Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica
dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2005-06

Sergio Polidoro

Un problema di controllo ottimo nello studio delle stime gaussiane per equazioni di evoluzione ipoellittiche

27 aprile 2006

Abstract

We consider a class of linear second order operators in $\mathbb{R}^{N+1}$ of the form

$$L = \sum_{k=1}^{m} X_k^2 + X_0 - \partial_t,$$

where the X_k's are vector fields on $\mathbb{R}^N$. Our main assumption is a controllability condition: *for every* $(x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^{N+1}$ *with* $t > s$, *there exists an absolutely continuous path* $\gamma : [0, t-s] \to \mathbb{R}^N$ *such that*

$$\begin{cases} \dot\gamma(\tau) = & \sum_{k=1}^{m} \omega_k(\tau) X_k(\gamma(\tau)) + X_0(\gamma(\tau)) \\ \gamma(0) = & x, \quad \gamma(t-s) = y. \end{cases}$$

We also assume that a Harnack inequality holds for the positive solutions of $Lu = 0$.

Our main result is Gaussian lower bound holds for the positive solutions of $Lu = 0$ that are defined on the domain $\mathbb{R}^N \times I$ (for some interval $I \subset \mathbb{R}$). As a straightforward consequence we obtain a Gaussian lower bound for the fundamental solution of L.

The method was introduced by Aronson in the study of uniformly parabolic operators and only relies on the repeated use of the (local) Harnack inequality. Here we develop that idea and we we set the problem in the theory of the optimal control with quadratic cost. More specifically, we consider the cost

$$\Phi(\omega) = \int_0^{t-s} |\omega(s)|^2 ds,$$

related to the above path $\gamma : [0, t-s] \to \mathbb{R}^N$. The optimal cost is the best exponent of the Gaussian bound.

We apply the method to different families of operators. The estimates are in some cases optimal, in the sense that our lower bound and the (known) upper bound have the same behavior at infinity.

1. Introduzione

Presento alcuni recenti risultati ottenuti in un lavoro in collaborazione con U. Boscain della SISSA ed in alcune ricerche svolte con M. Di Francesco ed A. Pascucci.

Consideriamo operatori differenziali lineari del secondo ordine in $\mathbb{R}^{N+1}$, della forma

$$L := \sum_{k=1}^{m} X_k^2 + X_0 - \partial_t, \tag{1}$$

dove $X_0, \dots, X_m$ sono campi vettoriali su $\mathbb{R}^N$: se denotiamo con $z = (x,t)$ il punto di $\mathbb{R}^{N+1}$, allora

$$X_k(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j^k(x)\partial_{x_j}, \qquad k = 0, \dots, m.$$

La regolarità dei coefficienti a_j^k non è essenziale in questo contesto, per semplicità supporremo che essi siano funzioni continue, quando sarà necessario, verranno specificate ulteriori ipotesi di regolarità. Nel seguito ogni X_k verrà anche considerato come campo vettoriale su $\mathbb{R}^{N+1}$ e sarà usata la notazione

$$Y = X_0 - \partial_t. \tag{2}$$

La prima ipotesi fondamentale è una condizione di controllabilità:

Ipotesi [C] *Per ogni coppia di punti $(x,t), (y,s) \in \mathbb{R}^{N+1}$ con $t > s$, esiste un cammino assolutamente continuo $\gamma : [0, t-s] \to \mathbb{R}^N$ tale che*

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(\tau) = & \sum_{k=1}^{m} \omega_k(\tau) X_k(\gamma(\tau)) + X_0(\gamma(\tau)), \\ \gamma(0) = & x, \quad \gamma(t-s) = y, \end{cases} \tag{3}$$

con $\omega_1, \dots, \omega_m \in L^2([0, t-s])$.

Ricordo che l'ipotesi [C], nel caso dei coefficienti analitici, implica la seguente condizione di Hörmander

$$\text{rango Lie}\{X_1, \dots, X_m, Y\}(z) = N+1, \qquad \forall z \in \mathbb{R}^{N+1}; \tag{4}$$

e, di conseguenza, l'ipoellitticità dell'operatorie L.

Assumeremo inoltre la validità di una disuguaglianza di Harnack per le soluzioni positive di $Lu = 0$. Il problema che viene qui considerato è quello di provare stime dal basso *globali*, di tipo gaussiano, utilizzando il metodo introdotto da Aronson [Aro67] e successivamente utilizzato da Aronson e Serrin [AS67] nello studio degli operatori uniformemente parabolici. Il principale risultato di [AS67] è una stima della forma

$$u(y,s) \leq M^{1+\frac{|x-y|^2}{t-s}} u(x,t), \tag{5}$$

per ogni soluzione positiva $u : \mathbb{R}^N \times]T_0, T_1[\to \mathbb{R}$ e per ogni $(x,t), (y,s) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tali che $\frac{T_0+T_1}{2} < s < t < T_1$. La stima suddetta si basa sull'uso ripetuto della disuguaglianza di Harnack, applicata ad un insieme finito di punti disposti lungo il segmento che congiunge (x,t) ed (y,s).

Sebbene il metodo di Aronson, applicato agli operatori della forma (1), non richieda alcuna ulteriore ipotesi, la presenza di strutture geometriche legate ad L permette in alcuni casi di ottenere stime esplicite. Per questo motivo nei seguenti paragrafi 2, 3 e 4, saranno considerate separatamente alcune famiglie di operatori L, e saranno enunciate le (note) disuguaglianze di tipo Harnack opportunamente espresse in termini geometrici.

In particolare, nel paragrafo 2 vengono considerati gli operatori, a coefficienti C^∞, invarianti rispetto alle operazioni di un gruppo di Lie omogeneo:

Ipotesi [H] *esiste un gruppo di Lie omogeneo* $\mathbb{G} = \left(\mathbb{R}^{N+1}, \circ, \delta_\lambda\right)$ *tale che*

- (i): $X_1, \ldots, X_m, Y$ *siano invarianti rispetto alle traslazioni a sinistra di* $\mathbb{G}$*;*
- (ii): $X_1, \ldots, X_m$ *siano* δ_λ*-omogenei di grado uno e che* Y *sia* δ_λ*-omogeneo di grado due.*

Ricordiamo che sotto le ipotesi [C] ed [H] vale una disuguaglianza invariante rispetto alle traslazioni e alle dilatazioni di $\mathbb{G}$ (si veda [KL04]). Sotto queste condizioni abbiamo dimostrato la seguente

Proposizione 1.1. *Sia* L *un operatore della forma* (1) *che soddisfa le ipotesi [C] ed [H] e sia* $u : \mathbb{R}^N \times]T_0, T_1[$ *una soluzione positiva di* $Lu = 0$*. Esistono tre costanti positive* $\theta \in]0,1[, h$ *ed* $M > 1$*, che dipendono solo dall'operatore* L*, tale che*

$$u(y,s) \leq M^{1+\frac{\Phi(\omega)}{h}} u(x,t).$$

per ogni $(x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^N \times]T_0,T_1[$ *tale che* $T_1 - \theta^2(T_1 - T_0) \leq s < t < T_1$. *Qui* $\gamma : [0,t-s] \to \mathbb{R}^N$ *è una soluzione di* (3), *e*

$$\Phi(\omega) = \int_0^{t-s} |\omega(s)|^2 ds. \tag{6}$$

è il costo di γ.

