Seminario di Analisi Matematica

Dipartimento di Matematica

dell'Università di Bologna

Anno Accademico 2006-07

Luca Capogna[1], Giovanna Citti[2], Maria Manfredini[3]

Regolarità delle superfici minime nel gruppo di Heisenberg monodimensionale

24 maggio 2007

[1]Department of Mathematical Sciences, University of Arkansas, Fayetteville, AR 72701

[2]Dipartimento di Matematica, Piazza Porta S. Donato 5, 40126 Bologna, Italy

[3]Dipartimento di Matematica, Piazza Porta S. Donato 5, 40126 Bologna, Italy

Abstract

We study regularity properties of intrinsic vanishing viscosity minimal surfaces in the first Heisenberg group. In the case of minimal intrinsic graphs, the minimality condition is expressed as a second order equation, represented as a sum of squares of nonlinear vector fields. Here we establish intrinsic smoothness of the solution, which means that it is smooth along the Legendrian foliation, but it is not necessarily smooth in the euclidean sense.

1. Introduzione

L'algebra di Heisenberg è costuita da R^3, e da una scelta di due campi vettoriali in ogni punto. Se denotiamo (x_1, x_2, x_3) le coordinate dello spazio, una base orizzontale dell'algebra di Heisenberg si rappresenta nella forma

$$X = \partial_1 + x_3 \partial_2, \quad Z = \partial_3. \tag{1}$$

Si riconosce immediatamente che

$$[Z, X] = \partial_2,$$

pertanto, i campi considerati verificano la condizione di Hörmander di generare tutto lo spazio tangente in ogni punto. La nozione di superficie regolare è stata studiata in [14], [9], e si può definire localmente come luogo degli zeri di una funzione di classe C^1, con gradiente orizzontale non singolare:

$$\{(x_1, x_2, x_3) : \ f(x_1, x_2, x_3) = 0 : (Xf, Zf) \neq 0\}.$$

Questa superficie si può rappresentare localmente come grafico di una funzione $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\{(x_1, x_2, x_3) : \ x_3 = u(x_1, x_2)\}.$$

Poiché siamo interessati allo studio di grafici, indicheremo $x = (x_1, x_2)$ il generico punto di R^2. Sul dominio di u risultano definiti i campi che si ottengono come proiezione dei campi X e Z. Poiché Z ha proiezione nulla sul dominio di u, allora risulta definito il solo campo

$$X_u = \partial_1 + u(x)\partial_2. \tag{2}$$

Inoltre il campo $X_2 = \partial_2$ è definito come proiezione del commutatore. La distanza naturale associata a questi campi sarà definita come segue:

Definizione 1.1. *Per ogni $x, \bar{x} \in R^2$ se*

$$x = exp\big(e_1 X_u + e_2 X_2\big)(\bar{x}),$$

definiamo

$$d_u(x, \bar{x}) = \big(|e_1|^4 + |e_2|^2\big)^{1/4}.$$

Se la funzione f che definisce la superficie è differenziabile, la funzione u sarà differenziabile, ovvero:

$$u(x) = u(\bar{x}) + e_1 X_u u(\bar{x}) + o(d_u(x, \bar{x}))$$

(si vedano [9] e [1]). Quindi il teorema delle funzioni implicite si enuncia in modo del tutto standard in questo setting, con la sola differenza che il campo X_u è non lineare, poiché dipende esplicitamente da u. Se poi f è di classe C^2, allora u è derivabile anche rispetto a ∂_2.

La nozione di curvatura media è stata recentemente determinata come variazione prima dell'area in [11], [17], [19], [24]. Se la superficie è espressa come insieme di livello di una funzione f, allora la sua curvatura si esprime

$$X_u\Big(\frac{X_u f}{\sqrt{|Zf|^2 + |X_u f|^2}}\Big) + Z\Big(\frac{Zf}{\sqrt{|Zf|^2 + |X_u f|^2}}\Big).$$

Se la superficie è espressa come grafico, si rappresenterà nella forma

$$X_u\Big(\frac{X_u u}{\sqrt{1 + |X_u u|^2}}\Big),$$

(si vedano [2] e [12]). Si può parlare di superfici minime, o come minimi del funzionale dell'area, o, come faremo in questo seminario, come soluzioni dell'equazione di curvatura nulla. Sviluppando formalmente l'equazione precedente, la condizione di curvatura si esprime

$$X_u^2 u = 0. \tag{3}$$

L'esistenza di superfici minime è stata provata da [16] con tecniche variazionali e in [5] con tecnoche di viscosità. Le proprietà delle superfici minime sono state diffusamente studiate in [21], [6], [23], teoremi di tipo Berstein sono stati ottenuti in [15], [2] e [20], superfici con curvatua costante sono stati studiati in [17],

