Un eponimo ricorrente: Nash e la teoria dei giochi

Marco Li Calzi*

(Preparato in occasione dell'Assemblea UMI del 18 maggio 2002)

1. – Introduzione

Quando istituì il premio che oggi porta il suo nome, Alfred Nobel dispose che la Matematica fosse esclusa dalle categorie eligibili. Naturalmente, questo non ha impedito ad un manipolo di matematici di vincere comunque il premio Nobel per l'importanza dei loro contributi in altre discipline come la Fisica o l'Economia.

Il matematico John F. Nash ha vinto nel 1994 il premio Nobel per l'Economia[1] in condivisione con J.C. Harsanyi e R. Selten "for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games" [1].

Pochi anni dopo, Nash ha avuto il singolare onore di diventare il primo matematico e premio Nobel ad ispirare — ancora vivente — una biografia [2] e successivamente un film, recensito anche su riviste di matematica [3, 4]. Il successo del film, premiato nel 2002 con quattro[2] Academy Awards (meglio noti come premi Oscar), ha reso familiari il nome di Nash ed il suo legame con la teoria dei giochi anche tra il grande pubblico.

In teoria dei giochi, peraltro, il nome di Nash è associato ad almeno tre nozioni distinte da egli stesso introdotte: l'equilibrio di Nash, la soluzione di Nash ed il problema[3] di Nash. La violenta (e breve) fiammata di interesse accesa dal film nei mass-media si è concentrata soprattutto sul primo contributo, ignorando sia gli altri due concetti intitolati a Nash sia i suoi importanti contributi all'analisi e alla geometria [5]. Incuriositi dalla ricorrenza con cui la teoria dei giochi ha eletto Nash eponimo, qui proviamo a spiegare il senso e la portata dei tre contributi che portano il suo nome.

---

* Dipartimento di Matematica Applicata, Università "Ca' Foscari" di Venezia, Dorsoduro 3825/E, 30123 Venezia. Fax: (041) 522-1756. Email: licalzi@unive.it. Ringrazio A. Basile, S. Coen, C. Mezzetti, M. C. Molinari ed un revisore anonimo per i loro commenti.

[1] Il vero nome del premio è The Bank of Sweden Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel. Il premio per l'Economia, infatti, non era previsto nelle disposizioni di Nobel ed è stato istituito nel 1969.

[2] Miglior film, miglior regista, miglior attrice non protagonista e migliore sceneggiatura non originale.

[3] Per ragioni storiche, il problema è meglio noto con il nome di *programma* di Nash. Fortunatamente, l'eponimo è lo stesso.

2. – "I believe in assigning value to things."

Molte persone hanno cercato nel film *A Beautiful Mind* qualche riferimento al lavoro di Nash in teoria dei giochi. Ce n'è uno davvero caratteristico che pochi hanno notato. Nella finzione cinematografica, durante il suo corteggiamento ad Alicia, Nash pronuncia una battuta a doppio senso: "No. I don't believe in luck. But I do believe in assigning value to things.", ovvero "No, non credo alla fortuna. Credo all'importanza di dare un valore alle cose". La teoria dei giochi, infatti, presume che una persona razionale possa attribuire una valutazione numerica ad ogni cosa e se ne serva per decidere il miglior corso d'azione.

Formalmente, indichiamo con C l'insieme delle possibili conseguenze associate alle azioni che una persona può intraprendere. Supponiamo che il nostro agente abbia una funzione di utilità u_i che associa ad ogni conseguenza c in C un numero reale $u_i(c)$ che descrive l'utilità che questi ritrae dalla conseguenza c. Lo scopo dell'azione razionale è scegliere un'azione che conduce ad una conseguenza che massimizza l'utilità. Dunque, gli agenti razionali agiscono in modo da massimizzare la loro funzione di utilità.

Ad esempio, supponiamo che un monopolista abbia una funzione di domanda lineare $q(p) = \max\{a-p, 0\}$, con $a > 0$. La funzione di domanda $q(p)$ descrive la quantità di bene che il monopolista riesce a vendere ad un prezzo p; come è naturale, maggiore è il prezzo, minore è la quantità venduta. Se la sua utilità corrisponde alle dimensioni del fatturato $p \cdot q(p)$, l'azione razionale del monopolista è fissare come prezzo di vendita $p^* = a/2$.

L'esistenza di una funzione di utilità nel caso di conseguenze certe è stata dimostrata dal matematico G. Debreu, premio Nobel per l'Economia nel 1983, in [6]. Tuttavia, in molti casi l'esito delle nostre azioni è soggetto a qualche forma di incertezza che si risolve soltanto dopo che abbiamo già scelto come agire. Ad esempio, l'utilità di una puntata sul rosso alla *roulette* di un casinò dipende da quale numero esce successivamente. In questo caso, che utilità dovremmo attribuire ad un'eventuale puntata fatta prima di conoscere il colore del numero?

Per affrontare questa difficoltà, basta trovare un modo di definire l'utilità della *lotteria* (ovvero, della distribuzione di probabilità) che associa al rosso una vincita pari alla puntata e ad ogni altro evento una corrispondente perdita. Se indichiamo con $L(C)$ l'insieme delle distribuzioni di probabilità sulle conseguenze C, stiamo cercando una funzione di utilità U definita sull'insieme delle lotterie $L(C)$. J. von Neumann [7] ha dimostrato che possiamo definire questa funzione come il valore atteso della funzione di utilità u o, in breve, come l'*utilità attesa* della lotteria. Se p è la probabilità che esca il rosso, questo vuol dire che l'utilità attesa di punstare 10 euro sul rosso può essere calcolata come $U = p \cdot u(10) + (1 - p) \cdot u(-10)$. Persino alla fortuna si può dare un valore!

Se, come è naturale, identifichiamo una lotteria degenere δ_c con la corrispondente conseguenza c, risulta $U(\delta_c) = u(c)$. Quindi, unificando il caso di conseguenze certe e il caso di lotterie, diremo che gli agenti razionali agiscono in modo da massimizzare la loro utilità attesa.

Prima di lasciare questa sezione, notiamo una proprietà d'invarianza che ci sarà utile nella Sezione 5. L'insieme delle lotterie che massimizzano il valore atteso di $u(\cdot)$ è lo stesso di quelle che massimizzano il valore atteso di $au(\cdot) + b$ se $a > 0$. Pertanto, il criterio di massimizzazione dell'utilità attesa è invariante rispetto a trasformazioni affini crescenti della funzione di utilità u. In altre parole, per decidere il miglior corso d'azione, un agente razionale può basare i suoi calcoli di massimizzazione su un elemento scelto arbitrariamente nella famiglia $au(\cdot) + b$ con $a > 0$.

3. – L'ottimo di Pareto

La scena del film *A Beautiful Mind* maggiormente citata in relazione alla teoria dei giochi mostra Nash intento a suggerire a quattro amici come organizzare il corteggiamento di cinque ragazze, una delle quali è bionda e molto più attraente delle altre quattro, che sono more. Il videoclip della scena è accessibile via internet [8].

