Congettura di Goldbach: *Se N è un numero intero, pari e maggiore di 2, allora si possono trovare numeri primi P e Q con*

$$N = P + Q$$

Fu proposta da Christian Goldbach ad Eulero nel 1742, ed è tuttora indimostrata. Ad esempio: $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, $10 = 3 + 7 = 5 + 5$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11 = 7 + 7$,...

Esempio di *problema additivo* nella Teoria dei Numeri.

Somme di tre primi. La formulazione di Goldbach conteneva implicitamente anche un'altra congettura di tipo additivo:

Se N è un numero dispari e maggiore di 5 allora si possono trovare tre numeri primi P, Q, R con

$$N = P + Q + R$$

Questa ipotesi, che è una conseguenza della precedente, è stata dimostrata dal matematico russo I.M. Vinogradov nel 1937 per tutti i numeri dispari N *da un certo punto in poi.* Questa restrizione non è essenziale poiché può essere superata con una verifica empirica.

Le sofisticate tecniche dimostrative costituiscono un importante esempio di applicazione dell'*Analisi Matematica* allo studio dei numeri interi $1, 2, 3 \ldots$, due discipline solo apparentemente scollegate.

Altri problemi additivi

Somme di due quadrati di numeri interi: furono considerate già nel III secolo d.C. da Diofanto di Alessandria. Un'attenzione per esse fu probabilmente suggerita dal Teorema di Pitagora.

Sulle somme di due quadrati si sa ad esempio che:

Ogni numero primo P che lasci resto 1 *nella divisione per* 4 *si può scrivere come somma di due quadrati perfetti:*

$$P = A^2 + B^2, \qquad A, B \text{ numeri interi opportuni.}$$

Esempi: $5 = 1^2 + 2^2$, $13 = 2^2 + 3^2$, $17 = 1^2 + 4^2$, $29 = 2^2 + 5^2$, $37 = 1^2 + 6^2$, $41 = 4^2 + 5^2$, $53 = 2^2 + 7^2$, $61 = 5^2 + 6^2$, ...

Ciò fu ipotizzato da Fermat nel 1640 in una lettera al religioso Mersenne ma fu dimostrato solo nel 1747 da Eulero, che subito comunicò la conquista all'amico Goldbach, con una lettera.

Si tratta di un enunciato elegante e storicamente importante; la formula di fattorizzazione

$$A^2 + B^2 = \left(A + B\sqrt{-1}\right)\left(A - B\sqrt{-1}\right)$$

collegò la questione con i *numeri interi Gaussiani*; essa mostra ad esempio che certi primi, come $5 = (2 + \sqrt{-1})(2 - \sqrt{-1})$, non restano primi, ma si fattorizzano in questo ambito più vasto. Tutto ciò diede inizio alla *Teoria Aritmetica dei Numeri Algebrici*.

Somme di quattro quadrati. Fermat asserì anche che:

Ogni numero intero N che sia positivo si può scrivere come somma di quattro quadrati perfetti:

$$N = A^2 + B^2 + C^2 + D^2, \quad A, B, C, D \text{ numeri interi opportuni.}$$

Esempi: $1 = 0^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2$,..., $5 = 0^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2$,..., $7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2$,..., $11 = 0^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2$,...

Non è inoltre difficile vedere che soli *tre* quadrati non sono sufficienti per numeri come $7, 15, 23, 31, 39, \ldots, 8m + 7, \ldots$

Fermat non produsse alcuna dimostrazione, e nemmeno Eulero, che l'aveva invano cercata dopo il successo con i due quadrati. La prima dimostrazione fu data da Lagrange nel 1770 con idee aritmetiche in parte tratte da quelle di Eulero.