In particolare si sa che le superfici di classe C^2 sono foliate in geodetiche [6]. Infatti se la superficie è regolare per ogni punto non caratteristico, passa una ed una sola curva orizzontale, che giace sulla superficie e che ammette una parametrizzazione

$$\bar{\gamma}' = X + kZ.$$

La curvatura sul piano di contatto k' di questa curva in un punto t coincide con la curvatura della superficie nel punto $\bar{\gamma}(t)$. In particolare se la superficie è minima, allora è rigata in geodetiche. Corrispondentemente, se la superficie è un grafico, possiamo pensare che il dominio della funzione u sia rigato dalle curve integrali γ del campo X_u, e la curva $\bar{\gamma}$, tridimensionale si esprime come $(\gamma, u(\gamma))$.

Esempi di superfici minime non regolari sono state forntite da Pauls [22] e da Serra Cassano, quindi rimane aperto il problema della regolarità delle soluzioni viscose, e della loro foliazione.

Formalmente la situazione è molto simile a quella che si presenta studiando l'equazione di Levi. Anche questa equazione è un'equazione rappresentabile come somma di quadrati di campi vettoriali non lineari nella forma

$$(1 + (\partial_t u)^2)(X_u^2 + Y_u^2) = k \tag{4}$$

per opportuni campi nonlineari X_u e Y_u. In [7], [10] è stata introdotta una tecnica che permette di dimostrare che, se u è soluzione viscosa, allora il suo dominio è foliato in dischi analitici. La struttura dell'equazione è molto simile. Possiamo quindi pensare di utilizzare una tecnica simile a quella utilizzata in [7].

L'operatore X_u^2 è un operatore quasilineare del secondo ordine, la cui forma caratteristica è non negativa e ha minimo autovalore identicamente nullo in ogni punto. Tuttavia per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile studiare la sua regolarizzazione ellittica:

$$L_\varepsilon := L + \varepsilon^2 \partial_2^2 u. \tag{5}$$

Daremo poi la seguente definizione:

Definizione 1.2. *Si dice che la funzione $u \in Lip(\Omega)$ è una soluzione vanishing viscosity dell'equazione (3) se esiste una successione di numeri positivi ε_j tali che $\varepsilon_j \to 0$ dove $j \to \infty$, e una successione di soluzioni (u_j) in $C^\infty(\Omega)$ tali che*

$$L_{\varepsilon_j} u_j = X_{u_j}^2 u_j + \varepsilon_j^2 \partial_y^2 u_j = 0 \quad in \;\; \Omega \;\; \forall j \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Inoltre (u_j) è limitata in $Lip(\Omega)$ e convergente puntualmente quasi ovunque a u in Ω.

Qui dimostriamo il risultato seguente, negli spazi di Sobolev classici: $W^{1,p}_{Eloc}(\Omega)$.

Proposizione 1.1. *Se u è una soluzione di viscosità vanishing, allora per ogni $p > 1$, e per ogni k esiste*

$$X_u^k u \in W^{1,p}_{E,loc}(\Omega).$$

In particolare $X_u^2 u$ è Holderiana e $X_u^2 u = 0$, quasi ovunque.

Poiché u è una soluzione di viscosità, questo risultato viene provato con stime a priori per ogni elemento della soluzione approssimante, e poi passando al limite per $\varepsilon \to 0$.

Conseguentemente deduciamo

Teorema 1.1. *Il dominio di u, è foliato polinomi del secondo ordine. Per ogni fissato punto x esiste un unico polinomio γ che passa per il punto stesso. La funzione u è differenziabile nel senso di Lie lungo γ e l'equazione riduce a*

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(\gamma(t)) = 0.$$

2. Stime a priori per l'operatore linearizzato

In questo capitolo assumiamo che u sia una funzione fissata di classe C^∞ su un aperto Ω di $\mathbb{R}^2$. Facciamo poi l'ipotesi che

$$M = ||u||_{L^\infty(\Omega)} + ||\nabla_E u||_{L^\infty(\Omega)} < \infty. \tag{7}$$

Fissata una funzione u, le derivazioni X_u, Y possono essere appicate ad ogni funzione sufficientemente regolare. Per semplicita' indicheremo $X = X_u$, $Y = \varepsilon\partial_2$ e $v = \partial_2 u$ e chiameremo gradiente:

$$\nabla_\varepsilon f = (Xf, Yf)$$

(dove il campo X dipende da u, e Y dipende da ε). Introduciamo spazi di Sobolev $W^{m,p}_{\varepsilon,loc}(\Omega)$ naturali e definiti come segue:

$$f \in W^{1,p}_{\varepsilon,loc}(\Omega) \quad se \quad \nabla_\varepsilon f \in L^p_{loc},$$

e

$$f \in W^{m,p}_{\varepsilon,loc}(\Omega) \ \ se \ \ \nabla_\varepsilon f \in W^{m-1,p}_{\varepsilon,loc}(\Omega).$$