Proviamo a descrivere la situazione come un *gioco*, ovvero come un problema di interazione strategica. In generale, un gioco è caratterizzato da un insieme di giocatori $i = 1, 2, \ldots, n$ ciascuno dei quali sceglie simultaneamente quale strategia adottare nell'insieme S_i. Il vettore $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ delle strategie adottate dai giocatori determina una conseguenza c alla quale ogni giocatore $i = 1, 2, \ldots, n$ associa un'utilità $u_i(c)$. Poiché la conseguenza c è funzione del vettore delle strategie s, per comodità di scrittura nel seguito indichiamo la funzione composta $u(c(s))$ come $u(s)$.

Nella scena del film, i giocatori sono cinque: Nash e i suoi quattro amici. Ognuno di essi ha la stessa funzione di utilità, che attribuisce valore a a sedurre la bionda, b a sedurre una qualsiasi delle more e 0 a essere respinto, con $a > b > 0$. Ognuno di essi può adottare come strategia di corteggiare una qualsiasi delle cinque ragazze, ma il successo è garantito soltanto se il corteggiamento non è insidiato da un rivale. A chi dovrebbero rivolgere la loro attenzione i giocatori?

L'ovvia risposta è che sarebbe opportuno che ciascuno dei cinque corteggiasse una ragazza diversa. Come spiega lucidamente Nash, in questo modo nessuno intralcia gli altri e i cinque amici possono congiuntamente conseguire la massima utilità possibile. Questa proposta di soluzione del problema del corteggiamento è nota in economia come *ottimo paretiano*.[4]

Un vettore (o combinazione) di strategie s è un ottimo paretiano se non esiste nessun altra combinazione s' tale che $u_i(s') \geq u_i(s)$ per ogni i e valga almeno una disuguaglianza stretta. Adottare congiuntamente una strategia che non è un ottimo paretiano significa ridurre l'utilità di qualcuno senza aumentare l'utilità di nessuno. Giocare congiuntamente un ottimo paretiano significa evitare di sprecare utilità e dunque risulta molto naturale suggerire che l'azione sociale si orienti verso un ottimo paretiano.

Tuttavia, anche se l'ottimo paretiano è collettivamente razionale, non è detto che lo sia individualmente. L'esempio più noto è il *Dilemma dei prigionieri*. La polizia ha fermato due pregiudicati che devono scontare un anno di prigione ciascuno per un crimine minore. Il procuratore sospetta (ma non può provare) che i due malfattori siano complici in un crimine maggiore, punibile con ulteriori cinque anni di prigione. Nel tentativo di renderli

[4] In questo caso, l'eponimo è l'ingegnere ed economista Vilfredo Pareto (1848–1923).

punibili per il crimine maggiore, il giudice avanza separatamente a ciascuno di loro una proposta: "Se accusi il tuo socio del crimine maggiore, ti abbuono l'anno di prigione per il crimine minore. E, se il tuo socio non ti implica nel crimine maggiore (nel qual caso dovrai farti cinque anni di prigione), ti libero subito."

La situazione può essere descritta come un gioco tra i due pregiudicati, che hanno come possibili strategie l'opzione di accusare o no il socio e come funzione di utilità l'opposto del numero di anni di prigione che rischiano di farsi. L'interazione strategica fra i due pregiudicati — chiamiamoli Tom e Jerry — può essere rappresentata mediante una matrice dove Tom sceglie la riga e Jerry la colonna. Ad esempio, se Tom *(a)*ccusa il suo complice ma Jerry *(n)*on lo accusa si ottiene la conseguenza c_2, a cui corrisponde un'utilità di 0 per Tom ed un'utilità di -6 per Jerry. Sulla sinistra, la Figura 1 riporta

		Jerry	
		a	n
Tom	a	c_1	c_2
	n	c_3	c_4

		Jerry	
		a	n
Tom	a	$-5, -5$	$0, -6$
	n	$-6, 0$	$-1, -1$

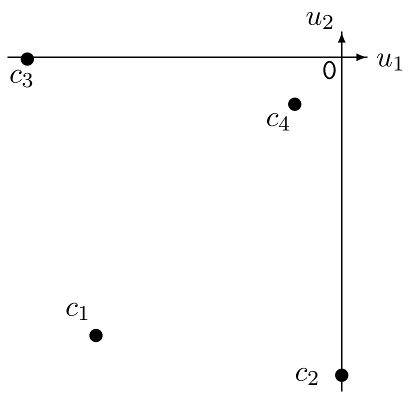

Figura 1: Il Dilemma dei prigionieri.

in alto la matrice delle conseguenze e in basso la matrice delle relative utilità, sotto la convenzione che il primo numero designa l'utilità di Tom ed il secondo l'utilità di Jerry. Sulla destra, invece, abbiamo rappresentato come punti le coppie di utilità corrispondenti a ciascuna conseguenza.

Nel Dilemma dei prigionieri, tutte le combinazioni di strategie sono ottimi paretiani, salvo quella in cui i due si accusano a vicenda. Infatti, mentre in caso di omertà ognuno dovrebbe scontare soltanto un anno di prigione, accusarsi a vicenda li terrebbe entrambi per cinque anni in prigione e questo esito è uniformemente peggiore. Graficamente, nella parte destra della Figura 1 si vede immediatamente che il punto c_1 (reciproca delazione) è dominato dal punto c_4 (omertà).

Dal punto di vista individuale, tuttavia, l'omertà non è una soluzione credibile. Ecco la linea di condotta suggerita dall'avvocato al primo malfattore: "Hai due opzioni: accusare il tuo socio oppure no. Se lo accusi, ti fai un anno di prigione in meno. Quindi, se lui non ti accusa, esci subito (invece di farti un anno); se lui invece ti accusa, sconti cinque anni (invece di sei). Comunque vada, ti conviene accusarlo." Naturalmente, l'avvocato del secondo malfattore suggerisce una linea di condotta analoga ed entrambi i prigionieri scelgono di accusarsi a vicenda, condannandosi a cinque anni di prigione ciascuno. In questo caso, le ragioni individuali prevalgono sulla razionalità collettiva.

4. – L'equilibrio di Nash

L'idea che la razionalità individuale preceda quella collettiva sottende e giustifica il concetto di equilibrio di Nash. Dato un gioco, il giocatore i ha il diritto irrinunciabile di scegliere la strategia che preferisce nell'insieme S_i. Supponiamo che qualcuno proponga ai giocatori la soluzione s^* e poi li lasci liberi di decidere autonomamente e in isolamento se seguire o no il consiglio. Certamente non ci aspetteremmo che la raccomandazione sia seguita se uno dei giocatori, immaginando che tutti gli altri si conformino al consiglio, può ottenere un'utilità maggiore giocando una strategia s_i diversa da quella proposta. Un agente razionale, infatti, agisce in modo da massimizzare la *sua* funzione di utilità.

