(T)} |u| \leq e^{cT}(1 + \|g\|_{L^\infty}).$$

con c che dipende solo da L, h e $H(T)$.

Dimostrazione. Proviamo la tesi con un metodo di iterazione monotona: per una presentazione generale di questa tecnica si veda, per esempio, Wu, Yin e Wang [42]. L'idea è che se u_0 è una sopra-soluzione del problema, allora è possibile determinare una costante opportuna λ tale che la successione (u_j), definita ricorsivamente mediante

$$\begin{cases} L^\delta u_j - \lambda\, u_j = h(\cdot, u_{j-1}) - \lambda\, u_{j-1}, & \text{in } H(T), \\ u_j|_{\partial_P H(T)} = g, \end{cases} \tag{4}$$

per il principio del massimo, verifichi la relazione

$$-u_0 \le u_{j+1} \le u_j \le u_0, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Ricordiamo che una soluzione $u_j \in C^\alpha_B(H(T)) \cap C(\overline{H(T)})$, $\alpha \in]0,1]$, del problema di Cauchy-Dirichlet (4) esiste per il Teorema 4.1 in [10].

Ora una sopra-soluzione di (3) è data da

$$u_0(x,t) = e^{ct}\left(1 + \|g\|_\infty\right), \tag{6}$$

dove c è una costante che dipende solo da h. Indichiamo con u il limite puntuale della successione (u_j) definita a partire da u_0 in (6). Per la (5) la successione (u_j) è uniformemente limitata in senso puntuale: dunque è anche uniformemente limitata in $\mathcal{S}^p_{\text{loc}}$ per la (3), in $C^{1,\alpha}_{B,\text{loc}}$ per la (4), in $C^{2,\alpha}_{B,\text{loc}}$ per la (5). Pertanto, a meno di sotto-successioni, (u_j) converge localmente in norma $C^{2,\alpha}_B$ e passando al limite in (4) per $j \to \infty$, si ottiene

$$L^\delta u = h(\cdot, u), \qquad \text{in } H(T).$$

Per quanto riguarda l'assunzione del dato al bordo, si utilizza un argomento standard basato sull'esistenza delle funzioni barriera. □

Dimostrazione del Teorema 3.1. Applicando il Teorema 3.2 con la scelta

$$h(\cdot, u) = f^\delta + \beta_\varepsilon(u - \varphi^\delta) - a^\delta u,$$

abbiamo che il problema penalizzato

$$\begin{cases} L^\delta u + a^\delta u = f^\delta + \beta_\varepsilon(u - \varphi^\delta), & \text{in } H(T), \\ u|_{\partial_P H(T)} = g^\delta. \end{cases}$$

ammette una soluzione classica $u_{\varepsilon,\delta} \in C_B^{2,\alpha}(H(T)) \cap C(\overline{H(T)})$.

Il punto cruciale della dimostrazione consiste nel provare la limitatezza uniforme del termine di penalizzazione:

$$|\beta_\varepsilon(u_{\varepsilon,\delta} - \varphi^\delta)| \le \widetilde{c} \tag{7}$$

con $\widetilde{c}$ indipendente da ε e δ. Poiché $\beta_\varepsilon \le \varepsilon$ è sufficiente provare la stima dal basso. La funzione $\beta_\varepsilon(u_{\varepsilon,\delta} - \varphi^\delta)$ è continua su $\overline{H(T)}$ e quindi ammette un punto di minimo ζ: possiamo supporre $m := \beta_\varepsilon(u_{\varepsilon,\delta} - \varphi^\delta)(\zeta) \le 0$ altrimenti non c'è nulla da provare.