A questo punto ci occupiamo del problema di trovare stime che siano in qualche senso ottimali, scegliendo il cammino in (3) in modo che renda minimo il costo (6). Si formula in maniera naturale un problema di controllo ottimo, in cui la funzione $\omega_1, \dots, \omega_m$ che figura in (3) viene considerata come controllo e si pone

$$\Psi(x,t,y,s) = \inf \left\{ \Phi(\omega) : \omega \in L^2([0,t-s]) \right\} \tag{7}$$

dove l'estremo inferiore va considerato tra le soluzioni γ di (3). Come corollario della Proposizione 1.1 troviamo:

Teorema 1.1. *Sia* L *un operatore della forma* (1) *che soddisfa le ipotesi [C] ed [H] e sia* $u : \mathbb{R}^N \times]T_0,T_1[$ *una soluzione positiva di* $Lu = 0$. *Esistono tre costanti positive* $\theta \in]0,1[, h$ *ed* $M > 1$, *che dipendono solo dall'operatore* L, *tali che*

$$u(y,s) \leq M^{1 + \frac{\Psi(x,t,y,s)}{h}} u(x,t),$$

per ogni $(x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^N \times]T_0,T_1[$ *tale che* $T_1 - \theta^2(T_1 - T_0) \leq s < t < T_1$.

Una ulteriore conseguenza, pressoché immediata, è una stima dal basso della soluzione fondamentale Γ:

Proposizione 1.2. *Sia* L *un operatore della forma* (1) *che soddisfa le ipotesi [C] ed [H] e sia* Γ *la sua soluzione fondamentale. Esiste allora una costante positiva* C *tale che*

$$\Gamma(x,t,y,s) \geq \frac{C}{(t-s)^{\frac{Q-2}{2}}} e^{-C\Psi(x,t,y,s)}, \qquad \forall (x,t),(y,s) \in \mathbb{R}^{N+1} \quad \text{con } t > s. \tag{8}$$

In un lavoro in corso di realizzazione, con Boscain e Rossi, stiamo cercando di applicare le tecniche della teoria del controllo per avere le informazioni più accurate ed esplicite sulla funzione costo ottimo (7). Ad esempio, uno strumento fondamentale per la ricerca del costo minimo è il *principio del massimo di Pontryagin*, che nel nostro contesto si formula nel modo seguente: si considera la funzione Hamiltoniana del sistema (3), con costo (6),

$$\mathcal{H}(x,p,\omega) = \sum_{k=1}^{m} \omega_k \langle p, X_k(x)\rangle + \langle p, X_0(x)\rangle + p_0 \sum_{k=1}^{m} \omega_k^2, \tag{9}$$

con $p = (p_1, \dots, p_N)$. È noto che, se $\omega_1^*, \dots, \omega_m^*$ è il costo ottimo, allora risulta

$$\mathcal{H}(x,p,\omega^*) = \max_{\omega} \mathcal{H}(x,p,\omega).$$

Inoltre, il vettore p è soluzione dell'equazione differenziale

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}(x,p,\omega^*)}{\partial x}.$$

Questo strumento permette in alcuni casi (ad esempio: nel caso di equazioni di Kolmogorov, si veda il paragrafo 3) di ottenere l'espressione esplicita del costo ottimo, in altri fornisce delle stime del costo. I primi risultati in questa direzione sono stati annunciati in [BP06].

Osserviamo ora che la condizione [H], di invarianza rispetto ad una struttura di gruppo omogeneo, è piuttosto forte e può apparire eccessivamente restrittiva. In effetti abbiamo utilizzato con successo il nostro metodo in situazioni in cui mancano alcune ipotesi di invarianza. In particolare, nel lavoro [DFP06], in collaborazione con Di Francesco, abbiamo considerato gli operatori di Kolmogorov che risultano invarianti rispetto alle traslazioni di un gruppo di Lie (che indicheremo con $\mathbb{K}$) che *non* è omogeneo. Per tale tipo di operatori abbiamo dimostrato una disuguaglianza di Harnack invariante rispetto alle traslazioni del gruppo, ed anche alle dilatazioni di un gruppo omogeneo che costituisce in un certo senso un'approssimazione di $\mathbb{K}$. Anche le ipotesi di regolarità sono molto indebolite, in quanto abbiamo considerato operatori a coefficienti solamente Hölderiami. I risultati relativi a tale famiglia di operatori sono nel paragrafo 3.

Nel paragrafo 4 abbiamo poi considerato equazioni della forma

$$x^2 \partial_{xx} u + x \partial_y u = \partial_t u, \quad (x,y,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times]0,T[.$$

che si presentano nello studio delle opzioni di tipo asiatico (si veda [BPV01] e [Bal05]). Tale equazione non risulta essere invariante rispetto alle traslazioni di un gruppo di Lie, tuttavia anche in questo caso si riesce a dimostrare una disuguaglianza di Harnack con una conoscenza sufficientemente esplicita delle relative costanti da fornire stime asintotiche delle soluzioni positive.

Concludo questa introduzione con alcune considerazioni. Innanzitutto l'idea di utilizzare un problema di controllo per ottimizzare le stime è stata ispirata da un lavoro di Li e Yau [LY86], nello studio di equazioni paraboliche si varietà Riemanniane e da un lavoro di Auchmuty e Bau [AB94], che riguarda il p–laplaciano e l'equazione dei mezzi porosi. In [AB94] si dimostra una stima dal basso a partire da una disuguaglianza che, nel caso particolare dell'equazione del calore in $\mathbb{R}^{N+1}$, si scrive nella forma

$$\partial_t u + \frac{N}{2t} u \geq \frac{|Du|^2}{u}. \tag{10}$$

Da questa, per mezzo di un problema di ottimizzazione, viene ottenuta una stima dal basso analoga alla (5), ma molto più accurata:

$$u(x,t)(4\pi t)^{N/2} \geq u(y,s)(4\pi s)^{N/2} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right).$$

Alcuni autori sono riusciti ad estendere il procedimento sopra indicato ad operatori della forma (1). Cao e Yau [CY92] hanno ottenuto risultati in questo senso sotto l'ipotesi che $\mathrm{span}\{X_i, [X_j, X_k] \mid i,j,k = 1,\dots,m\}(x) = \mathbb{R}^N$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$ e che $X_0 \in \mathrm{span}\{X_j \mid j = 1,\dots,m\}$; mentre in un lavoro in collaborazione con Pascucci [PP04] abbiamo considerato operatori di tipo Kolmogorov (i risultati di [PP04] sono stati successivamente migliorati in [BP06]). È opportuno osservare che la condizione (10) è estremamente forte e difficilmente può valere per operatori a coefficienti poco regolari. L'idea principale del presente lavoro è quella di utilizzare il problema di ottimizzazione come criterio per selezionare l'insieme discreto di punti a cui applicare il metodo di Aronson senza richiedere le ipotesi (estremamente forti) che permettono di ottenere una disuguaglianza che estenda la (10) agli operatori della forma (1).