Pertanto, condizione *necessaria* affinché la soluzione proposta sia rispettata da tutti è che essa massimizzi l'utilità di ciascun giocatore quando tutti gli altri si attengono alla soluzione proposta. In termini formali, questa condizione necessaria si esprime dicendo che s^* è un *equilibrio di Nash* se

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_i, \ldots, s_n^*) \tag{1}$$

per ogni giocatore i e per ogni strategia s_i in S_i.

Nash [9] ha dimostrato che ogni gioco con un numero finito di giocatori e di strategie (detto per brevità *gioco finito*) ammette almeno un equilibrio se estendiamo la definizione al caso in cui i giocatori possono scegliere le proprie strategie anche probabilisticamente. Più formalmente, dato l'insieme delle strategie (pure) S_i del giocatore i, chiamiamo *strategia mista* di i una distribuzione σ_i che assegna probabilità $\sigma_i(s_i)$ alla strategia pura s_i; indichiamo con Σ_i l'insieme delle sue strategie miste. Ad ogni combinazione di strategie miste σ in $\Sigma = \Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_n$ corrisponde una lotteria che ogni giocatore valuta secondo la sua utilità attesa U_i. Una combinazione di strategie miste σ^* è un equilibrio di Nash se σ_i^* attribuisce probabilità positiva soltanto a strategie pure che massimizzano l'utilità attesa del giocatore i, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$, quando i suoi avversari giocano le strategie miste previste da σ^*.

Teorema 1 *Ogni gioco finito ammette un equilibrio di Nash.*

DIM.: La dimostrazione di Nash [10] che riportiamo è caratteristica del suo stile pulito e conciso. Essa consiste nel mostrare che un equilibrio di Nash corrisponde ad un punto fisso la cui esistenza discende dal teorema di Brouwer.

Data una combinazione di strategie miste σ ed il vettore $U(\sigma)$ delle corrispondenti utilità attese dei giocatori, indichiamo con $U_i(s_i, \sigma_{-i})$ l'utilità attesa del giocatore i che adotta la strategia pura s_i mentre gli altri continuano a giocare la loro parte di σ. Per ogni i, definiamo il *vantaggio* di passare alla strategia s_i (quando gli altri continuano a giocare la loro parte di σ) come

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}) = \max\{0, U_i(s_i, \sigma_{-i}) - U_i(\sigma)\}.$$

Associamo ad ogni componente σ_i di σ la trasformazione

$$\sigma_i'(s_i) = \frac{\sigma_i(s_i) + v_i(s_i, \sigma_{-i})}{1 + \sum_{s_i} v_i(s_i, \sigma_{-i})}$$

e denotiamo σ' la corrispondente combinazione di strategie miste. Questo definisce una mappa continua da Σ a Σ che soddisfa le ipotesi del teorema di Brouwer.

Per definizione, σ è un equilibrio se e solo se tutti i vantaggi di ogni giocatore sono nulli. Quindi ogni equilibrio è un punto fisso di questa mappa. Resta da far vedere che ad ogni punto fisso corrispondono vantaggi nulli per ogni giocatore i. Supponiamo che σ sia un punto fisso. La strategia mista σ_i del giocatore i soddisfa

$$\sigma_i(s_i) = \frac{\sigma_i(s_i) + v_i(s_i, \sigma_{-i})}{1 + \sum_{s_i} v_i(s_i, \sigma_{-i})}. \tag{2}$$

D'altra parte, poiché $U_i(\sigma)$ è un valore atteso,

$$\min_{s_i} U_i(s_i, \sigma_{-i}) \leq U_i(\sigma) \leq \max_{s_i} U_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

Ad una strategia pura s_i che sia punto di minimo per $U_i(s_i, \sigma_{-i})$ corrisponde un vantaggio $v_i(s_i, \sigma_{-i}) = 0$. Sostituendo in (2), la costante di proporzionalità risulta $\sum_{s_i} v_i(s_i, \sigma_{-i}) = 0$. Quindi tutti i vantaggi di i sono nulli. $\square$

Risolto il problema dell'esistenza, il concetto di equilibrio di Nash è diventato un criterio formale per giudicare la plausibilità di una specifica combinazione di strategie come soluzione di un gioco. Questo ha messo a disposizione degli economisti e degli altri scienziati sociali un test molto semplice a cui sottoporre le loro teorie [11]. Se gli agenti sono razionali e se il comportamento previsto da un modello economico non è un equilibrio di Nash, è molto difficile sostenere che il modello sia ben specificato: almeno uno degli agenti preferirà fare qualcosa di diverso!

Nel caso del Dilemma dei Prigionieri, accusarsi reciprocamente è l'unico equilibrio di Nash ma non è un ottimo di Pareto. L'ottimo di Pareto e l'equilibrio di Nash possono essere diversi, come accade ogni volta che la razionalità individuale e quella collettiva non sono allineate.

Nel problema di corteggiamento descritto sopra, invece, qualsiasi combinazione di strategie in cui ogni ragazzo corteggia una ragazza diversa è sia un ottimo di Pareto sia un equilibrio di Nash. Il problema ammette più "soluzioni" possibili, a cui corrispondono utilità diverse: chi prende la bionda consegue un'utilità maggiore degli altri. Nella finzione cinematografica, Nash spiega agli amici che se ciascuno di loro va con una mora diversa questo realizza un ottimo paretiano.[5] La sua spiegazione si trasforma naturalmente in un'implicita raccomandazione perché soddisfa la condizione necessaria di razionalità individuale. Ciò che Nash non dice è che questo lascerebbe a lui la bionda, realizzando fra tutti i possibili equilibrî quello che gli consente di puntare alla bionda indisturbato. Come un agente razionale, Nash agisce in modo da sfruttare le sue (superiori) conoscenze per massimizzare la sua utilità — magari a spese di quella degli amici.

L'esempio del corteggiamento evidenzia un problema caratteristico nei casi in cui un gioco ammette più equilibrî di Nash. Come possiamo selezionare l'equilibrio "giusto"? L'approccio che ha suscitato maggiore interesse, generando centinaia di lavori nei vent'anni precedenti all'assegnazione del Nobel a Nash, è stato direttamente ispirato dal suo lavoro. I teorici dei giochi della generazione successiva, infatti, hanno studiato come rafforzare il criterio associato all'equilibrio di Nash generando condizioni necessarie più stringenti della (1). Questo programma di *raffinamento* dell'equilibrio di Nash ha individuato concetti di equilibrio più esigenti, che implicano requisiti di coerenza più forti per le teorie economiche e sociali [12].

Il più diffuso tra questi concetti è noto con il nome di perfezione nei sottogiochi e si deve a Selten, uno dei due covincitori del Nobel di Nash. Il concetto si applica ai giochi che si sviluppano in più fasi, dove i giocatori devono considerare strategie che tengano conto anche di quanto è successo prima che tocchi a loro giocare.