Se $\zeta \in \partial_P H(T)$ allora

$$m = \beta_\varepsilon(g^\delta(\zeta) - \varphi^\delta(\zeta)) \ge \beta_\varepsilon(0) = 0.$$

Invece se $\zeta \in H(T)$, allora essendo β_ε una funzione crescente, anche $u_{\varepsilon,\delta} - \varphi^\delta$ ha minimo (negativo) in ζ e quindi[2]

$$L^\delta u_{\varepsilon,\delta}(\zeta) - L^\delta \varphi^\delta(\zeta) \ge 0 \ge -a(\zeta)\left(u_{\varepsilon,\delta}(\zeta) - \varphi^\delta(\zeta)\right). \tag{8}$$

Ora, per l'ipotesi di convessità debole **H4**, $L^\delta \varphi^\delta(\zeta)$ è limitata dal basso da una costante indipendente da δ. Quindi per (8) si ha

$$\begin{aligned}\beta_\varepsilon(u_{\varepsilon,\delta}(\zeta) - \varphi^\delta(\zeta)) &= L^\delta u_{\varepsilon,\delta}(\zeta) + a^\delta(\zeta) u_{\varepsilon,\delta}(\zeta) - f^\delta(\zeta) \\ &\ge L^\delta \varphi^\delta(\zeta) + a^\delta(\zeta)\varphi^\delta(\zeta) - f^\delta(\zeta) \ge \widetilde{c},\end{aligned}$$

con $\widetilde{c}$ indipendente a ε, δ e questo prova la (7).

Ora è possibile applicare nuovamente le stime interne (3), (4) e (5) e l'argomento delle funzioni barriera, per provare che $u_{\varepsilon,\delta}$ converge, localmente in $\mathcal{S}^p$ e puntualmente sulla chiusura di $H(T)$, ad una soluzione forte del problema (1). □

Per avere un confronto con i risultati noti in letteratura sulle soluzioni viscose, in [9] proviamo anche il seguente

Teorema 3.3. *Ogni soluzione forte del problema con ostacolo* (1) *è soluzione in senso viscoso.*

---

[2]Non è restrittivo assumere $a \le 0$.

Proviamo ora un semplice risultato di confronto.

Proposizione 3.1. *Sia u una soluzione forte di (1) e $v \in \mathcal{S}^1_{\mathrm{loc}}(H(T)) \cap C(\overline{H(T)})$ tale che*

$$\begin{cases} \max\{Lv + av - f, \varphi - v\} \le 0, & \text{a.e. in } H(T), \\ v|_{\partial_P H(T)} \ge g. \end{cases}$$

Allora $u \le v$ in $H(T)$.

Dimostrazione. Supponiamo che l'aperto

$$D := \{z \in H(T) : u(z) > v(z)\}$$

sia non-vuoto. Allora, poiché $u > v \ge \varphi$ in D, abbiamo

$$Lu + au = f, \quad Lv + au \le f \qquad \text{in } D,$$

e $u \equiv v$ su ∂D. Allora per il principio del massimo si ha $u \ge v$ in D e ciò è assurdo. □

Consideriamo ora il problema con ostacolo su una striscia di $\mathbb{R}^{N+1}$:

$$\begin{cases} \max\{Lu + au - f, \varphi - u\} = 0, & \text{in } S_T := \mathbb{R}^N \times]0, T[, \\ u(\cdot, 0) = g, & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{9}$$

Diciamo che $\bar{u}$ è una sopra-soluzione forte del problema (9) se $\bar{u} \in \mathcal{S}^1_{\mathrm{loc}}(S_T) \cap C(\mathbb{R}^N \times [0, T[)$ e

$$\begin{cases} \max\{L\bar{u} + a\bar{u} - f, \varphi - \bar{u}\} \le 0, & \text{a.e. in } S_T, \\ \bar{u}(\cdot, 0) \ge g, & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Assumiamo

- **H5:** φ è una funzione localmente Lipschitziana in $\overline{S}_T$ tale che, per ogni sottoinsieme convesso e compatto M di S_T, valga la condizione di convessità debole (2) con una costante C dipendente da M.

Enunciamo un risultato di esistenza e unicità.