Più avanti C.G.J. Jacobi diede un'altra sorprendente dimostrazione, basata su un legame del problema con la teoria delle *funzioni theta*, come la serie di potenze

$$\vartheta(x) = 1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + 2x^{16} + \ldots,$$

laddove gli esponenti assegnati alla variabile x sono appunto i quadrati perfetti $1, 4, 9, 16, \ldots$

Somme di potenze superiori. Simili enunciati esistono per le altre potenze al posto dei quadrati; il problema soggiacente è noto come *Problema di Waring*, dal matematico che lo sollevò nel 1770; fu studiato con successo già da D. Hilbert, agli inizi del '900 (che utilizzò tra l'altro il risultato di Lagrange).

Ad esempio si sa che: *Ogni numero intero positivo N si può scrivere come somma di* 9 *cubi, oppure di* 19 *quarte potenze* (sempre di interi) e così via per tutte le potenze superiori.

Dopo l'approccio di Hilbert, oggi superato, le idee principali che portano alle dimostrazioni di teoremi come questi furono introdotte da G.H. Hardy, J.E. Littlewood e S. Ramanujan agli inizi del '900; anche Vinogradov si basò sui loro metodi per dimostrare la citata ipotesi di Goldbach sulle somme di *tre* primi.

Equazioni Diofantee. Esistono anche enunciati di tipo *negativo*, ossia che affermano l'impossibilità di certe rappresentazioni numeriche.

Tanto per citare un esempio, in verità molto speciale, si può mostrare che *il numero* 7 *non si può rappresentare come differenza di un quadrato e di un cubo.* In altri termini:

L'equazione $7 = X^2 - Y^3$ *non si può risolvere con* X, Y *numeri interi.*

Esempio questo di *Equazione Diofantea* (senza soluzioni), dal matematico Diofanto (III Sec. d.C.) che ispirò in seguito Fermat. Sono le equazioni da risolvere con numeri interi (o razionali).

Spesso è difficilissimo trovare una dimostrazione per questo tipo di impossibilità, mentre può essere facile ipotizzarla. Inoltre molte questioni *diofantee*, tra cui quelle viste, sono formulabili in modo elementare, il che le rende spesso attraenti anche per chi non abbia competenze specifiche.

Molti qui ricorderanno la celebre equazione diofantea

$$X^n + Y^n = Z^n$$

che compare nel cosiddetto *Ultimo Teorema di Fermat*, solo recentemente dimostrato da A. Wiles e altri; è stato oggetto di attenzione anche da parte dei rotocalchi.

La teoria delle equazioni diofantee è oggi molto ricca e collegata con altri rami importanti della Matematica, come l'Algebra e la Geometria.

Abbiamo ricordato solo una piccola parte delle problematiche su cui si impernia la Teoria dei Numeri, limitandoci a un ambito classico e vicino alla congettura di Goldbach.

Questi problemi possono apparire molto specifici o addirittura frivoli. Ci si può comunque chiedere, ad esempio:

- Perché questi problemi sono interessanti?
- Cosa li distingue tra le molte altre questioni analoghe che potrebbero essere proposte?

L'importanza di un problema è difficile a giudicarsi e anche solo a definirsi; può essere il frutto di varie componenti, come:

• la possibilità di applicazioni ad altre discipline o a questioni concrete (nell'ambito della Matematica ma anche delle Scienze Naturali o delle Scienze dell'Informazione...);
• l'essenzialità, rappresentatività e centralità del problema nell'ambito di un intero filone di ricerca;
• la quantità e la profondità di tecniche, di collegamenti e di applicazioni matematiche che il problema solleva.

Alcune di queste caratteristiche sono in effetti presenti nei problemi ricordati, ma sarebbe lungo entrare qui in dettaglio.

Le risposte a domande di questo tipo sono tuttavia in parte soggettive e la sensibilità del matematico nella scelta dei problemi fa spesso capo a qualcosa di istintivo e inconscio. In effetti un'attrazione per *l'enigma in sè*, a prescindere da specifiche motivazioni esterne, spesso è ed è stata spontanea.