Ecco un esempio. Supponiamo che il gioco del corteggiamento descritto sopra si svolga in modo dinamico: i ragazzi lasciano il tavolo ad uno a uno secondo un ordine prestabilito e avvicinano la ragazza che desiderano. Per semplicità, facciamo finta che ci siano soltanto due ragazze (una bionda ed una mora) e soltanto due pretendenti (John Nash ed il suo amico Martin) e che la prima mossa spetti a Martin. Intuitivamente, la soluzione che prevediamo è che il primo ragazzo scelga la bionda e lasci a Nash la mora. Questo è un equilibrio di Nash.

Consideriamo adesso la seguente situazione. Prima che Martin si alzi, Nash gli bisbligia: "se adesso vai per la bionda, sappi che verrò a romperti le uova nel paniere". Se Martin crede a questa minaccia, gli conviene andare per la mora e conseguire un'utilità di b invece dello 0 che otterrebbe sgomitando con Nash per guadagnarsi le attenzioni della bionda. Quanto a Nash, se Martin gli crede e gli lascia campo libero, può andare per la bionda e conseguire un'utilità di a invece che b. Poiché nessuno dei due può ottenere un'utilità maggiore modificando soltanto la sua strategia, anche questo è un equilibrio di Nash. Tuttavia, poiché l'equilibrio si tiene soltanto se Martin crede alla minaccia di Nash, Martin dovrebbe chiedersi se questa minaccia è davvero credibile o se Nash sta bluffando. Se Martin si alza e va dalla bionda, Nash ha di fronte due scelte: può fare buon viso a cattivo gioco e prendersi la mora conseguendo un'utilità di b, oppure portare a termine la sua minaccia ma conseguire un'utilità di 0. Dal momento che Nash è razionale, non troverà nel suo interesse portare a termine la minaccia e dovrà accontentarsi della mora.

[5] Quindi non è vero — come qualcuno ha affermato un po' frettolosamente — che in questa scena Nash illustra il suo concetto di equilibrio.

Quindi, se Martin sfrutta la "prevedibilità" del comportamento razionale di Nash, può distruggere il secondo equilibrio e ripristinare la soluzione intuitiva.

Il criterio di perfezione nei sottogiochi di Selten accerta in modo sistematico la credibilità delle minacce e delle promesse dei giocatori e scarta gli equilibrî di Nash che non passano questo test di credibilità. Con qualche formalismo aggiuntivo, l'esistenza degli equilibrî perfetti nei sottogiochi per un gioco finito è un corollario del teorema di Nash.

L'altro covincitore del Nobel di Nash, Harsanyi, è autore invece dell'estensione formale del concetto di equilibrio di Nash al caso in cui qualcuno dei giocatori non conosca esattamente tutte le caratteristiche del gioco che sta giocando. Ad esempio, nel gioco del corteggiamento questa situazione si verificherebbe se qualcuno dei ragazzi non fosse sicuro sulle preferenze degli altri e sospettasse che John o Martin preferiscono una delle more alla bionda. Questo introduce ulteriori livelli di incertezza nel ragionamento: "se John preferisce la mora, non verrà a rompermi le uova nel paniere; ma se invece preferisce la bionda...". Harsanyi ha suggerito un modo di darne adeguata rappresentazione formale ed ha introdotto il concetto di equilibrio di Bayes-Nash estendendo la logica sottostante al concetto di equilibrio di Nash e la sua dimostrazione di esistenza.[6]

5. – La soluzione di Nash

Torniamo al nostro gioco di corteggiamento semplificato, in cui Nash e Martin devono decidere come avvicinarsi alle due ragazze.[7] I due stanno discutendo che cosa fare: non sorprendentemente, Nash caldeggia l'equilibrio in cui prende lui la bionda, mentre Martin insiste per giocare l'equilibrio in cui Nash prende la mora. La discussione va avanti da un pezzo, quando il barista si fa avanti e dice loro: "Ragazzi, un po' di decenza: sembrate due mercanti che stiano trattando un tappeto! E' mai possibile che non possiate trovare un modo per cooperare?"

Stimolato dal rimprovero, Nash lascia la bionda a Martin e si siede a riflettere su quanto è appena successo. Ci sono due parti in conflitto che desiderano trovare un *accordo di cooperazione* per dirimere al meglio le loro divergenze. Si può fornire loro un suggerimento adeguato per risolvere il conflitto in modo ragionevole? Ad esempio, se il governo ed i sindacati sono impegnati in un braccio di ferro sulla legislazione in materia di lavoro, possiamo aiutarli a cogliere gli aspetti salienti del conflitto e fornire loro un criterio generale per comporlo? In termini più generali, come possiamo descrivere un problema di contrattazione e che tipo di soluzione possiamo suggerire?

Supponiamo che due agenti in conflitto — che chiameremo Primo e Seconda — abbiano aperto un negoziato. Sia C l'insieme (finito) delle conseguenze che le due parti possono congiuntamente assicurarsi attraverso un accordo di cooperazione. Supponiamo che l'accordo possa essere raggiunto anche ricorrendo a lotterie: ad esempio, Nash e Mar-

[6] Beninteso, sia Harsanyi sia Selten hanno dato altri contributi alla teoria dei giochi. In particolare, hanno congiuntamente sviluppato una teoria che seleziona per ogni gioco finito un *unico* equilibrio di Nash.

[7] La scena che segue non è tratta dal film, ma è ancora frutto di pura invenzione.

tin potrebbero risolvere il loro problema di corteggiamento decidendo di tirare a sorte chi va con la bionda. Chiamiamo $X = L(C)$ l'insieme delle lotterie sulle conseguenze. Nell'insieme X identifichiamo con d l'esito associato al caso in cui le trattative siano interrotte e il negoziato fallisca, ovvero che cosa succede in caso di *disaccordo*. Ad esempio, il naturale punto di disaccordo relativamente al gioco di corteggiamento è che sia Nash sia Martin mirino alla ragazza bionda. Supponiamo infine che ciascuno dei due agenti valuti gli elementi di X in base alla propria utilità attesa e indichiamo con $u = (u_1, u_2)$ il vettore delle funzioni di utilità.

Diciamo che la terna (X, u, d) definisce un *problema di contrattazione*, di cui possiamo dare una vantaggiosa rappresentazione nello spazio delle utilità attese. Infatti, poichè l'utilità attesa di una lotteria su C non è altro che una combinazione convessa delle utilità corrispondenti agli elementi di C, a ciascun problema di contrattazione (X, u, d) corrisponde un insieme compatto e convesso K in $\mathbb{R}^2$, i cui elementi sono coppie (U_1, U_2) di utilità attese che gli agenti conseguono in corrispondenza di un esito in X. Chiamiamo K la *rappresentazione utilitaristica* di (X, u, d).

		Martin	
		b	m
Nash	b	c_1	c_2
	m	c_3	c_4

		Martin	
		a	n
Nash	b	$0, 0$	a, b
	m	b, a	$0, 0$

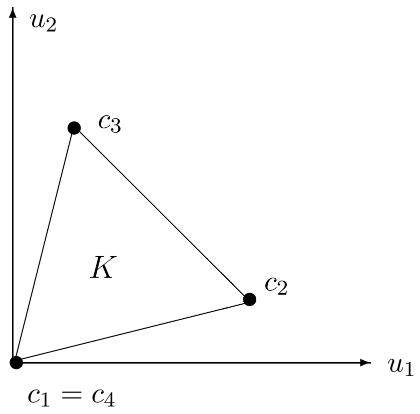

Figura 2: Un problema di contrattazione.