Diciamo operatore linearizzato L_ε l'operatore

$$L_\varepsilon f = X^2 f + Y^2 f,$$

e proviamo ora una stima *a priori* per soluzioni z dell'equazione linearizzata

$$L_\varepsilon z = f \tag{8}$$

negli spazi di Sobolev.

La tecnica che utilizziamo è modellata sul metodo iterativo di Moser. Mentre questo è basato sulla disuguaglianza di Sobolev e la diseguaglianza di Cacciopoli, qui si sostituisce la diseguaglianza di Sobolev con una diseguaglianza di interpolazione. Non e' infatti chiaro se valgono disuguaglianze di Sobolev uniformi in ε per i campi considerati.

2.1. **Proprietà delle soluzioni e delle loro derivate.** Notiamo che, se z è soluzione regolare di (8) allora le sue derivate intrinseche Xz, Yz sono ancora soluzioni della stessa equazione con un diverso secondo membro.

Proposizione 2.1. *Le derivate lungo le direzioni X ed Y di ogni soluzione regolare dell'equazione* (8), *risolvono la PDE*

$$L_\varepsilon z = f_0 + f_1 Xz + f_2 Yz, \tag{9}$$

per una scelta opportuna di funzioni f_i, $i = 0, 1, 2$.

Dim Se z è una soluzione regolare di (8) allora differenziando rispetto a X si vede che la funzione $s_1 = Xz$ è soluzione dell'equazione

$$L_\varepsilon s_1 = Xf + \partial_2 u Y^2 z + Y(\partial_2 u Yz). \tag{10}$$

Derivando rispetto a Y si vede invece che la funzione $s_2 = Yz$ è soluzione dell'equazione

$$L_\varepsilon s_2 = Yf + (\partial_2 u)^2 s_2 + \partial_2 u X s_2 + X(\partial_2 u s_2). \tag{11}$$

In particolare, poiché u è soluzione di (8), allora dal lemma precedente si deduce

Lemma 2.1. *La funzione $v = \partial_2 u$ è soluzione dell'equazione*

$$L_\varepsilon v = v^3 + 3vXv + \partial_2 f. \tag{12}$$

2.2. **Una diseguaglianza di interpolazione.**

Proposizione 2.2. *Per ogni $p \geq 3$, esiste una costante C, che dipende da p, e dalla costante M in (7) tale che per ogni funzione $z \in C^\infty(\Omega)$, per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, e ogni $\delta > 0$*

$$\int |Xz|^p \phi^{2p} \leq \frac{C}{\delta} \int |z|^{4p} \phi^{2p} + \delta \int |\nabla_\varepsilon(|Xz|^{(p-1)/2})|^2 \phi^{2p}.$$

Una relazione analoga è soddisfatta se X è sostituito da Y.

Dim E' una variante della Prop. 4.2 in [8]. Si ha

$$\int |Xz|^p \phi^{2p} = \int Xz|Xz|^{p-1} segn(Xz)\phi^{2p} =$$

(integrando per parti e usando il fatto che $X^* = -X - \partial_2 u$)

$$= -\int \partial_2 u z|Xz|^{p-1} segn(Xz)\phi^{2p} - (p-1)\int zX^2 z|Xz|^{p-2}\phi^{2p}$$

$$-(2p)\int z|Xz|^{p-1} segn(Xz)\phi^{2p-1} X\phi. \tag{13}$$

Il risultato segue subito, con una disuguaglianza di Hölder.

2.3. **Disuguaglianza di tipo Cacciopoli.** Proviamo ora una disuguaglianza di Cacciopoli per derivate in direzione X, Y delle soluzione dell'equazione (8). Per la Proposizione 2.1 queste derivate sono soluzione di (9), quindi ci concentriamo su questa PDE.