Teorema 3.4. *Assumiamo le ipotesi* **H1, H2, H5** *e siano $a, f \in C(S_T)$ con $a \le a_0$, $a_0 \in \mathbb{R}$, e $g \in C(\mathbb{R}^N)$ tale che $g \ge \varphi(\cdot, 0)$. Se esiste una sopra-soluzione forte $\bar{u}$ del problema (9) allora esiste anche una soluzione forte u di (9) tale che $u \le \bar{u}$ in S_T.*

L'esistenza di una sopra-soluzione forte è assicurata, per esempio, se g, φ sono funzioni limitate e $f \geq 0$: in tal caso

$$\bar{u}(x,t) := e^{a_0 t} \max\{\|g\|_\infty, \|\varphi\|_\infty\}.$$

Nella dimostrazione del Teorema 3.4, una soluzione di (9) è ottenuta come limite di soluzioni forti di problemi di Cauchy-Dirichlet rispettivamente definiti su una successione di cilindri limitati e regolari che ricoprono la striscia di $\mathbb{R}^{N+1}$.

4. Problema di arresto ottimo e applicazioni in finanza

Consideriamo l'equazione differenziale stocastica (nel seguito, EDS) in $\mathbb{R}^N$

$$dX_t = (BX_t + b(t, X_t))\, dt + \sigma(t, X_t) dW_t \tag{1}$$

dove W indica un moto Browniano m-dimensionale con $m \leq N$. I coefficienti $B, b = (b_1, \dots, b_N)$ e $a_{ij} := (\sigma\sigma^T)_{ij}$ verificano le ipotesi **H1**, **H2** e[3]

$$0 = b_{m+1} = \cdots = b_N.$$

In questa sezione assumiamo:

H6: i coefficienti a_{ij}, b_i sono B-Hölderiani, $a_{ij}, b_i \in C^\alpha_B(\mathbb{R}^{N+1})$ per un certo $\alpha \in]0,1[$.

Ricordiamo che, combinando i risultati di Stroock e Varadhan [38] con quelli di Di Francesco e Pascucci [8], queste ipotesi garantiscono l'esistenza e unicità in legge di una soluzione debole $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t), W, X)$ della EDS (1).

Le ipotesi assunte sono sufficientemente generali da permettere l'applicazione dei risultati seguenti a numerosi problemi di finanza matematica. In particolare le ipotesi sono verificate nel caso significativo di un'opzione Asiatica, in cui $m = 1$ e X è un processo bidimensionale le cui componenti sono il prezzo del titolo sottostante (in scala logaritmica) e la corrispondente media.

Da un punto teorico, le PDE di Kolmogorov intervengono in modo estremamente naturale nello studio dei processi di diffusione. Alcuni classici modelli cinetici, come per esempio il modello di Langevin (cf. Nelson [33]), sono basati su EDS lineari in cui la

[3] I risultati si estendono facilmente al caso in cui $b_{m+1}, \cdots, b_N$ siano funzioni della sola variabile t.

dimensione del processo, nello spazio delle fasi, è strettamente maggiore della dimensione del termine di diffusione (moto Browniano), ossia $N > m$.

Ricordiamo brevemente alcuni fatti noti sulle *EDS lineari* che, come nel caso deterministico, rappresentano la classe più importante di equazioni: per maggiori dettagli rimandiamo, per esempio, a Karatzas e Shreve [23]. Tali proprietà sono anche alla base dei risultati di regolarità dell'equazione di Kolmogorov (cf. [25]). Indichiamo con I_m la matrice identità in $\mathbb{R}^m$ e consideriamo la matrice costante $N \times m$ definita, per blocchi, da

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Allora, fissato $(y, s) \in \mathbb{R}^{N+1}$, la soluzione della *EDS lineare a coefficienti costanti*

$$dX_t^{s,y} = BX_t^{s,y}dt + \sigma_0 dW_t, \qquad X_s^{s,y} = y, \tag{3}$$

è un processo Gaussiano con media

$$E\left[X_t^{s,y}\right] = e^{(t-s)B}y,$$

e matrice di co-varianza $\mathcal{C}_0(t-s)$ dove

$$\mathcal{C}_0(t) := \int_0^t e^{(t-\varrho)B}\sigma_0\sigma_0^T e^{(t-\varrho)B^T} d\varrho, \qquad t > 0.$$