La Figura 2 fornisce la rappresentazione utilitaristica del problema di contrattazione fra Martin e Nash. Sulla sinistra abbiamo riportato la rappresentazione mediante matrici del gioco di corteggiamento in cui i due sono impegnati. Sulla destra, abbiamo rappresentato le coppie di utilità corrispondenti ai quattro possibili esiti del gioco: si noti che c_1 e c_4 corrispondono allo stesso punto, perché concentrare tutti gli sforzi su una sola ragazza conduce comunque all'insuccesso. L'insieme K di tutte le utilità attese che i giocatori possono ottenere da un accordo di cooperazione si ottiene come involucro convesso dei punti corrispondenti alle utilità del gioco sottostante.

Come nell'esempio, è possibile che a elementi diversi di X corrisponda la stessa coppia di utilità attese (U_1, U_2) in K. Tuttavia, poiché gli agenti sono interessati soltanto all'utilità che ritraggono, ogni esito nella controimmagine di (U_1, U_2) è da considerarsi equivalente. Se Primo riceve la stessa utilità da un pianoforte o da un quadro, e Seconda riceve la stessa utilità da un'auto o da una pelliccia, è irrilevante se i due trovano un accordo che attribuisce a Primo il pianoforte e a Seconda l'auto oppure un accordo che attribuisce a Primo il quadro e a Seconda la pelliccia. Quindi la soluzione del problema di contrattazione (X, u, d) va cercata nella sua rappresentazione utilitaristica K.

Ci saranno utili due piccoli accorgimenti. Come si ricorderà, nella Sezione 2 abbiamo spiegato che sia u_1 sia u_2 sono definiti a meno di trasformazioni affini crescenti. Possiamo sfruttare uno dei due gradi di libertà in modo da garantire $U_i(d) = 0$ per $i = 1, 2$. Quindi, senza perdita di generalità supporremo — come nella Figura 2 — che la rappresentazione utilitaristica K sia normalizzata in modo che l'esito di disaccordo corrisponda ad un'utilità nulla per entrambi i giocatori. Inoltre, supporremo che K contenga almeno un punto (U_1, U_2) con $U_i > 0$ per $i = 1, 2$ in modo da assicurare che il problema di contrattazione offra ad entrambi i giocatori l'opportunità di conseguire un'utilità superiore a quella corrispondente al disaccordo; se così non fosse, almeno un giocatore non avrebbe alcun interesse ad intavolare una trattativa. Queste ipotesi assicurano che ogni rappresentazione utilitaristica K sia un sottoinsieme compatto e convesso di $\mathbb{R}^2$ contenente l'origine ed un punto interno a $\mathbb{R}^2_+$.

Il nostro problema consiste nel trovare un criterio generale per risolvere i problemi di contrattazione. Dal punto di vista matematico, ci basta associare ad ogni problema di contrattazione una soluzione ammissibile. Quindi dobbiamo definire una funzione φ che associa ad ogni rappresentazione utilitaristica K una coppia di punti $\varphi(K) = (U_1, U_2)$ in K. Data la "soluzione" φ, ogni esito in X che genera la coppia di utilità attese $(\varphi_1(K), \varphi_2(K))$ rappresenta un accordo di cooperazione.

La prima domanda a cui intendiamo rispondere è la seguente. Esistono condizioni necessarie per restringere l'insieme delle funzioni φ che rappresentano una soluzione ragionevole del problema di contrattazione? Già prima di Nash, la teoria economica aveva individuato le due condizioni necessarie seguenti, richieste per ogni (X, u, d):

A1. Razionalità individuale: $\varphi_i(K) \geq 0$ per $i = 1, 2$.

A2. Ottimo paretiano: non esistono punti (U_1, U_2) in K per cui valga $U_i \geq \varphi_i(K)$ per $i = 1, 2$ con almeno una disuguaglianza stretta.

L'assioma di razionalità individuale impone che un accordo di cooperazione garantisca a ciascuno degli agenti un'utilità non inferiore a quella che potrebbe ottenere rompendo le trattative e forzando il disaccordo. Nella Figura 3 abbiamo rappresentato graficamente due problemi di contrattazione. Nel problema K_1 l'assioma di razionalità individuale implica che le soluzioni a sinistra del segmento individuato dai punti c_1 e c_3 non sono accettabili per il primo giocatore. Nel problema K_2, invece, questo assioma non restringe l'insieme delle possibili soluzioni.

L'assioma di ottimalità paretiana richiede che un accordo di cooperazione non sprechi risorse, come accadrebbe se nell'insieme K esistesse un punto che assicura ad almeno un agente un'utilità superiore senza ridurre l'utilità ottenuta dall'altro. In alcuni casi, questo assioma è sufficiente per individuare in modo unico la soluzione: ad esempio, nel problema

K_1 l'unico ottimo paretiano è c_4. Formalmente, una funzione φ che soddisfa l'assioma di ottimalità paretiana seleziona come soluzione del problema di contrattazione K_1 il punto $\varphi(K_1) = c_4$.

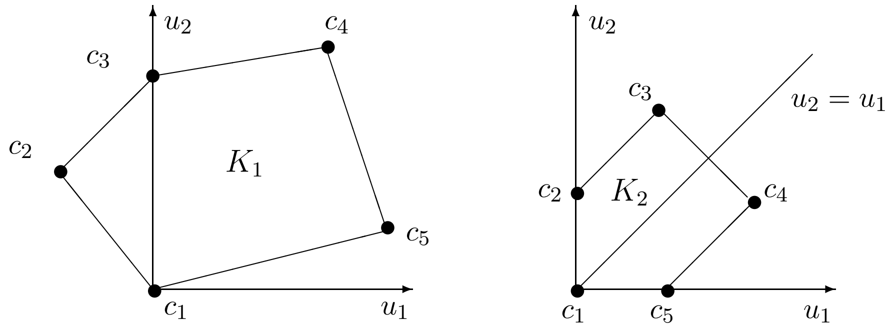

Figura 3: Due problemi di contrattazione.

Tuttavia, queste due ovvie condizioni necessarie non bastano a caratterizzare una funzione. Ad esempio, nel problema K_2 l'insieme degli ottimi di Pareto è costituito dal segmento compreso tra c_3 e c_4. Tutti i punti del segmento soddisfano entrambi gli assiomi. Questo suggerisce naturalmente la seconda domanda: possiamo fornire condizioni sufficienti? Nash [13] ha risposto affermativamente, fornendo la prima caratterizzazione di una soluzione al problema di contrattazione. I nuovi assiomi proposti da Nash sono tre:[8]

A3. Simmetria: se K è invariante rispetto a permutazioni dei due agenti, $\varphi_1(K) = \varphi_2(K)$.