Lemma 2.2. *Supponiamo che $\widetilde{f}_0 \in L^1_{loc}(\Omega)$, e che*

$$L_\varepsilon z = \widetilde{f}_0. \tag{14}$$

Per ogni $p \geq 3$ esiste una costante C_1 che dipende solo da p, dalla costante M in (7) e independente da ε e z tale che per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, si abbia

$$\int |\nabla_\varepsilon(|z|^{(p-1)/2})|^2 \phi^2 \leq C_1 \int |z|^{p-1}\big(\phi^2 + |\nabla_\varepsilon \phi|^2\big) - \int \widetilde{f}_0 |z|^{p-3} z\phi^2.$$

Come conseguenza dei risultati precedenti ottieniamo una stima a priori del gradiente della soluzione

Teorema 2.1. *Sia $p \geq 3$ un numero fissato e sia u una funzione regolare. Siano $f_0, f_1, f_2 \in C^\infty(\Omega)$, e sia z una soluzione dell'equazione (9). Per ogni $\delta > 0$ esiste una costante $C > 0$ che dipende da δ, p e dalla costante M in (7) ma indipendente da ε e z tale che per ogni funzione non negativa $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, si ha*

$$\int |\nabla_\varepsilon z|^p \phi^{2p} + \int |\nabla_\varepsilon \big(|\nabla_\varepsilon z|^{(p-1)/2}\big)|^2 \phi^{2p} \leq$$

$$\leq C \Big[\int |z|^{4p} \phi^{2p} + \int \big(\phi^2 + |\nabla_\varepsilon \phi|^2\big)^p$$

$$+ C \int \big(|f_0|^{\frac{2p}{3}} + |f_1|^{2p} + |f_2|^{2p}\big)\phi^{2p} \Big] + \delta \int |Y(\partial_2 u)|^p \phi^{2p}$$

Dim Poiché z è soluzione dell'equazione (9) allora per la Proposizione 2.1, $s_1 = Xz$ e $s_2 = Yz$ soddisfano la medesima equazione, con un secondo membro che dipenderà dalle derivate di u:

$$L_\varepsilon s_1 = -Y(\partial_2 u)Yz + 2Y(\partial_2 u Yz) + X(f_0 + f_1 Xz + f_2 Yz).$$

Quindi s_1 e s_2 verificano una disuguaglianza di Cacciopoli:

$$\int |\nabla_\varepsilon (|s_1|^{(p-1)/2})|^2 \phi^{2p} + \int |\nabla_\varepsilon (|s_2|^{(p-1)/2})|^2 \phi^{2p} \leq \tag{15}$$

$$C \Big[\int \big(s_1^p + s_2^p\big)|\phi|^{2p} + \int \big(|\nabla_\varepsilon \phi|^2| + \phi^2\big)|\phi|^{2p-2} + \int (|f_0|^{\frac{2p}{3}} + |f_1|^{2p} + |f_2|^{2p})\phi^{2p} \Big].$$

A questo punto si usa la diseguaglianza di interpolazione, in luogo della classica diseguaglianza di Sobolev,

$$\int (|s_1|^p + |s_2|^p)\phi^{2p} \leq$$

$$\frac{C}{\delta} \int |z|^{4p} \phi^{2p} + \delta \Big(\int |\nabla_\varepsilon (|s_1|^{(p-1)/2})|^2 \phi^{2p} + \int |\nabla_\varepsilon (|s_2|^{(p-1)/2})|^2 \phi^{2p} \Big) \leq$$

$$\leq \frac{C}{\delta} \int |z|^{4p} \phi^{2p} + \delta \int (|\nabla_\varepsilon \phi|^2 + \phi^2)\phi^{2p-2} +$$

$$+ \delta \int (|s_1|^p + |s_2|^p)\phi^{2p} + \delta \int (|f_0|^{\frac{2p}{3}} + |f_1|^{2p} + |f_2|^{2p})\phi^{2p}.$$

Pertanto se δ e' sufficientemente piccolo, si ha la tesi.

Iterando il precedente risultato si trova

Teorema 2.2. *Sia $p \geq 3$ e sia m un intero positivo. Supponiamo che $f \in C^\infty(\Omega)$, e che z sia soluzione dell'equazione (8) in Ω. Se $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$ allora ci sono costanti C e $\widetilde{C}$, che dipendono da p, Ω_i e da M in (7), ma sono indipendenti da ε o z tali che la soluzione soddisfa la stima seguente*

$$||z||^p_{W^{m+1,p}_\varepsilon(\Omega_1)} + \sum_{|I|=m+1} |||\nabla^I z|^{(p-1)/2}||^2_{W^{1,2}_\varepsilon(\Omega_1)} \leq$$

$$\leq C\Big(||f||^{2p/3}_{W^{m,2p/3}_\varepsilon(\Omega_2)} + ||v||^{2p}_{W^{m,2p}_\varepsilon(\Omega_2)} + ||z||^{4p}_{W^{m,4p}_\varepsilon(\Omega_2)}\Big).$$

3. Stime delle soluzioni viscose

In questo capitolo diamo la prova della regolarità per soluzioni viscose di (3).