Poiché σ_0 ha dimensione $N \times m$, la matrice $\mathcal{C}_0(t)$ è in generale soltanto semi-definita positiva: in altri termini $X_t^{s,y}$ ha distribuzione multi-normale degenere. D'altra parte non è difficile mostrare che $\mathcal{C}_0(t) > 0$ per ogni $t > 0$ se e solo se vale la condizione di Kalman

$$\operatorname{rank}\left[\sigma_0,\, B\sigma_0,\, B^2\sigma_0,\, \dots\, ,\, B^{N-1}\sigma_0\right] = N. \tag{4}$$

La (4) è una condizione agevole da verificare in pratica ed è equivalente alla condizione **H2**. Infatti sotto questa ipotesi, $X_t^{s,y}$ ha densità Gaussiana

$$G_0(s, y, t, x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det \mathcal{C}_0(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \mathcal{C}_0^{-1}(t-s)(x - e^{(t-s)B}y), x - e^{(t-s)B}y\right);$$

ossia G_0 è la densità di transizione del processo X, corrispondente alla soluzione fondamentale dell'operatore di Kolmogorov associato alla EDS (3):

$$\frac{1}{2}\triangle_{\mathbb{R}^m} + \langle Bx, \nabla\rangle + \partial_t. \tag{5}$$

Tornando al caso generale dei coefficienti variabili, l'operatore di Kolmogorov associato alla EDS (1) è

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m}(\sigma\sigma^T)_{ij}\partial_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i\partial_{x_i} + \langle Bx, \nabla\rangle + \partial_t, \tag{6}$$

e, nelle ipotesi **H1**, **H2** e **H6**, possiede una soluzione fondamentale G che è la densità di transizione della soluzione di (1). Ricordiamo anche (cf. [8], [31], [36]) che vale la seguente stima Gaussiana

$$G(s,y,t,x) \le k\,\widetilde{G}_0(s,y,t,x), \qquad s<t,\ x,y\in\mathbb{R}^N, \tag{7}$$

dove k è una costante che dipende da L e $t-s$; inoltre $\widetilde{G}_0$ indica la soluzione fondamentale di un operatore a coefficienti costanti della forma (5).

In [34] proviamo il seguente

Teorema 4.1. *Siano L in (6) e u una soluzione forte del problema con ostacolo con dato finale*

$$\begin{cases} \max\{Lu + au - f, \varphi - u\} = 0, & \text{in } S_T = \mathbb{R}^N \times]0,T[, \\ u(T,\cdot) = \varphi(T,\cdot), & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Se

$$|u(t,x)| \le Ce^{\alpha|x|^2}, \qquad (t,x)\in S_T, \tag{8}$$

con C,α costanti positive, α sufficientemente piccola[4], allora vale la seguente formula di rappresentazione

$$u(t,x) = \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} E\left[\varphi(\tau, X_\tau^{t,x})e^{\int_t^\tau a\left(s,X_s^{t,x}\right)ds} - \int_t^\tau f(s,X_s^{t,x})e^{\int_t^s a\left(\varrho,X_\varrho^{t,x}\right)d\varrho}ds\right], \tag{9}$$

dove $\mathcal{T}_{t,T}$ indica la famiglia di tutti i tempi d'arresto relativi alla filtrazione $(\mathcal{F}_t)$ tali che $t\le\tau\le T$ quasi sicuramente. In particolare tale soluzione è unica.

La dimostrazione è basata sulla formula di Itô: un punto fondamentale è il fatto che la soluzione u non è sufficientemente regolare (C^2) per applicare tale formula direttamente ed è quindi necessario utilizzare una tecnica di regolarizzazione. Nel passaggio al limite

[4] Con dipendenza esplicita da T e L.

dal problema regolarizzato a quello originale gioca un ruolo cruciale la stima Gaussiana (7) della densità di transizione. Inoltre l'ipotesi di crescita (8) viene utilizzata in combinazione con la seguente stima massimale del processo X,

$$E\left[\exp\left(\alpha \sup_{t\le s\le T}\left|X_s^{t,x}\right|^2\right)\right] < \infty, \tag{10}$$

per avere opportune stime globali di $u(t, X_t)$.