A4. Invarianza rispetto alle contrazioni: se $K' \subset K$ e $\varphi(K) \in K'$, $\varphi(K') = \varphi(K)$.

A5. Invarianza rispetto alle trasformazioni di scala: $\varphi(aK) = a\varphi(K)$, per ogni $a > 0$.

Nell'assioma di simmetria, l'invarianza di K rispetto alle permutazioni di agenti significa che per ogni lotteria che assegna utilità U_1 a Primo e U_2 a Seconda ne esiste un'altra che assegna utilità U_2 a Primo e U_1 a Seconda. Graficamente, ciò equivale a supporre che K sia simmetrico rispetto alla bisettrice del primo quadrante. Quando K è simmetrico, per ogni argomento che può essere offerto in favore di Primo ne esiste uno del tutto analogo in favore di Seconda. L'assioma sancisce che in questo caso l'unica raccomandazione possibile è trattare i due allo stesso modo. Ad esempio, nel problema K_2 della Figura 3 la combinazione degli assiomi di ottimalità paretiana e simmetria impone come soluzione il punto intermedio del segmento compreso tra c_3 e c_4, corrispondente all'intersezione della bisettrice con l'insieme degli ottimi paretiani.

[8] Gli economisti conoscono A4 con il nome di assioma di indipendenza dalle alternative irrilevanti.

L'invarianza rispetto alle contrazioni formalizza la seguente idea. Consideriamo due distinti problemi di contrattazione (X, u, d) e $(X, u, d)'$ a cui corrispondono le due rappresentazioni K e K', con $K' \subset K$. Anche se gli elementi costituenti del primo problema possono essere diversi da quelli del secondo, in termini di utilità il primo problema consente di realizzare un maggior numero di configurazioni del secondo. Quindi, ancora in termini utilitaristici, il primo problema ammette un numero maggiore di opzioni. Supponiamo adesso che nel primo problema sia stata individuata una soluzione $\varphi(K)$ e che questa soluzione sia disponibile anche in K'. Giacché $\varphi(K)$ è stata ritenuta una soluzione ragionevole nel problema che ammetteva un numero maggiore di opzioni, essa resta una soluzione ragionevole anche nel secondo problema.

L'ultimo assioma, infine, stabilisce che la soluzione è invariante rispetto a trasformazioni di scala delle funzioni di utilità degli agenti. La normalizzazione invocata per attribuire utilità nulla all'esito di disaccordo, infatti, ha eliminato soltanto uno dei due gradi di libertà associati alla funzione di utilità di ciascun agente. L'assioma garantisce che la scelta associata al secondo grado di libertà non possa modificare la controimmagine di φ, ma soltanto il suo valore. In questo modo, non è possibile manipolare la raccomandazione associata a φ scegliendo una rappresentazione diversa (ma equivalente) delle funzioni di utilità.

La *soluzione di Nash* associa ad ogni insieme K la coppia (U_1^N, U_2^N) in K che massimizza il prodotto $U_1 \cdot U_2$. Essa è caratterizzata dai cinque assiomi sopra elencati. Tuttavia, poiché si può dimostrare che la combinazione degli ultimi quattro implica l'assioma di razionalità individuale, l'enunciato più economico del risultato di Nash è il seguente.

Teorema 2 *La soluzione di Nash è l'unica soluzione che soddisfa A2–A5.*

DIM.: E' immediato verificare che la soluzione di Nash soddisfa $A2$–$A5$ (nonché $A1$). Resta da far vedere che se φ soddisfa $A2$–$A5$, essa è la soluzione di Nash. Scegliamo arbitrariamente una rappresentazione utilitaristica K e indichiamo con $U^N = (U_1^N, U_2^N)$ il punto corrispondente alla soluzione di Nash. Dobbiamo mostrare che $\varphi(K) = U^N$.

Poiché K ha intersezione non vuota con l'interno di $\mathbb{R}_+^2$, $A2$ implica $U^N > 0$. Dunque possiamo scegliere $a = (a_1, a_2)$ in $\mathbb{R}_+^2$ tale che aU^N giaccia sulla bisettrice del primo quadrante. Riscaliamo la rappresentazione K rispetto ad a e consideriamo la nuova rappresentazione $K' = aK$, che ammette una retta di supporto con pendenza -1 nel punto aU^N.

Consideriamo la rappresentazione utilitaristica associata all'insieme simmetrico $S = \{(U_1, U_2) \in \mathbb{R}_+^2 : U_1 + U_2 \leq a_1 U_1^N + a_2 U_2^N\}$. $A2$ e $A3$ implicano $\varphi(S) = aU^N$. Poiché $K' \subset S$ e $aU^N \in K'$, $A4$ implica $\varphi(K') = aU^N$. La conclusione segue in virtù di $A5$. □

Stabilendo la possibilità di risolvere per via assiomatica i problemi di contrattazione, Nash ha stimolato un'ampia letteratura interessata a investigare sistemi alternativi di assiomi per generare regole ragionevoli di risoluzione dei conflitti. Il suo contributo ha aperto la strada allo studio ed alla formalizzazione di principî generali a cui gli agenti interessati a risolvere un problema di cooperazione possono far riferimento per sostenere le loro proposte e difendere i loro diritti. L'approccio, naturalmente, si estende ad ambiti diversi: nel 1979, ad esempio, Kaneko e Nakamura [14] hanno caratterizzato l'analogo della soluzione di Nash quando il problema di contrattazione coinvolge n agenti.

Restando nell'ambito dei problemi di contrattazione fra due agenti, vale la pena descrivere anche due fra le principali proposte di soluzione alternative a quella di Nash. Entrambe fanno riferimento allo stesso ambiente descritto sopra ed in particolare associano ad ogni rappresentazione utilitaristica K — dove K è un sottoinsieme compatto e convesso di $\mathbb{R}^2$ contenente l'origine ed un punto interno a $\mathbb{R}^2_+$ — un punto (U_1, U_2) appartenente a K.

La *soluzione egalitaria* — assiomatizzata da Kalai nel 1977 — suggerisce di scegliere nell'insieme dei punti di K che sono ottimi di Pareto il punto (U_1^E, U_2^E) per il quale vale $U_1^E - U_1(d) = U_2^E - U_2(d)$. Questa soluzione propone di risolvere i conflitti scegliendo un esito che assicuri ad entrambi gli agenti il medesimo incremento di utilità rispetto al caso di disaccordo. Ciò dovrebbe assicurare una composizione equa del conflitto. Purtroppo, questa soluzione non è invariante rispetto alle trasformazioni di scala e quindi seleziona esiti diversi a seconda del modo — pur equivalente — con cui rappresentiamo le funzioni di utilità degli agenti. Intuitivamente, i due gradi di libertà che abbiamo nell'adozione di una funzione di utilità possono essere usati per distorcere la scelta egalitaria. La soluzione di Nash, invece, non è soggetta a questa manipolabilità.