Sia u una soluzione viscosa di (3) in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, e (u_j) indichi la successione approssimante, come definito in Definition 1.2. Per ogni indice j e ogni funzione u_j poniamo

$$X_j = \partial_x + u_j\partial_2, \text{ and } Y_j = \varepsilon_j\partial_2.$$

Inoltre il gradiente associato sarà denotato ∇_{ε_j} e $W^{k,p}_{\varepsilon_j}(\Omega)$ saranno gli spazi di Sobolev associati. Definiamo $X = \partial_x + u\partial_2$, o $\nabla_0 = X$ la derivazione associata ad u, mentre ∇_E e $W^{k,p}_E(\Omega)$ sono gli usuali gradienti e spazi di Sobolev.

Dalle stime per l'equazione lineare si ottiene subito

Proposizione 3.1. *Sia M la costante che compare in* (7)*. Per ogni soluzione u_j per ogni palla $B(R) \subset \Omega$, di raggio R, per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\theta < 1$, e per ogni $p \geq 1$ c'è una costante $C_{Mp\theta kR} > 0$, independente da j tale che*

$$||\nabla^I_\varepsilon v_j||_{L^p(B(\theta R))} + ||\nabla^I_\varepsilon u_j||_{L^p(B(\theta R))} \leq C_{MpR\theta k}$$

per ogni multiindice I con $|I| \leq k$.

Da questa stima a priori si ottiene un risultato di convergenza per le derivate intrinseche di ogni ordine delle funzioni u_j.

Proposizione 3.2. *Per ogni $k \in N$ per ogni $p > 1$ e per ogni multiindice I di lunghezza k, la successione $(\nabla^I_{\varepsilon_j} u_j)$ è limitata in $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Inoltre*

$$\nabla^I_{\varepsilon_j} u_j \to \nabla^I_0 u \ \ as \ \ j \to +\infty, \ \ debolmente \ \ in \ \ W^{1,p}_E(\Omega).$$

Dim Usando la Proposizione 3.1, il fatto che $v = \partial_2 u$, e scambiando l'ordine di derivazione, deduciamo che per ogni palla $B(R) \subset\subset \Omega$ esiste $\widetilde{C}$ tale che

$$||\partial_2 \nabla^I_{\varepsilon_j} u_j||_{L^p(B(R))} \leq \widetilde{C},$$

$$||\partial_1 \nabla^I_{\varepsilon_j} u_j||_{L^p(B(R))} \leq ||X_j \nabla^I_{\varepsilon_j} u_j||_{L^p(B(R))} + ||u_j \partial_2 \nabla^I_{\varepsilon_j} u_j||_{L^p(B(R))} \leq \widetilde{C},$$

pertanto $(\nabla^I_{\varepsilon_j} u_j)$ è limitato in $W^{1,p}_{Eloc}(\Omega)$ per ogni $p > 1$, e per ogni multi indice I. Proviamo che il limite debole è $\nabla^I_0 u$. Se $|I| = 1$ l'affermazione è vera . Se I è un multiindice tale che $|I| = k$, possiamo supporre che $I = (1, I')$, dove $|I'| = k - 1$. Possiamo anche supporre per ipotesi induttiva che

$$\partial_2 u_j \to \partial_2 u \ \ as \ \ j \to \infty \ \ weakly \ \ in \ \ L^p(\Omega)$$

$$u_j \to u \ \ as \ \ j \to \infty \ \ in \ \ L^p_{loc}(\Omega)$$

$$\nabla^{I'}_{\varepsilon_j} u_j \to \nabla^{I'}_0 u \ \ as \ \ j \to \infty \ \ in \ \ L^p_{loc}(\Omega).$$

Allora integrando per parti

$$lim_{j\to\infty} \int \nabla^I_{\varepsilon_j} u_j \phi = -lim_{j\to\infty} \int \nabla^{I'}_{\varepsilon_j} u_j X_j \phi - \int \partial_2 u_j \nabla^{I'}_{\varepsilon_j} u_j \phi =$$

$$= -\int \nabla^{I'}_0 u X \phi - \int \partial_2 u \nabla^{I'}_0 u \phi,$$

e questo assicura la convergenza debole di $(\nabla^I_{\varepsilon_j} u_j)$ a $\nabla^I_0 u$.

Possiamo provare la regolarità della funzione limite u:

Proposizione 3.3. *Per ogni k, per ogni $p > 1$ e per ogni multiindice I, tale che $|I| = k$, la funzione $z = \nabla^I_0 u$ appartiene a $W^{1,p}_{Eloc}(\Omega)$ ed e' soluzione di*

$$X^2 z = 0 \quad in \ \ \Omega. \tag{16}$$

In particulare

$$\nabla^I_0 u \in C^\alpha_{loc}(\Omega) \tag{17}$$

per ogni $\alpha < 1$.