Ricordiamo infine che li metodo di Aronson e Serrin è stato adattato da Jerison e Sánchez-Calle [JSC86], Kusuoka e Stroock [KS87], Varopoulos, Saloff-Coste e Coulhon

[VSCC92] al contesto non-euclideo degli *operatori parabolici sui gruppi di Lie*,

$$L := \sum_{k=1}^{m} X_k^2 - \partial_t.$$

In tal caso si ottiene una stima analoga, che si esprime in termini della cosiddetta distanza di controllo $d(x,y)$ sul gruppo di Lie:

$$u(y,s) \le M^{1+\frac{d^2(x,y)}{t-s}} u(x,t).$$

Lo stesso procedimento è stato usato da me in un lavoro sulle equazioni di tipo Kolmogorov [Pol97], che possono essere scritte nella forma (1) (ma che non rientrano nella classe degli operatori parabolici sui gruppi di Lie) e, successivamente, in un lavoro in collaborazione con Pascucci [PP05] in cui viene considerata una più ampia classe di equazioni del tipo (1). L'idea principale dei lavori [Pol97] e [PP05] consiste nel fatto che l'insieme discreto dei punti a cui viene applicata la disuguaglianza di Harnack non viene scelto lungo un segmento di retta (come nel caso euclideo) ma lungo curve integrali dei campi opportunamente scelte. Questo accorgimento ha permesso di ottenere le nostre prime stime dal basso del tipo enunciato nella Proposizione 1.1, ma ha evidenziato la necessità di adottare un criterio per la scelta degli insiemi discreti a cui applicare la disuguaglianza di Harnack.

2. Gruppi di Lie Omogenei

In questo paragrafo consideriamo gli operatori della forma (1), a coefficienti C^∞, che soddisfano le condizioni [C] ed [H]. Ricordiamo che una disuguaglianza di Harnack per tali operatori è stata dimostrata da Kogoj e Lanconelli in [KL04], Teorema 7.1. Per ogni $r > 0$ e $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$, poniamo

$$H_r(z_0) = z_0 \circ \delta_r(H_1), \qquad S_r(z_0) = z_0 \circ \delta_r(S_1),$$

dove

$$H_1 = \big\{ z = (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} \ \mid \ \|z\|_{\mathbb{G}} \le 1, \ t \le 0 \big\}, \qquad S_1 = \left\{ (x,t) \ \in H_1 \mid \frac{1}{4} \le -t \le \frac{3}{4} \right\}.$$

Teorema 2.1. [Kogoj-Lanconelli] *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ contenente $H_r(z_0)$, per opportuni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ ed $r > 0$. Allora esistono due costanti positive θ ed M, che dipendono solamente dall'operatore L, tali che*

$$\sup_{S_{\theta r}(z_0)} u \leq M\, u(z_0), \tag{11}$$

per ogni soluzione non-negativa u di $Lu = 0$ in Ω.

Al fine di utilizzare le proprietà geometriche del gruppo $\mathbb{G}$, introduciamo alcune notazioni e forniamo un enunciato equivalente della disuguaglianza di Harnack. Le ipotesi [C] ed [H] implicano che $\mathbb{R}^N$ si può scomporre come somma diretta $\mathbb{R}^N = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ tale che, se $x = x^{(1)} + \cdots + x^{(n)}$ con $x^{(k)} \in V_k$, allora le dilatazioni agiscono nel seguente modo

$$\delta_\lambda(x^{(1)} + \cdots + x^{(n)}, t) = (\lambda x^{(1)} + \cdots + \lambda^n x^{(n)}, \lambda^2 t), \tag{12}$$

per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $\lambda > 0$. Non è restrittivo supporre

$$x^{(1)} = (x_1, \dots, x_{m_1}, 0, \dots, 0) \in V_1,$$
$$x^{(k)} = (0, \dots, 0, x_1^{(k)}, \dots, x_{m_k}^{(k)}, 0, \dots, 0) \in V_k,$$

per una opportuna scelta di una base di $\mathbb{R}^N$, dove

$$x_i^{(k)} = x_{m_1 + \cdots + m_{k-1} + i}, \qquad i = 1, \dots, m_k := \dim V_k.$$

Come di consueto, il numero $Q = \sum_{k=1}^n k\, m_k + 2$ viene detto *dimensione omogenea* di $\mathbb{G}$ rispetto a (δ_λ). Utilizziamo anche le seguenti norme omogenee rispetto a δ_λ:

$$|x|_{\mathbb{G}} = \max\left\{ \left|x_i^{(k)}\right|^{\frac{1}{k}} \;\middle|\; k = 1, \dots, n,\ i = 1, \dots, m_k \right\}, \qquad \|(x,t)\|_{\mathbb{G}} = \max\left\{ |x|_{\mathbb{G}}, |t|^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Possiamo ora enunciare un corollario immediato del Teorema 2.1.

Proposizione 2.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^{N+1}$ contenente $H_r(z_0)$, per opportuni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ ed $r > 0$. Allora esistono due costanti positive θ ed M, che dipendono solamente dall'operatore L, tali che*

$$u(z_0 \circ z) \leq M\, u(z_0) \tag{13}$$

per ogni soluzione non-negativa u di $Lu = 0$ in Ω e per ogni z nel cono positivo

$$\mathcal{P}_r = \left\{ (x, -t) \in \mathbb{R}^{N+1} \;\; | \;\; |x|_{\mathbb{G}}^2 \le 2\,t,\; 0 < t \le 2\,\theta^2 r^2 \right\}. \tag{14}$$

Lemma 2.1. *Sia $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^N$ una soluzione di (3), con $\omega_1, \dots, \omega_m \in L^2(0, T)$, e sia $r = \frac{\sqrt{2T}}{2\theta}$. Esiste una costante positiva h, che dipende solo dall'operatore L, tale che*

$$(\gamma(s), t - s) \in (x, t) \circ \mathcal{P}_r \quad \textit{per ogni } s \in [0, T] \quad \textit{tale che} \quad \int_0^s |\omega(\tau)|^2 d\tau \le h.$$

Dimostrazione. Possiamo limitarci a considerare il problema (3) nel caso $(x, t) = (0, 0)$:

$$\dot{\gamma}(\tau) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j(\tau) X_j(\gamma(\tau)) + X_0(\gamma(\tau)), \qquad \gamma(0) = 0, \tag{15}$$

il risultato in generale segue direttamente dalla proprietà di invarianze dei capi vettoriali $X_1, \dots, X_m$ ed Y rispetto all'operazione "$\circ$". Dobbiamo verificare che vale

$$\left| \gamma^{(k)}(s) \right|_{\mathbb{G}}^2 = \max_{i=1,\dots,m_k} \left| \gamma_i^{(k)}(s) \right|^{\frac{2}{k}} \le 2s, \tag{16}$$

per ogni $k = 1, \dots, n$, e per ogni s sufficientemente piccolo. Consideriamo la funzione

$$F(s) := \int_0^s |\omega(\tau)|^2 d\tau, \quad \text{per } 0 \le s \le T,$$

e verifichiamo che

$$\max_{i=1,\dots,m_k} \left| \gamma_i^{(k)}(s) \right|^2 \le c_k \left(F(s) + F(s)^k \right) s^k, \quad \text{per ogni } s \in [0, T], \tag{17}$$

per $k = 1, \dots, n$, e per opportune costanti positive $c_1, \dots, c_n$ che dipendono solamente dall'operatore L. Essendo $F(0) = 0$ ed essendo F una funzione continua e crescente, dalla (17) segue che possiamo scegliere h in modo tale che la condizione (16) sia verificata per ogni s tale che $F(s) \le h$.