Sorvolando sulle difficoltà tecniche, diamo una traccia della dimostrazione: consideriamo per semplicità il caso $a = f = 0$. Applicando la Formula di Itô, abbiamo:

$$u(\tau, X_\tau^{t,x}) = u(t,x) + \int_t^\tau Lu(s, X_s^{t,x})ds + \int_t^\tau \nabla u(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})dW_s \le \tag{11}$$

(poiché $Lu \le 0$)

$$\le u(t,x) + \int_t^\tau \nabla u(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})dW_s.$$

Utilizzando la (10) è possibile verificare che l'integrale stocastico ha media nulla. Pertanto, poiché u è maggiore dell'ostacolo, in valore atteso si ha

$$u(t,x) \ge E\left[u(\tau, X_\tau^{t,x})\right] \ge E\left[\varphi(\tau, X_\tau^{t,x})\right],$$

e dunque

$$u(t,x) \ge \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{t,T}} E\left[\varphi(\tau, X_\tau^{t,x})\right].$$

Per provare la disuguaglianza in senso opposto, consideriamo il seguente tempo di arresto

$$\tau_0 = \inf\{s \in [t,T] \mid u(s, X_s^{t,x}) = \varphi(s, X_s^{t,x})\}, \tag{12}$$

ossia il primo istante in cui la soluzione tocca l'ostacolo: osserviamo esplicitamente che la definizione è ben posta poiché l'insieme in (12) non è vuoto in base alla condizione finale $u(T,\cdot) = \varphi(T,\cdot)$. Poiché $Lu(t, X_s^{t,x}) = 0$ per $s < \tau_0$, la (11) diventa

$$u(\tau_0, X_{\tau_0}^{t,x}) = u(t,x) + \int_t^{\tau_0} \nabla u(s, X_s^{t,x})\sigma(s, X_s^{t,x})dW_s,$$

e, in valore atteso,

$$u(t,x) = E\left[u(\tau_0, X_{\tau_0}^{t,x})\right] = E\left[\varphi(\tau_0, X_{\tau_0}^{t,x})\right].$$

Questo conclude la prova.

Riferimenti bibliografici

[1] G. Barles, *Convergence of numerical schemes for degenerate parabolic equations arising in finance theory*, in Numerical methods in finance, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 1–21.

[2] J. Barraquand and T. Pudet, *Pricing of American path-dependent contingent claims*, Math. Finance, 6 (1996), pp. 17–51.

[3] A. Bensoussan, *On the theory of option pricing*, Acta Appl. Math., 2 (1984), pp. 139–158.

[4] A. Bensoussan and J.-L. Lions, *Applications of variational inequalities in stochastic control*, vol. 12 of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982. Translated from the French.

[5] M. Bramanti, M. C. Cerutti, and M. Manfredini, *L^p estimates for some ultraparabolic operators with discontinuous coefficients*, J. Math. Anal. Appl., 200 (1996), pp. 332–354.

[6] M. Dai and Y. K. Kwok, *Characterization of optimal stopping regions of American Asian and lookback options*, Mathematical Finance, 16 (2006).

[7] M. Di Francesco and A. Pascucci, *On the complete model with stochastic volatility by Hobson and Rogers*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., 460 (2004), pp. 3327–3338.

[8] ——, *On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type*, AMRX Appl. Math. Res. Express, (2005), pp. 77–116.

[9] M. Di Francesco, A. Pascucci, and S. Polidoro, *The obstacle problem for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations*, preprint AMS Acta, (2007).

[10] M. Di Francesco and S. Polidoro, *Schauder estimates, Harnack inequality and Gaussian lower bound for Kolmogorov type operators in non-divergence form*, Advances in Differential Equations, (2006), pp. 1261–1320.

[11] W. H. Fleming and H. M. Soner, *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, vol. 25 of Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer, New York, second ed., 2006.

[12] G. B. Folland, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat., 13 (1975), pp. 161–207.

[13] P. Foschi and A. Pascucci, *Path dependent volatility*, preprint AMS Acta, (2007).