Dim Poiché u è soluzione di $X^2u = 0$ in Ω, allora tutte le sue derivate sono soluzone della stessa equazione. Dalla Proposizione 3.2 si ottiene immediatamente che $\nabla_0^I u$ appartiene a $W^{1,p}_{Eloc}(\Omega)$ per ogni I, e per ogni $p > 1$, per cui (17) è soddisfatta per il teorema classico di immersione di Sobolev.

4. Dalle derivate deboli alle derivate di Lie

In questa sezione proviamo che la soluzione è effettivamente derivabile nel senso di Lie, e non soltanto in senso debole.

Definizione 4.1. *Sia* $x_0 \in \Omega$ *e sia* γ *soluzione del problema* $\gamma' = X(\gamma)$.

Si dice che una funzione $f \in C^\alpha_{loc}(\Omega)$, *con* $\alpha \in]0, 1[$, *è derivabile nel senso di Lie nella direzione del campo vettoriale* X *in* ξ_0 *se esiste*

$$\frac{d}{dh}(f \circ \gamma)_{|h=0},$$

e la denoteremo $Xf(x_0)$.

Utilizzeremo una disuguaglianza tipo Morrey, per dedurre stime puntuali di f dalle stime integrali. Per ottenere sviluppi di Taylor in cui compaia soltanto la derivata rispetto a X.

Operiamo un lifting in uno spazio di dimensione 3, introducendo una variabile aggiuntiva s. Le nuove variabili saranno indicate $\xi = (x, s) \in \Omega\times] - 1, 1[\subset R^3$. Se x_0 è fissato in Ω, indichiamo $\xi_0 = (x_0, 0)$ la variabile liftata e introduciamo dei campi

$$X_{\xi_0} = \partial_x + (u(x_0) + s)\partial_2, \quad S = \partial_s.$$

Questi sono campi vettoriali a coefficienti C^∞, in R^3 che generano un'algebra libera di step 2. Pertanto si tratta di un'algebra di Heisenberg ed è possibile introdurre un cambio di variabile canonico: ϕ_{ξ_0} che cambia X_{ξ_0} e S in due campi vettoriali X_H and Y_H, generatori dell'algebra di Heisenberg e indipendenti da ξ_0. Se denotiamo d_H la distanza di controllo associata a questi ultimi campi, e d_{ξ_0} la distanza associata a X_{ξ_0} and S, vale la relazione seguente:

$$d_{\xi_0} = d_H \circ \phi_{\xi_0}.$$

Non è difficile vedere che la restrizione della distanza d_{ξ_0} al piano $s = 0$ è localmente equivalente alla distanza associata al campo X_u, nel senso che esiste una costante positiva M tale che per ogni $x, x_0 \in R^2$ posto $\xi_0 = (x_0, 0), \xi = (x, 0)$ si ha

$$M^{-1} d_{\xi_0}(\xi, \xi_0) \leq d_u(x, x_0) \leq M d_{\xi_0}(\xi, \xi_0). \tag{18}$$

Ricordiamo anche che l'operatore di Kohn $X_H^2 + Y_H^2$ ha una soluzione fondamentale Γ_H, determinata esplicitamente in [13]. La soluzione fondamentale dell'operatore $X_{\xi_0}^2 + S^2$ e' della forma $\Gamma_{\xi_0}(\xi, \zeta) = \Gamma_H(\phi_{\xi_0}(\xi), \phi_{\xi_0}(\zeta))$. Come conseguenza soddisfa la relazione seguente:

$$\Gamma_{\xi_0}(\xi, \zeta) = \Gamma_H(\phi_{\xi_0}(\xi), \phi_{\xi_0}(\zeta)) \leq$$

$$\leq C d_H^{-N+2}(\phi_{\xi_0}(\xi), \phi_{\xi_0}(\zeta)) \leq C d_{\xi_0}^{-N+2}(\xi, \zeta) \quad \forall \xi, \zeta$$

per una constante C .

Vedremo che dalle stime di tipo Morrey per l'operatore Kohn Laplacian, si deducono stime di tipo Morrey per i campi X, S.