Dimostriamo ora la (17). A tal fine ricordiamo che $X_1, \dots, X_m$ ed Y sono campi vettoriali δ_λ–omogenei di grado uno e due, rispettivamente, e che

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{j=1}^{n} a_{j-1}^k (x^{(1)}, \dots, x^{(j-1)}) \cdot \nabla^{(j)}, \qquad k = 1, \dots, m, \\ Y &= \sum_{j=2}^{n} b_{j-2}(x^{(1)}, \dots, x^{(j-2)}) \cdot \nabla^{(j)} - \partial_t, \end{aligned} \tag{18}$$

dove

$$\nabla^{(j)} = \big(0, \dots, 0, \partial_{x_1^{(j)}}, \dots, \partial_{x_{m_j}^{(j)}}, 0, \dots, 0\big).$$

ed a_j^k e b_j sono polinomi $\delta_\lambda-$omogenei di grado j a valori in V_{j+1} e V_{j+2}, rispettivamente. Osserviamo esplicitamente che l'ipotesi [C] e la formula (18) implicano che lo spazio vettoriale generato da $\big\{X_1(0), \dots, X_m(0)\big\}$ è V_1; possiamo quindi supporre che sia $m = m_1$ e che $X_j(0) = \mathbf{e}_j$ per $j = 1, \dots, m$ dove $\{\mathbf{e}_i\}_{1 \le i \le N}$ denota la base canonica di $\mathbb{R}^N$. Osserviamo anche che, sempre per l'ipotesi [C] e per la (18), si ha che $\mathrm{span}\big\{X_0(0), [X_j, X_k](0)\big\} = V_2$. Inoltre, a meno di un cambiamento di variabile, non è restrittivo supporre che sia $b_0 = X_0(0) = 0$.

Consideriamo dapprima $\gamma_j(\tau)$ per $j = 1, \dots, m$. Essendo $X_j(0) = \mathbf{e}_j$, si ha

$$|\gamma_j(s)| = \left|\int_0^s \omega_j(\tau) d\tau\right| \le \int_0^s |\omega_j(\tau)|\, d\tau \le \left(\int_0^s |\omega(\tau)|^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{s}, \tag{19}$$

per $j = 1, \dots, m$, di conseguenza (17) è verificata per $k = 1$, con $c_1 = \frac{1}{2}$.

Per $k = 2$ si ha:

$$\dot\gamma^{(2)}(\tau) = \sum_{j=1}^m \omega_j(\tau)\, a_1^j(\gamma^{(1)}(\tau))$$

(per quanto abbiamo appena ricordato $a_1^1, \dots, a_1^m$ sono funzioni lineari e $b_0 = 0$). quindi,

$$\big|\gamma^{(2)}(s)\big| \le c_2' \int_0^s |\omega(\tau)|\, \big|\gamma^{(1)}(\tau)\big|\, d\tau \le c_2' \left(\int_0^s |\omega(\tau)|^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} s\sqrt{F(s)/2},$$

per (19), dove la costante c_2' dipende solamente dai coefficienti a_1^j. Pertanto la componente $\gamma^{(2)}(s)$ soddisfa la condizione (17) con $c_2 = (c_2')^2/2$.

Consideriamo esplicitamente anche il caso $k = 3$:

$$\dot\gamma^{(3)}(\tau) = \sum_{j=1}^m \omega_j(\tau)\, a_2^j(\gamma^{(1)}(\tau), \gamma^{(2)}(\tau)) + b_1(\gamma^{(1)}(\tau))$$

(sempre per quanto appena ricordato, i coefficienti a_2^j sono funzioni δ_λ-omogenee di grado 2 e b_1 è lineare). Dalle precedenti stime di $\gamma^{(1)}$ e di $\gamma^{(2)}$ segue allora

$$\begin{aligned}\big|\gamma^{(3)}(s)\big| \le & c_3' \int_0^s \Big(|\omega(\tau)|\, \Big(\big|\gamma^{(1)}(\tau)\big|^2 + \big|\gamma^{(2)}(\tau)\big|\Big) + \big|\gamma^{(1)}(\tau)\big|\Big)\, d\tau \le \\ & c_3'' \left(\left(\int_0^s |\omega(\tau)|^2\, d\tau\right)^{\frac{1}{2}} F(s) s^{\frac{3}{2}} + F(s)^{\frac{1}{2}} s^{\frac{3}{2}}\right),\end{aligned}$$

per una costante c_3' che dipende solo dai coefficienti a_2^j e b_1, mentre c_3'' dipende da c_1 e da c_2. Questo prova che $\gamma^{(3)}(s)$ soddisfa la condizione (17), con una costante c_3 che dipende soltanto da L.

Per $k = 4, \dots, n$, ragioniamo per induzione:

$$\dot{\gamma}^{(k)}(\tau) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j(\tau) a_{k-1}^j(\gamma^{(1)}(\tau), \dots, \gamma^{(k-1)}(\tau)) + b_{k-2}(\gamma^{(1)}(\tau), \dots, \gamma^{(k-2)}(\tau)),$$

ed essendo i coefficienti a_k^j e $b_k$funzioni δ_λ-omogenee di grado k, un ragionamento diretto porta a concludere che

$$\left|\gamma^{(k)}(s)\right| \le c_k' \int_0^s \left(|\omega(\tau)| \, \tau^{\frac{k-1}{2}} \left(F(\tau)^{\frac{1}{2}} + F(\tau)^{\frac{k-1}{2}} \right) + \tau^{\frac{k-2}{2}} \left(F(\tau)^{\frac{1}{2}} + F(\tau)^{\frac{k-2}{2}} \right) \right) d\,\tau$$

dove la costante c_k' dipende da $c_1, \dots, c_{k-1}$ e dai coefficienti a_{k-1}^j e b_{k-2}. Dalla disuguaglianza di Hölder segue allora

$$\left|\gamma^{(k)}(s)\right| \le c_k'' \left(\left(\int_0^s |\omega(\tau)|^2 \, d\,\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(F(s)^{\frac{1}{2}} + F(s)^{\frac{k-1}{2}} \right) + \left(F(s)^{\frac{1}{2}} + F(s)^{\frac{k-2}{2}} \right) \right) s^{\frac{k}{2}},$$

e da questa si ottiene la (17) per k. Questo conclude la dimostrazione. $\square$

Dimostrazione della Proposizione 1.1. Siano h, θ ed M le costanti del Lemma 2.1. Posto $T = t - s$, osserviamo che risulta $H_r(x,t) \subset \mathbb{R}^N \times]T_0, T_1[$ per $r = \sqrt{t - T_0}$.