[14] A. Friedman, *Parabolic variational inequalities in one space dimension and smoothness of the free boundary*, J. Functional Analysis, 18 (1975), pp. 151–176.

[15] ——, *Variational principles and free-boundary problems*, Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Malabar, FL, second ed., 1988.

[16] A. T. Hansen and P. L. Jorgensen, *Analytical valuation of American-style Asian options*, Manag. Sci., 46(8) (2000), p. 11161136.

[17] D. G. Hobson and L. C. G. Rogers, *Complete models with stochastic volatility*, Math. Finance, 8 (1998), pp. 27–48.

[18] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math., 119 (1967), pp. 147–171.

[19] K. Huang and R. Thulasiram, *Parallel algorithm for pricing American Asian options with multi-dimensional assets*, High Performance Computing Systems and Applications, 2005. HPCS 2005. 19th International Symposium on, (2005).

[20] P. Jaillet, D. Lamberton, and B. Lapeyre, *Variational inequalities and the pricing of American options*, Acta Appl. Math., 21 (1990), pp. 263–289.

[21] L. Jiang and M. Dai, *Convergence of binomial tree methods for European/American path-dependent options.*, SIAM J. Numer. Anal., 42 (2004), pp. 1094–1109.

[22] I. Karatzas, *On the pricing of American options*, Appl. Math. Optim., 17 (1988), pp. 37–60.

[23] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, vol. 113 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 1991.

[24] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, vol. 31 of Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000. Reprint of the 1980 original.

[25] E. Lanconelli and S. Polidoro, *On a class of hypoelliptic evolution operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 52 (1994), pp. 29–63.

[26] F. Lascialfari and D. Morbidelli, *A boundary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations*, Comm. Partial Differential Equations, 23 (1998), pp. 847–868.

[27] M. Manfredini, *The Dirichlet problem for a class of ultraparabolic equations*, Adv. Differential Equations, 2 (1997), pp. 831–866.

[28] M. Manfredini and S. Polidoro, *Interior regularity for weak solutions of ultraparabolic equations in divergence form with discontinuous coefficients*, Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8), 1 (1998), pp. 651–675.

[29] M. D. Marcozzi, *On the valuation of Asian options by variational methods.*, SIAM J. Sci. Comput., 24 (2003), pp. 1124–1140.

[30] G. H. Meyer, *On pricing American and Asian options with PDE methods*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.), 70 (2000), pp. 153–165.

[31] D. Morbidelli, *Spazi frazionari di tipo Sobolev per campi vettoriali e operatori di evoluzione di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck*, Tesi di Dottorato di Ricerca, Università di Bologna, (1998).

[32] A. Nagel, E. M. Stein, and S. Wainger, *Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties*, Acta Math., 155 (1985), pp. 103–147.

[33] E. Nelson, *Dynamical theories of Brownian motion*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1967.

[34] A. Pascucci, *Free boundary and optimal stopping problems for American Asian options*, preprint AMS Acta, (2007).

[35] G. Peskir and A. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problems.*, Lectures in Mathematics, ETH Zürich. Basel: Birkhäuser., 2006.

[36] S. Polidoro, *On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov-Fokker-Planck type*, Matematiche (Catania), 49 (1994), pp. 53–105.

[37] L. P. Rothschild and E. M. Stein, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math., 137 (1976), pp. 247–320.

[38] D. W. Stroock and S. Varadhan, *Diffusion processes. I: Existence and uniqueness.*, Commun. Pure Appl. Math., 22 (1969), pp. 345–400.

[39] P. van Moerbeke, *An optimal stopping problem with linear reward*, Acta Math., 132 (1974), pp. 111–151.

[40] ——, *On optimal stopping and free boundary problems*, Arch. Rational Mech. Anal., 60 (1975/76), pp. 101–148.

[41] L. Wu, Y. K. Kwok, and H. Yu, *Asian options with the American early exercise feature*, Int. J. Theor. Appl. Finance, 2 (1999), pp. 101–111.

[42] Z. Wu, J. Yin, and C. Wang, *Elliptic and parabolic equations.*, Hackensack, NJ: World Scientific. xv, 408 p., 2006.