Lemma 4.1. *Se $z : \Omega \subset R^2 \to R$ verifica*

$$Xz \in C^\alpha_{d_u loc}(\Omega), \quad \partial_2 z \in L^q_{loc}(\Omega) \ \ con \ \ q > N = 4$$

allora per ogni palla B fissata esiste una costante $\widetilde{C}$ che dipende da $||Xz||_{C^\alpha_{d_u}}(B)$, $||\partial_2 z||_{L^q(B)}$ tale che

$$|z(x) - z(x_0) - Xz(x_0)(x - x_0)_1| \leq \widetilde{C} d_u^{1+\alpha'}(x, x_0),$$

per ogni x, x_0 in B, dove $\alpha' = min(\alpha, 1 - N/q)$.

Proof Poniamo $\xi_0 = (x_0, 0)$, e prolunghiamo la funzione z su $\Omega \times]-1, 1[$, ponendola costante in s. Poniamo inoltre

$$z_1(\xi) = z(\xi) - z(\xi_0) - (\xi - \xi_0)_1 Xz(\xi_0)$$

Fissato ξ, e ξ_0 poniamo $r = d_{\xi_0}(\xi, \xi_0)$, ed indichiamo $z_{\xi_0, B(\xi,R)}$ la media su $B_{\xi_0}(\xi, R)$ della funzione z. Utilizzando la rappresentazione in termini della soluzione fondamentale e il fatto che $z_1(\xi_0) = 0$, si ottiene

$$|z_1(\xi)| \le |z_1(\xi) - z_{\xi_0,B(\xi,R)}| + |z_1(\xi_0) - z_{\xi_0,B(\xi,R)}| \le$$

$$\le \widetilde{C} \int_{B_{\xi_0}(\xi,2r)} d_{\xi_0}^{-N+1}(\xi,\zeta)|X_{\xi_0} z_1(\zeta)| \le$$

$$\le \widetilde{C} \int_{B_{\xi_0}(\xi,2r)} d_{\xi_0}^{-N+1}(\xi,\zeta)|Xz(\zeta) - Xz(\xi_0)| +$$

$$+\widetilde{C} \int_{B_{\xi_0}(\xi,2r)} d_{\xi_0}^{-N+1}(\xi,\zeta)\Big(|u(\zeta) - u(\xi_0)| + s\Big)|\partial_2 z(\zeta)|.$$

(poiché $Xz \in C^\alpha$, e u è lip),

$$\le \widetilde{C} \int_{B_{\xi_0}(\xi,2r)} d_{\xi_0}^{-N+1}(\xi,\zeta) d_{\xi_0}^{\alpha}(\xi_0,\zeta) + \widetilde{C} \int_{B_{\xi_0}(\xi,2r)} d_{\xi_0}^{-N+1}(\xi,\zeta) d_{\xi_0}(\xi_0,\zeta)|\partial_2 z(\zeta)| \le$$

(poiché $d_{\xi_0}(\xi_0,\zeta) \le d_{\xi_0}(\xi,\zeta) + d_{\xi_0}(\xi,\xi_0) \le d_{\xi_0}(\xi,\zeta) + r \le r,$)

$$\le \widetilde{C} \int_{B_{\xi_0}(\xi,2r)} d_{\xi_0}^{-N+1}(\xi,\zeta) r^\alpha + \widetilde{C} r \int_{B_{\xi_0}(\xi,2r)} d_{\xi_0}^{-N+1}(\xi,\zeta)|\partial_2 z(\zeta)| \le$$

$$\le \widetilde{C}(r^{1+\alpha} + r^{2-N/q}||\partial_2 z||_{L^q(B_{\xi_0}(\xi_0,R))}) \le \widetilde{C} d_{\xi_0}^{1+\alpha'}(\xi,\xi_0),$$

dove $\alpha' = min(\alpha, 1 - N/q)$.

Le due nozioni di derivata coincidono:

Proposizione 4.1. *Se $f \in C^\alpha_{loc}(\Omega)$ per qualche $\alpha \in]0,1[$, $Xf \in C^\alpha_{loc}(\Omega)$, e $\partial_2 f \in L^p_{loc}(\Omega)$ con $p > N$, allora per ogni $\xi \in \Omega$ le derivate di Lie $Xf(\xi)$ esistono e coincidono con quelle deboli.*

Dimostrazione. Scegliamo α' come nella proposizione precedente

$$\frac{f(\gamma(s)) - f(\xi_0)}{s} = Xf(\xi_0) + \frac{O(d_{\xi_0}^{1+\alpha'}(\gamma(s),\xi_0))}{s} = \tag{19}$$

$$= Xf(\xi_0) + O(s^{\beta(1+\alpha)-1}),$$

con $\beta > 1/(1+\alpha)$. Mandando $s \to 0$ si ottiene la tesi. $\square$

Possiamo ora dimostrare il risultato relativo alla foliazione

Dimostrazione del Teorema 2.1 L'equazione $\gamma' = X(\gamma)$ ha un'unica soluzione della forma

$$\gamma(x) = (x, y(x)),$$

dove $y'(x) = u(\gamma)$. Per definizione di derivata di Lie si ottiene allora che

$$y''(x) = Xu(x, y(x)).$$

Per il medesimo motivo otteniamo subito che $y'''(x) = 0$. Questo implica che $y(x)$ e un polinomio di ordine 2. Quindi il dominio della soluzione è foliato in polinomi del secondo ordine.