Se ora $\int_0^{t-s} |\omega(\tau)|^2 d\tau \le h$, allora il risultato è una conseguenza immediata del Lemma 2.1 e della Proposizione 2.1, in quanto $t - s < \theta^2 r^2$, per ipotesi.

Se invece la precedente disuguaglianza non è soddisfatta, allora poniamo

$$k = \max\left\{ j \in \mathbb{N} : j\,h < \int_0^{t-s} |\omega(\tau)|^2 d\tau \right\}, \tag{20}$$

e definiamo

$$\sigma_j = \inf_{\sigma > 0} \int_0^{\sigma} |\omega(\tau)|^2 d\tau > j\,h, \qquad t_j = t - \sigma_j, \qquad j = 1, \dots, k.$$

Osserviamo che $s < t_k < \dots < t_1 < t$, quindi

$$H_{r_j}(\gamma(\sigma_j), t_j)) \subset \mathbb{R}^N \times]T_0, T_1[\qquad \text{per } r_j = \sqrt{t_j - T_0}\ j = 0, \dots, k, \tag{21}$$

e $t_j - t_{j+1} < \theta^2 r_j^2$ per $j = 0, \dots, k$ (ricordiamo che $t_0 = t$), e $t_k - s < \theta^2 r_k^2$.

Per il Lemma 2.1 $(\gamma(\sigma_1), t_1) \in (x,t) \circ \mathcal{P}_{r_0}$, possiamo quindi utilizzare la Proposizione 2.1 ed ottenere $u(\gamma(\sigma_1), t_1) \le M\, u(x,t)$. Ripetiamo ora il ragionamento: il Lemma 2.1 assicura che $(\gamma(\sigma_2), t_2) \in (\gamma(\sigma_1), t_1) \circ \mathcal{P}_{r_1}$. Ricordiamo quindi (21) ed applichiamo la Proposizione 2.1, che dà $u(\gamma(\sigma_2), t_2) \le M u(\gamma(\sigma_1), t_1) \le M^2\, u(x,t)$. Iteriamo il ragionamento finché, al $(k+1)$–esimo passo, troviamo

$$u(y,s) \le M u(\gamma(\sigma_k), t_k) \le M^{k+1}\, u(x,t).$$

La tesi segue allora da (20). □

3. Equazioni di Kolmogorov-Fokker-Planck

In questo paragrafo vengono considerati operatori di Kolmogorov-Fokker-Planck

$$\mathcal{K}u \equiv \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{i,j}(x,t)\partial_{x_i x_j} u + \sum_{i,j=1}^{N} b_{i,j} x_i \partial_{x_j} u - \partial_t u, \tag{22}$$

dove $B = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,N}$ è una matrice reale e costante, i coefficienti $a_{i,j}$ sono funzioni continue, tali che $a_{i,j}(x,t) = a_{j,i}(x,t)$, per $i,j = 1, \dots, p_0$ e per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e tale che sia verificata la seguente condizione di uniforme ellitticità

$$\mu^{-1}|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{p_0} a_{i,j}(x,t)\xi_i\xi_j \le \mu|\xi|^2, \quad \text{per ogni } \xi \in \mathbb{R}^{p_0} \text{ ed } (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{23}$$

I risultati relativi agli operatori Kolmogorov-Fokker-Planck a cui faremo riferimento sono stati provati mediante metodi basati sulla perturbazione dei relativi operatori con i coefficienti $a_{i,j}$ costanti. Introduciamo ora alcune notazioni che verranno utilizzate solo per gli operatori a coefficienti $a_{i,j}$ costanti: denoteremo $A_0 = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,p_0}$ ed indicheremo con A la matrice quadrata $N \times N$

$$A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Ricordiamo che, nel caso dei coefficienti $a_{i,j}$ costanti, la condizione di controllabilità [C] è equivalente alla ipoellitticità di $\mathcal{K}$. Inoltre [C] risulta equivalente anche alle seguenti affermazioni. La prima è la nota condizione di Kalman: *la matrice* $N \times N^2$

$$\left[A^{\frac{1}{2}}, B^T A^{\frac{1}{2}}, \dots, (B^T)^{N-1} A^{\frac{1}{2}}\right] \tag{25}$$

ha rango N (si veda [LM67], Teorema 5, pag. 81). Esiste una base di $\mathbb{R}^N$ tale che B assume la forma

$$\begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \dots & B_n \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix} \tag{26}$$

dove ogni B_j è una matrice di dimensione $p_{j-1} \times p_j$ e rango p_j, con

$$p_0 \geq p_1 \geq \ldots \geq p_n \geq 1, \qquad p_0 + p_1 + \ldots + p_n = N,$$

mentre $*$ è una matrice a coefficienti costanti arbitrari. Infine, posto

$$E(s) = \exp(-sB^T), \qquad \mathcal{C}(t) = \int_0^t E(s)AE^T(s)ds, \tag{27}$$

allora la matrice $\mathcal{C}(t)$ è definita positiva per ogni $t > 0$ (per l'equivalenza tra le precedenti affermazioni si veda [LP94]).

Il gruppo di Lie relativo all'operatore di Kolmogorov è definito dall'operazione seguente

$$(x,t) \circ (\xi,\tau) = (\xi + E(\tau)x, t + \tau), \qquad (x,t),(\xi,\tau) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{28}$$

Inoltre, $\mathcal{K}$ risulta invariante anche rispetto ad un gruppo di dilatazioni $(\delta_\lambda)_{\lambda>0}$ se, e solo se, ogni matrice indicata con $*$ in (26) è nulla. In tal caso le dilatazioni sono definite da

$$\delta_\lambda = \mathrm{diag}(\lambda\, I_{d_1}, \lambda^3 I_{d_2}, \ldots, \lambda^{2n+1} I_{d_{n+1}}, \lambda^2), \qquad \lambda > 0, \tag{29}$$

dove I_{d_k} denota la matrice identità $d_k \times d_k$. In tal caso, come abbiamo già fatto nel precedente paragrafo, decomponiamo lo spazio $\mathbb{R}^N$ come segue

$$\mathbb{R}^N = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n, \qquad x = x^{(0)} + x^{(1)} + \cdots + x^{(n)}, \tag{30}$$

con $x^{(k)} \in W_k$ scelti in modo che

$$\delta_\lambda(x^{(1)} + \cdots + x^{(n)}, t) = (\lambda\, x^{(1)} + \cdots + \lambda^{2n+1} x^{(n)}, \lambda^2 t), \tag{31}$$