La *soluzione di Kalai e Smorodinski* — assiomatizzata nel 1975 — introduce l'idea che la soluzione di un problema di contrattazione debba tenere conto anche delle aspettative più ottimistiche che un agente può nutrire. In particolare, sia M_i la massima utilità in K che l'agente $i = 1, 2$ può ottenere subordinatamente al fatto che sia rispettato l'assioma di razionalità individuale. La coppia (M_1, M_2) individua un *punto ideale* le cui coordinate rappresentano la massima utilità che i giocatori possono individualmente sperare di conseguire. Naturalmente, nella maggior parte dei casi, il punto ideale non appartiene[9] a K e quindi i due giocatori non possono sperare di potere ottenere *congiuntamente* la loro massima utilità. Tuttavia, secondo Kalai e Smorodinski, il livello di M_i influenza le richieste che l'agente i può legittimamente avanzare. La soluzione di Kalai e Smorodinski propone di scegliere nell'insieme dei punti di K che sono ottimi di Pareto il punto (U_1^K, U_2^K) che rende gli incrementi di utilità conseguiti dai giocatori rispetto al caso di disaccordo proporzionali a M_i. Questa soluzione soddisfa i medesimi assiomi della soluzione di Nash (in particolare, è invariante rispetto alle trasformazioni di scala) ad eccezione dell'invarianza rispetto alle contrazioni.

6. – Il problema di Nash

In una situazione di interazione strategica, due o più giocatori determinano l'esito congiuntamente ma lo valutano individualmente utilizzando funzioni di utilità diverse. Un gioco ed un problema di contrattazione rappresentano modelli diversi di interazione

[9] Se il punto ideale appartiene a K, l'assioma A2 è sufficiente per farne la soluzione del problema di contrattazione.

strategica. Nel caso di un gioco, ogni giocatore è individualmente libero di scegliere quale strategia adottare all'interno di un insieme prestabilito. In un problema di contrattazione, i giocatori esplorano congiuntamente l'insieme delle conseguenze possibili su cui cercare un accordo.

Dato un gioco G, possiamo farlo precedere da una fase di contrattazione in cui si tenta di raggiungere un accordo su come giocarlo: se il negoziato ha successo, i giocatori adottano congiuntamente la combinazione di strategie concordata. Se il gioco G ammette più equilibrî di Nash, la contrattazione può servire semplicemente a scegliere quale equilibrio giocare. Una volta concordato l'equilibrio, ciascuno dei giocatori troverà nel suo stesso interesse fare la sua parte.

In generale, la contrattazione può selezionare anche esiti che non sono equilibrî di Nash. Ad esempio, se nel Dilemma dei Prigionieri il giudice lasciasse negoziare tra i due malfattori una dichiarazione congiunta, questi probabilmente si metterebbero d'accordo in modo da evitare di accusarsi a vicenda. Quindi, se partiamo da un gioco G e lo facciamo precedere da una fase di contrattazione, il nuovo gioco che ne risulta non conduce necessariamente allo stesso esito. Formalmente, supponiamo di definire una *trasformazione cooperativa* ψ che associ ad ogni gioco G un altro gioco $\psi(G)$ che rappresenta la situazione in cui, oltre alle strategie specificate nel gioco originale G, ad ogni giocatore sia attribuita anche la possibilità di contrattare con gli altri l'adozione congiunta di uno specifico piano di cooperazione.

Il *problema di Nash* [15] consiste nel definire un concetto di soluzione cooperativa per un gioco G che corrisponda ad un equilibrio di Nash del gioco trasformato $\psi(G)$. La motivazione per questo problema discende dal desiderio di stabilire che la soluzione cooperativa del gioco G possa essere giustificata come equilibrio del gioco di cooperazione associato. Modernamente, la teoria dell'*implementazione* ha ripreso ed opportunamente generalizzato questo problema. Qui ne discutiamo la versione nota con il nome di implementazione mediante equilibrî di Nash, per la quale sono note condizioni sia necessarie sia sufficienti di risoluzione.

Nella definizione di un gioco, possiamo distinguere le regole (chi gioca, quali strategie sono lecite, che cosa può accadere) e le preferenze dei giocatori (rappresentate dalle loro funzioni di utilità). Si noti che, a differenza dell'uso comune, le preferenze dei giocatori sono parte integrante della definizione di un gioco. Se le funzioni di utilità non sono ancora state specificate, si preferisce parlare di un *formato di gioco*. Dato un insieme di conseguenze C ed un gruppo di n giocatori, indichiamo con Γ l'insieme dei corrispondenti formati di gioco. Se indichiamo con F un formato di gioco in Γ e con $u = (u_1, \ldots, u_n)$ il vettore delle funzioni di utilità degli n giocatori, la coppia (F, u) individua un gioco.

Un concetto di soluzione cooperativa è una mappa $\varphi(u)$ che associa ad ogni vettore di funzioni di utilità u un insieme di conseguenze in C. Indichiamo con $E(F, u)$ la mappa che associa ad ogni gioco (F, u) l'insieme dei suoi equilibrî di Nash. Dato un concetto di soluzione cooperativa φ, il problema di Nash consiste nel trovare un formato di gioco F tale che $\varphi(u) = E(F, u)$ per ogni vettore u. Se $\varphi(u) = E(F, u)$ per ogni u, diremo che φ è *implementabile* da F. Si noti che richiediamo che *tutti* gli equilibrî di Nash del gioco conducano all'esito previsto da $\varphi(u)$. Ciò esclude la possibilità che, in caso di molteplicità degli equilibrî, i giocatori ne giochino uno che non "implementa" $\varphi(u)$.

La risoluzione del problema di implementazione si presta ad un'applicazione molto importante, che possiamo illustrare con riferimento alla contrattazione fra due giocatori. Supponiamo che un arbitro imparziale desideri calcolare la soluzione di Nash per un specifico problema di contrattazione, ma non conosca le funzioni di utilità delle due parti. Se esiste un formato di gioco F che implementa la soluzione di Nash, l'arbitro può limitarsi a prescrivere che le due parti giochino il gioco basato su F: posto che giochino un equilibrio, i giocatori giungeranno da soli a conseguire le utilità raccomandate dalla soluzione di Nash.

Può essere utile illustrare questi concetti con un esempio. Nell'episodio biblico noto come giudizio di Salomone, due madri si contendono un bambino. L'ovvia soluzione è assegnare il bambino alla vera madre, ma Salomone non ne conosce l'identità. Date le preferenze delle due donne, il problema consiste nel trovare un formato di gioco in cui la loro interazione faccia emergere l'affidamento alla vera madre come l'esito di equilibrio.

Supponiamo che le due donne si chiamino rispettivamente Anna e Beth. Le conseguenze possibili sono tre: α (il neonato è affidato ad Anna), β (il neonato è affidato a Beth) e γ (il neonato è ucciso e diviso a metà tra le contendenti). Ciascuna donna agisce all'insaputa dell'altra scegliendo fra tre strategie: può dichiarare che il neonato va affidato ad Anna (a), a Beth (b) oppure che va ucciso (c). Il formato del gioco ideato da Salomone si trova nella Figura 4.