Osservazione 4.1. *La soluzione è di classe C^∞ in senso intrinseco. Questo non significa che la soluzione sia regolare. Infatti la funzione*

$$u(x_1, x_2) = x_1|x_2|$$

è derivabile infinite volte rispetto a X_u, ma non è regolare in senso usuale.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Ambrosio, F. Serra Cassano, D.Vittone, Intrinsic regular hypersurfaces in Heisenberg groups . Journal of geometric analysis, 2006, v. 16, n. 2, p. 187-232,

[2] V. Barone Adesi, F. Serra Cassano, D. Vittone, The Bernstein problem for intrinsic graphs in Heisenberg groups and calibrations, preprint, 2006,

[3] M. Bonk, and L. Capogna, Mean curvature flow in the Heisenberg group, preprint 2005

[4] Cheng, J.-H. and Hwang, J.-F. Properly embedded and immesed sirfaces in the Heisenberg group, Bull Austr Math Soc 70, 2005, 507-520.

[5] Cheng, J.-H. and Hwang, J.-F. and Yang, P., Existence and Uniqueness for P-Area Minimizers in the Heisenberg Group, preprint, 2006.

[6] , Cheng, J.-H. and Hwang, J.-F. and Malchiodi, A. and Yang, P., Minimal surfaces in pseudohermitian geometry, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), 4, 1, 2005, 129-177.

[7] G.Citti, A. Montanari Analytic estimates of solutions of the Levi equation J. Differential Equations 173 (2001), no. 2, 356–389.

[8] G.Citti, E. Lanconelli, A. Montanari, Smoothness of Lipschitz continuous graphs, with non vanishing Levi curvature. Acta Math. 188 (2002), no. 1, 87–128.

[9] G. Citti, M. Manfredini *Implicit function theorem in Carnot-Caratheodory spaces* Communication in Contemporary mathematics vol. 8, 5, 2006, 657-680.

[10] G. Citti, G. Tomassini, Levi equation for almost complex structures Revista Matematica Iberoamericana, vol. 20, no. 1, 151-182.

[11] , D.Danielli, N. Garofalo, D.-M. Nhieu, Minimal surfaces, surfaces of constant mean curvature and isoperimetry in Carnot groups, preprint, 2001

[12] Danielli, D. and Garofalo, N. and Nhieu, D.-N., A notable family of entire intrinsic minimal graphs in the Heisenberg group which are not perimeter minimizing, preprint 2006.

[13] G.B. Folland, *Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups*, Ark. Mat. 13, (1975), 161-207.

[14] B. Franchi, R. Serapioni, F. Serra Cassano, *Rectifiability and Perimeter in the Heisenberg Group*, Math.Ann., 321, (2001), 479-531.

[15] Garofalo, N. and Pauls, S., The Bernstein problem in the Heisenberg group preprint, 2003.

[16] Garofalo, N. and Nhieu, D.-M., Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces, Comm. Pure Appl. Math., 10, 49,(1996) 1081-1144,

[17] , Robert K. Hladky and Scott D. Pauls, Constant mean curvature surfaces in sub-Riemannian geometry, preprint, 2005.

[18] , F. Montefalcone, Alcune formule integrali nei Gruppi di Carnot Seminario del dipartimento di matematica Universita' di Bologna, Tecnoprint, aprile 2005

[19] , F. Montefalcone, Hypersurfaces and variational formulas in sub riemannian carnot groups preprint

[20] , Y.Ni, Sub-Riemannian constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group as limits, Preprint, 2005.

[21] , Pauls, S. D., Minimal surfaces in the Heisenberg group, Geom. Dedicata, 104, 2004, 201–231.

[22] S.D. Pauls H-minimal graphs of low regularity in H^1. preprint 2006

[23] Manuel Ritoré and César Rosales, Rotationally Invariant Hypersurfaces with Constant Mean curvature in the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$, 2005, Preprint

[24] N. Sherbakova Minimal surfaces in contact subriemannian manifolds, preprint 2006.

E-mail address: `lcapogna@uark.edu`

E-mail address: `citti@dm.unibo.it`

E-mail address: `manfredi@dm.unibo.it`