per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ e $\lambda > 0$. Definiamo infine le seguenti norme

$$|x|_{\mathbb{K}} = \max\left\{ \left|x_i^{(k)}\right|^{\frac{1}{2k+1}} \ \mid\ k = 0, \ldots, n,\ i = 1, \ldots, p_k \right\}, \qquad \|(x,t)\|_{\mathbb{K}} = \max\left\{ |x|_{\mathbb{K}}, |t|^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Come detto in precedenza, consideriamo operatori che non sono necessariamente invarianti per dilatazioni, tuttavia l'ipotesi di Hölderianità dei coefficienti $a_{i,j}$ viene espressa in termini delle dilatazioni definite in (31) e della relativa norma. Specificatamente, richiediamo che esistano due costanti $C > 0$ ed $\alpha \in]0,1]$ tali che

$$|a_{i,j}(z) - a_{i,j}(\zeta)| \leq C \|z^{-1} \circ \zeta\|_{\mathbb{K}}^{\alpha} \qquad i,j = 1,\dots,p_0 \tag{32}$$

per ogni $z, \zeta \in \mathbb{R}^{N+1}$. Nel lavoro [DFP06], in collaborazione con Di Francesco, viene provata la seguente disuguaglianza di Harnack

Teorema 3.1. [Di Francesco-Polidoro] *Supponiamo che l'operatore $\mathcal{K}$ definito in* (22)*, soddisfi la condizione [C] e le* (23)*,* (32)*. Consideriamo il cilindro $H_r(z_0)$, definito dalle dilatazioni* (31)*, per opportuni $z_0 \in \mathbb{R}^{N+1}$ ed $r \in]0,1]$. Allora esistono due costanti positive θ ed M, che dipendono solo dall'operatore $\mathcal{K}$, tali che*

$$u(z_0 \circ z) \leq M\, u(z_0) \tag{33}$$

per ogni u soluzione non negativa di $\mathcal{K}u = 0$ in $H_r(z_0)$ e per ogni z nel cono positivo

$$\mathcal{P}_r = \left\{ (x, -t) \in \mathbb{R}^{N+1} \;\;|\;\; |x|_{\mathbb{K}}^2 \leq 2\,t,\ 0 < t \leq 2\,\theta^2 r^2 \right\}. \tag{34}$$

Si noti che anche la disuguaglianza di Harnack è stata enunciata in termini dell'insieme $H_r(z_0)$, che è definito mediante le dilatazioni $(\delta_\lambda)_{\lambda>0}$, pur non avendo fatto l'ipotesi che il corrispondente gruppo di Lie $\mathbb{K}$ sia omogeneo. Il nostro principale risultato, per gli operatori di tipo Kolmogorov-Fokker-Planck, è il seguente

Teorema 3.2. *Siano dati $T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ tali che $T_0 < T_1 \leq T_0 + 1$ e sia $u : \mathbb{R}^N \times]T_0, T_1[$ una soluzione positiva di $\mathcal{K}u = 0$. Esistono allora tre costanti positive $\theta \in]0,1[, h$ ed $M > 1$, che dipendono solo da $\mathcal{K}$, tali che*

$$u(y,s) \leq M^{1 + \frac{1}{h}\langle \mathcal{C}^{-1}(t-\tau)(x - E(t-\tau)\xi), x - E(t-\tau)\xi\rangle} u(x,t),$$

per ogni $(x,t), (y,s) \in \mathbb{R}^N \times]T_0, T_1[$ tali che $T_1 - \theta^2(T_1 - T_0) \leq s < t < T_1$.

Vale la pena osservare esplicitamente che il costo ottimo ha esattamente la stessa espressione che figura all'esponente della soluzione fondamentale di $\mathcal{K}$, nel caso dei coefficienti

$a_{i,j}$ costanti

$$\Gamma(x,t,y,s) = \frac{(4\pi)^{-\frac{N}{2}}}{\sqrt{\det \mathcal{C}(t-s)}} \exp\left(-\frac{1}{4} \langle \mathcal{C}^{-1}(t-s)(x - E(t-s)y), x - E(t-s)y \rangle \right),$$

Al fine di dimostrare il Teorema 3.2 occorre provare un risultato analogo al Lemma 2.1. Osserviamo preliminarmente che il problema (3) può essere enunciato nella forma equivalente

$$\begin{cases} \dot\gamma(\tau) = & B^T\gamma(\tau) + A^{\frac{1}{2}}\omega(\tau) \\ \gamma(0) = & x, \quad \gamma(t-s) = y, \end{cases} \tag{35}$$

dove $\omega(\tau) = (\omega_1(\tau), \dots, \omega_{p_0}(\tau), 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^N$.

Lemma 3.1. *Sia $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ una soluzione di (35), con $\omega_1, \dots, \omega_m \in L^2(0,T)$, e sia $r = \frac{\sqrt{2T}}{2\theta}$. Esiste allora una costante positiva h, che dipende solo dall'operatore $\mathcal{K}$ e da T, tale che*

$$(\gamma(\tau), -\tau) \in (x,t) \circ \mathcal{P}_r \quad \textit{per ogni } \tau \in [0,T] \quad \textit{tale che} \quad \int_0^\tau |\omega(\rho)|^2 d\rho \le h.$$

Dimostrazione. Un conto diretto mostra che $(\gamma(\tau), t-\tau) \in (x,t) \circ \mathcal{P}_r$ se, e solo se,

$$|\gamma(\tau) - E(-\tau)x|_{\mathbb{K}} \le 2\tau. \tag{36}$$

La soluzione di (35) è

$$\gamma(\tau) = E(-\tau)x + \int_0^\tau E(\rho - \tau)A^{\frac{1}{2}}\omega(\rho)d\rho. \tag{37}$$

Inoltre, se scomponiamo la matrice E definita in (27) analogamente a quanto fatto in (26):

$$E(s) = \begin{pmatrix} E_{0,0}(s) & E_{0,1}(s) & \dots & E_{0,r}(s) \\ E_{1,0}(s) & E_{1,1}(s) & \dots & E_{1,r}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{r,0}(s) & E_{r,1}(s) & \dots & E_{r,r}(s) \end{pmatrix} \tag{38}$$

allora risulta $E_{0,0}(s) = I_{p_0} + s\,O_0(s)$,

$$E_{j,0}(s) = \frac{(-s)^j}{j!}\big(I_{p_j} + s\,O_j(s)\big)B_j^T \dots B_1^T, \qquad j = 1, \dots, r,$$

dove O_j denota una matrice $p_j \times p_j$ i cui coefficienti dipendono con continuità da $s \in [0, +\infty[$. Di conseguenza, utilizzando la decomposizione (30), ed usando (37), troviamo

$$|(\gamma(\tau) - E(-\tau)x)^{(j)}| \leq \int_0^\tau (\tau - \rho)^j \left(c_j + (\tau - \rho)g_j(\tau - \rho)\right) |\omega(\rho)| d\rho, \qquad j = 0, \ldots, n,$$

per opportune costanti positive $c_0, \ldots, c_n$, ed opportune funzioni positive $g_0, \ldots, g_n \in C([0, +\infty[)$ che dipendono solamente dalle matrici A e B. Ne segue che

$$|(\gamma(\tau) - E(-\tau)x)^{(j)}|_{\mathbb{K}}^2 \leq c_j' \, \tau \left(\int_0^\tau |\omega(\rho)|^2 d\rho \right)^{\frac{1}{2j+1}} \qquad j = 0, \ldots, n,$$

per ogni $\tau \in [0, T]$, e per opportune costanti positive $c_0', \ldots, c_n'$ che dipendono solamente da T, A e B. La prova si conclude scegliendo h sufficientemente piccolo. $\square$