		Beth		
		a	b	c
	a	α	γ	α
Anna	b	γ	β	α
	c	β	β	γ

Figura 4: Il giudizio di Salomone.

Secondo questo formato di gioco, se entrambe le donne scelgono a ed unanimente indicano Anna come vera madre, il bambino è assegnato a questa. Tuttavia sono possibili anche esiti meno banali: ad esempio, supponiamo che Anna giochi b e Beth c. In questo caso, il gioco assegnerebbe il bambino ad Anna. Nonostante Anna dichiari che la vera madre è Beth, il fatto che questa lo preferisca morto rivela che Beth non può essere la madre e che Anna ha mentito per non rischiare che il bambino sia ucciso. Supponendo che la vera madre sia Anna, la Bibbia riporta che questo fu quanto accadde, conducendo alla giusta soluzione. La sapienza di Salomone si esercita nel disegnare il formato di gioco, lasciando alle scelte dei giocatori il compito di fare emergere la verità.

Dal punto di vista di Nash, tuttavia, il formato di gioco scelto da Salomone non è all'altezza della sua fama di saggezza. La coppia di strategie (b, c), infatti, non è un equilibrio. La Bibbia lascia intendere che la funzione di utilità di Anna è $u_1(\alpha) > u_1(\beta) > u_1(\gamma)$, mentre quella di Beth è $u_2(\beta) > u_2(\gamma) > u_2(\alpha)$. Con queste preferenze, se Anna dichiara b, Beth ottiene un'utilità superiore se dichiara b invece di c. Giocando razionalmente, Beth non dovrebbe chiedere la spartizione del bambino ma sostenere di essere lei la madre. Poiché (b, b) risulta l'unico equilibrio del gioco proposto da Salomone, il formato da questi proposto — in presenza di giocatori razionali — in realtà assegna il bambino alla donna sbagliata.

Tuttavia, prima di mettere in dubbio la saggezza di Salomone, esaminiamo di nuovo il problema sottoposto alla sua attenzione alla luce dei risultati della teoria dell'implementazione. Una soluzione cooperativa φ si dice *monotona* se, dati due vettori u e u' ed una conseguenza $c \in \varphi(u)$ tale che $c \notin \varphi(u')$, esistono un giocatore i ed una conseguenza c' tali che $u_i(c) \geq u_i(c')$ and $u'_i(c') > u'_i(c)$. Si dice invece che la soluzione φ *non è soggetta a veti* se $c \in \varphi(u)$ quando c massimizza l'utilità di almeno $n - 1$ giocatori. Vale il seguente risultato [16].

Teorema 3 *Se φ è implementabile, allora essa è monotona. Inoltre, se $n \geq 3$ e φ è monotona e non soggetta a veti, allora essa è implementabile.*

La prima parte del teorema può essere usata per dimostrare che il problema sottoposto a Salomone è un esempio di soluzione non implementabile. I possibili vettori di funzioni di utilità sono due: u^1 (se la vera madre è la prima), con $u_1^1(\alpha) > u_1^1(\beta) > u_1^1(\gamma)$ e $u_2^1(\beta) > u_2^1(\gamma) > u_2^1(\alpha)$; oppure u^2 (se la vera madre è la seconda), con $u_1^2(\alpha) > u_1^2(\gamma) > u_1^2(\beta)$ e $u_2^2(\beta) > u_2^2(\alpha) > u_2^2(\gamma)$. La soluzione φ per cui $\varphi(u^1) = \alpha$ and $\varphi(u^2) = \beta$ non è implementabile perché non è monotona: $\alpha \in \varphi(u^1)$ e $\alpha \notin \varphi(u^2)$ ma non esistono un esito c e un giocatore i per cui valga $u_i^1(\alpha) \geq u_i^1(\gamma)$ e $u_i^2(\gamma) > u_i^2(\alpha)$. Qualsiasi gioco si proponga alle due madri, non si può garantire che l'equilibrio corrisponda alla soluzione desiderata. Dunque il problema proposto è impossibile da risolvere. Indipendentemente dalla sua reputazione di saggezza, se la falsa madre avesse agito razionalmente in modo da massimizzare la sua utilità, Salomone non avrebbe mai potuto trovare il modo per scoprirla!

Ne traiamo una morale in due parti. Primo, solo la matematica può dirci che un problema pratico che stiamo cercando di risolvere non ammette soluzione e che faremmo bene a dirottare altrove le nostre energie. Secondo, se le circostanze non ci consentono di eludere il problema (il bambino ha bisogno di una madre!), può essere massimamente saggio far conto sull'incapacità di molte persone di agire in modo del tutto razionale.

Riferimenti bibliografici

[1] Accademia Reale delle Scienze di Svezia, "Press release" dell'11 ottobre 1994 relativa al *The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel.*

[2] S. Nasar (1998), *A Beautiful Mind*, New York: Simon and Schuster. Traduzione italiana: *Il genio dei numeri*, Milano: Rizzoli, 1999.

[3] L.M. Butler (2002), "Movie review: A Beautiful Mind", *Notices of the American Mathematical Society* **49**, 455–457.

[4] M. Emmer (2001), "Recensione: *A Beautiful Mind*", *Bollettino U.M.I.* **IV-A**, 331–339.

[5] H.W. Kuhn and S. Nasar (2001), (a cura di), *The Essential John Nash*, Princeton: Princeton University Press.

[6] G. Debreu (1954), "Representability of a preference ordering by a numerical function", in: R.M. Thrall, C.H. Coombs e R.L. Davis (a cura di), *Decision Processes*, New York: Wiley, 159–165.

[7] J. von Neumann and O. Morgenstern (1953), *Theory of Games and Economic Behavior*, terza edizione, Princeton: Princeton University Press. Prima edizione: 1944.

[8] http://www.countingdown.com/theater/trailers/player/401396

[9] J.F. Nash (1950), "Equilibrium points of n-person games", *Proceedings of the National Academy of Sciences* **36**, 48–49.

[10] J.F. Nash (1951), "Non-cooperative games", *Annals of Mathematics* **54**, 286–295.

[11] R.B. Myerson (1999), "Nash equilibrium and the history of economic theory", *Journal of Economic Literature* **37**, 1067–1082.

[12] E. van Damme (1991), *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, seconda edizione, Berlino: Springer-Verlag. Prima edizione: 1987.

[13] J.F. Nash (1950), "The bargaining problem", *Econometrica* **18**, 155–162.

[14] M. Kaneko and K. Nakamura (1979), "The Nash social welfare function", *Econometrica* **47**, 423–436.

[15] J.F. Nash (1953), "Two-person cooperative games", *Econometrica* **21**, 128–140.

[16] E. Maskin (1999), "Nash equilibrium and welfare optimality", *Review of Economic Studies* **66**, 23–38. (Il lavoro è circolato in forma di *working paper* dal 1977 al 1998.)