Lemma 3.2. *La soluzione* $\gamma : [0, t - s] \to \mathbb{R}^N$ *di* (35)*, che rende minimo il costo* (7)*, è quella relativa al controllo*

$$\omega(\tau) = \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^T E(\tau)^T \mathcal{C}^{-1}(t - s)(x - E(t - s)y),$$

il costo ottimo è

$$\Psi(\omega) = \int_0^{t-s} |\omega(\tau)|^2 d\tau = \langle \mathcal{C}^{-1}(t - s)(x - E(t - s)y), x - E(t - s)y \rangle.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione Hamiltoniana $\mathcal{H}$ relativa al problema di controllo (35):

$$\mathcal{H}(x, p, \omega) = pA^{\frac{1}{2}}\omega + p\, B^T x + p_0 |\omega|^2, \qquad p = (p_1, \ldots, p_N), \ x = (x_1, \ldots, x_N)^T. \tag{39}$$

La classica teoria del controllo per sistemi lineari autonomi assicura che il controllo ottimo è dato da

$$\omega(\tau) = \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^T p(\tau)^T, \qquad \text{per una certa soluzione di} \quad \dot{p} = -p\, B^T \tag{40}$$

(si veda [LM67], Teorema 3, pag. 180). Utilizziamo la precedente identità in (35), calcoliamo esplicitamente la soluzione. Troviamo

$$\gamma(\tau) = E(-\tau) \left(x + \mathcal{C}(\tau) p(0)^T \right)$$

per un certo vettore costante $p(0)$ che viene determinato dalla condizione $\gamma(t-s) = y$. Troviamo

$$p(0)^T = \mathcal{C}^{-1}(t-s)(E(t-s)y - x),$$

e questo conclude la prova. $\square$

Dimostrazione del Teorema 3.2. Sia $\gamma : [0, t-s] \to \mathbb{R}^N$ una soluzione di (35). Al fine di usare lo stesso argomento utilizzato nella prova della Proposizione 1.1, consideriamo l'insieme $H_r(x,t) \subset \mathbb{R}^N \times]T_0, T_1[$ con $r = \sqrt{t - T_0}$. Si noti che $r \in]0,1[$, in quanto $t - T_0 < T_1 - T_0 \leq 1$, possiamo quindi applicare il Teorema 3.1 ed ottenere la seguente stima

$$u(y,s) \leq M^{1+\frac{\Phi(\omega)}{h}} u(x,t),$$

dove $\Phi(\omega)$ è il costo del controllo γ. La conclusione segue allora dal Lemma 3.2. $\square$

4. Equazioni delle opzioni asiatiche

In questo paragrafo consideriamo l'operatore seguente,

$$Ku := x^2 \partial_{xx} u + x \partial_y u - \partial_t u, \quad (x,y,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times]0,T[. \tag{41}$$

Definiamo, per $z_0 = (x_0, y_0, t_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ ed $r \in]0,1[$, l'insieme

(42)

$$\widetilde{H}_r(z_0) = \left\{ (x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| < r x_0, -r^2 < t - t_0 < 0, |y - y_0 + x_0(t - t_0)| < r^3 x_0 \right\}$$

$$\widetilde{S}_r(z_0) = \left\{ (x,y,t) \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| < r x_0, -r^2 < t - t_0 < -\frac{r^2}{2}, \right.$$
$$\left. |y - y_0 + x_0(t - t_0)| < r^3 x_0 \right\}$$

Proposizione 4.1. *Siano $z_0 \in \mathbb{R}^3$ ed $r \in]0, 1/2[$. Se u è una soluzione positiva di $Ku = 0$ in $\widetilde{H}_r(z_0)$, allora*

$$u(z) \leq M\, u(z_0)$$

per ogni $z \in \widetilde{S}_{\theta r}(z_0)$. Le due costanti $\theta \in]0,1[$ ed $M > 0$ dipendono solamente dall'operatore K.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che la funzione $v(x, y, t) = u(x_0 x, x_0 y, t)$ è una soluzione positiva di $Ku = 0$ nel dominio

$$\widetilde{H}_r\left(1, \frac{y_0}{x_0}, t_0\right) = \left\{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : |x - 1| < r, -r^2 < t - t_0 < 0, \left|y - \frac{y_0}{x_0} + (t - t_0)\right| < r^3\right\}$$

non è dunque restrittivo supporre $x_0 = 1$. Definiamo ora una funzione a nel modo seguente

$$a(x, y, t) = \begin{cases} 1/4 & \text{per } (x, y, t) \in]0, 1/2[\times\mathbb{R}^2, \\ x^2 & \text{per } (x, y, t) \in]1/2, 3/2[\times\mathbb{R}^2, \\ 9/4 & \text{per } (x, y, t) \in]3/2, \infty[\times\mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{43}$$

Essendo $r \in]0, 1/2[$, v risulta essere una soluzione di

$$\mathcal{K}_a v = a\partial_{xx} v + x\partial_y v - \partial_t v = 0,$$

nell'insieme $\widetilde{H}_r\left(1, \frac{y_0}{x_0}, t_0\right)$ e possiamo considerare $\mathcal{K}_a$ come uno degli operatori della forma (22). La geometria naturale per l'operatore $\mathcal{K}_a$ è quella del gruppo di Kolmogorov (28) relativo all'operatore $\partial_{xx}u + x\partial_y u - \partial_t u$, ossia quella per cui le traslazioni e le dilatazioni sono

$$(x, y, t) \circ (\xi, \eta, \tau) = (x + \xi, y + \eta - x\tau, t + \tau), \qquad \delta_\lambda(x, y, t) = (\lambda x, \lambda^3 y, \lambda^2 t).$$

Si noti che il coefficiente a è Hölderiano (di esponente 1) rispetto alle suddette operazioni di gruppo, inoltre è limitato e limitato dal basso. Possiamo quindi applicare il Teorema 3.1 alla funzione v. Il risultato segue allora dal fatto che $\widetilde{H}_r\left(1, \frac{y_0}{x_0}, t_0\right) = H_r\left(1, \frac{y_0}{x_0}, t_0\right)$ e che $\widetilde{S}_{\theta r}\left(1, \frac{y_0}{x_0}, t_0\right) = S_{\theta r}\left(1, \frac{y_0}{x_0}, t_0\right)$. □

Come conseguenza diretta otteniamo il

Corollario 4.1. *Se u è una soluzione positiva di $Ku = 0$ in $\widetilde{H}_r(z_0)$, allora*

$$u(z) \leq M\, u(z_0)$$

per ogni z nel cono positivo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_r(z_0) = \Big\{&(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : 0 < t_0 - t < \theta^2 r^2, |x - x_0| < (t_0 - t)^{\frac{1}{2}} x_0, \\ &|y - y_0 - (t_0 - t)x_0| < (t_0 - t)^{\frac{3}{2}} x_0\Big\}. \end{aligned} \tag{44}$$

Proposizione 4.2. *Sia* $u : \mathbb{R}^2 \times]T_0, T_1[$ *una soluzione positiva di* $Ku = 0$*. Esistono tre costanti positive* $\theta \in]0,1[, h$ *ed* $M > 1$*, che dipendono solamente dall'operatore* K*, tali che*

$$u(x,y,t) \leq M^{1+\max\left\{t_0-t, \frac{\Phi(\omega)}{h}\right\}} u(x_0,y_0,t_0).$$

per ogni $(x_0,y_0,t_0),(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times]T_0,T_1[$ *tali che* $T_1 - \theta^2(T_1 - T_0) \leq t < t_0 < T_1$*. Qui* $\gamma : [0, t_0 - t] \to \mathbb{R}^2$ *è una soluzione di*

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dot{\gamma}(\tau) = & (\omega(\tau)\gamma_1(\tau), \gamma_1(\tau)), \\ \gamma(0) = & (x_0,y_0), \quad \gamma(t_0-t) = (x,y). \end{array} \right. \tag{45}$$

e

$$\Phi(\omega) = \int_0^{t_0-t} \omega^2(\tau)\, d\tau$$

è il costo del controllo γ*.*

Dim. Sia $\gamma : [0, t_0 - t] \to \mathbb{R}^2$ una soluzione di (45) e sia $T = \min\left\{t_0 - t, 1\right\}$. Proveremo innanzitutto che esiste una costante positiva h, che dipende solo dall'operatore K, tale che

$$(\gamma(s), t_0 - s) \in \mathcal{P}_r(x_0,y_0,t_0) \quad \text{per ogni } s \in [0,T] \text{ tale che } \int_0^s \omega^2(\tau)\, d\tau \leq h. \tag{46}$$

Un conto diretto mostra che

$$\gamma(s) = \left(x_0 e^{\int_0^s \omega(\tau)d\tau}, y_0 + x_0 \int_0^s e^{\int_0^\tau \omega(\rho)d\rho} d\tau \right),$$

quindi, se scegliamo $h \leq \log^2(2)$, troviamo

$$\left| \int_0^s \omega(\tau)d\tau \right| \leq \sqrt{s} \left(\int_0^s \omega^2(\tau)d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{h}\sqrt{s} \leq \log(1+\sqrt{s}),$$

per ogni $s \in [0,T]$, e quindi

$$\left| e^{\int_0^s \omega(\tau)d\tau} - 1 \right| \leq e^{\left|\int_0^s \omega(\tau)d\tau\right|} - 1 \leq \sqrt{s}$$

per ogni $s \in [0,T]$. Come diretta conseguenza si ha che $|\gamma_1(s) - x_0| \leq \sqrt{s}x_0$ e che $|\gamma_2(s) - y_0 - sx_0| \leq s^{\frac{3}{2}} x_0$ per ogni $s \in [0,T]$. Questo dimostra (46).

Utilizziamo ora lo stesso ragionamento con cui abbiamo dimostrato la Proposizione 1.1: poniamo

$$k = \max\left\{ j \in \mathbb{N} : j\, h < \int_0^{t_0-t} |\omega(\tau)|^2 d\tau \right\},$$

ed usiamo $k+1$ volte la disuguaglianza di Harnack del Corollario 4.1. Il termine $t_0 - t$ che figura all'esponente è dovuto al fatto che (46) vale per $s \leq 1$, quindi bisogna applicare la disuguaglianza di Harnack almeno $[t_0 - t] + 1$ volte (qui $[s]$ indica la perte intera di s). Questo conclude la prova.

Riferimenti bibliografici

[AB94] Giles Auchmuty and David Bao. Harnack-type inequalities for evolution equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 122(1):117–129, 1994.

[Aro67] D. G. Aronson. Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:890–896, 1967.

[AS67] D. G. Aronson and James Serrin. Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 25:81–122, 1967.

[Bal05] V. Bally. Lower bounds for the density of locally elliptic Ito processes. *Talk given in the meeting Harnack inequalities and positivity for solutions of partial differential equations, Cortona, June 12-18, 2005.*

[BP06] U. Boscain and S. Polidoro. Non local Harnack inequalities for a class of partial differential equations. *Proceedings of the 5th ISAAC Congress, 25-30 July, 2005 University of Catania*, 2006.

[BPV01] E. Barucci, S. Polidoro, and V. Vespri. Some results on partial differential equations and Asian options. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 11(3):475–497, 2001.

[CY92] Huai Dong Cao and Shing-Tung Yau. Gradient estimates, Harnack inequalities and estimates for heat kernels of the sum of squares of vector fields. *Math. Z.*, 211(3):485–504, 1992.

[DFP06] M. Di Francesco and S. Polidoro. Schauder estimates, Harnack inequality and Gaussian lower bound for Kolmogorov type operators in non-divergence form. *preprint AMS Acta, Università di Bologna*, 2006.

[JSC86] David S. Jerison and Antonio Sánchez-Calle. Estimates for the heat kernel for a sum of squares of vector fields. *Indiana Univ. Math. J.*, 35(4):835–854, 1986.

[KL04] A. E. Kogoj and E. Lanconelli. An invariant Harnack inequality for a class of hypoelliptic ultraparabolic equations. *Mediterr. J. Math.*, 1:51–80, 2004.

[KS87] S. Kusuoka and D. Stroock. Applications of the Malliavin calculus. III. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 34(2):391–442, 1987.

[LM67] E. B. Lee and L. Markus. *Foundations of optimal control theory.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1967.

[LP94] E. Lanconelli and S. Polidoro. On a class of hypoelliptic evolution operators. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 52(1):29–63, 1994. Partial differential equations, II (Turin, 1993).

[LY86] P. Li and S. T. Yau. On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Math.*, 156:153–201, 1986.

[Pol97] S. Polidoro. A global lower bound for the fundamental solution of Kolmogorov-Fokker-Planck equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 137(4):321–340, 1997.

[PP04] A. Pascucci and S. Polidoro. On the Harnack inequality for a class of hypoelliptic evolution equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356:4383–4394, 2004.

[PP05] A. Pascucci and S. Polidoro. Harnack inequalities and Gaussian estimates for a class of hypoelliptic operators. *to appear in Trans. Amer. Math. Soc.*, 2005.

[VSCC92] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and T. Coulhon. *Analysis and geometry on groups*, volume 100 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.