

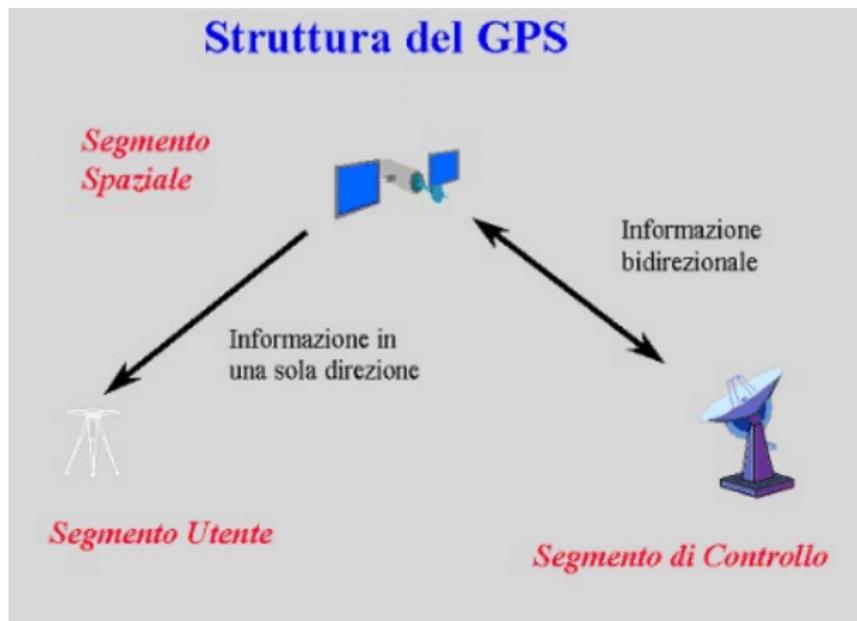
Piano Lauree Scientifiche: Aspetti matematici del GPS

Rüdiger Achilles

Università di Bologna

Bologna, 30 gennaio 2023

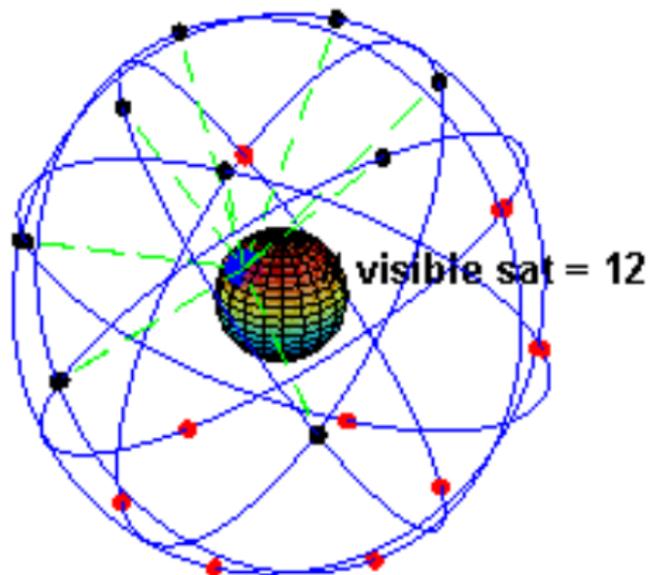
I SEGMENTI DEL GPS



SEGMENTO UTENTE: RICEVITORE GPS



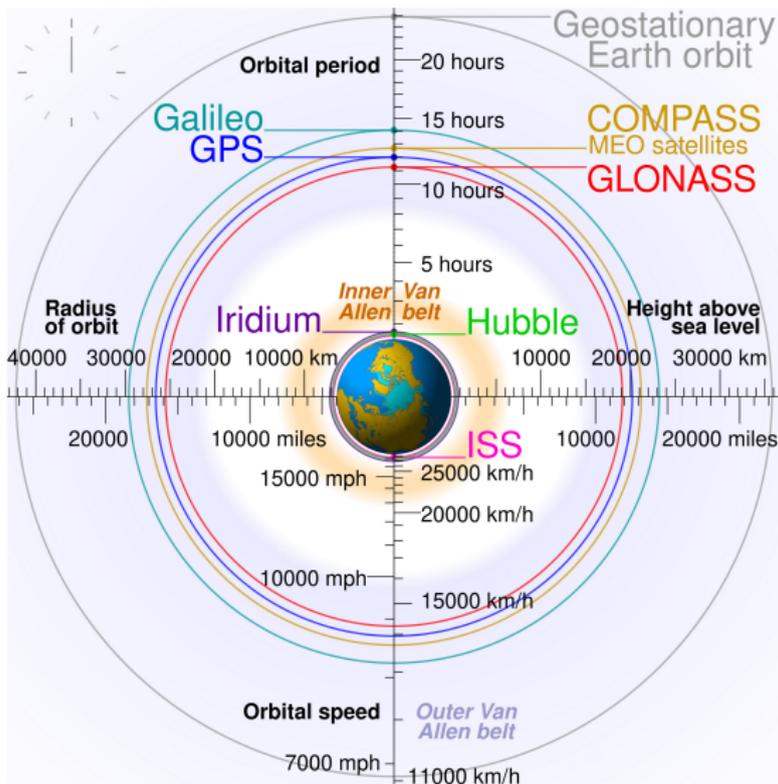
SEGMENTO SPAZIALE



GPS III SATELLITE



ORBITE IN SCALA

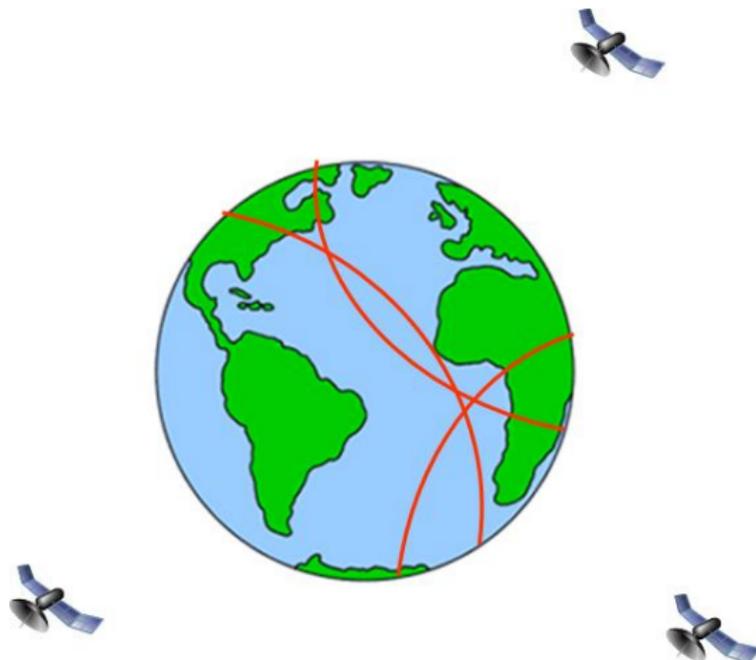


SEGMENTO DI CONTROLLO

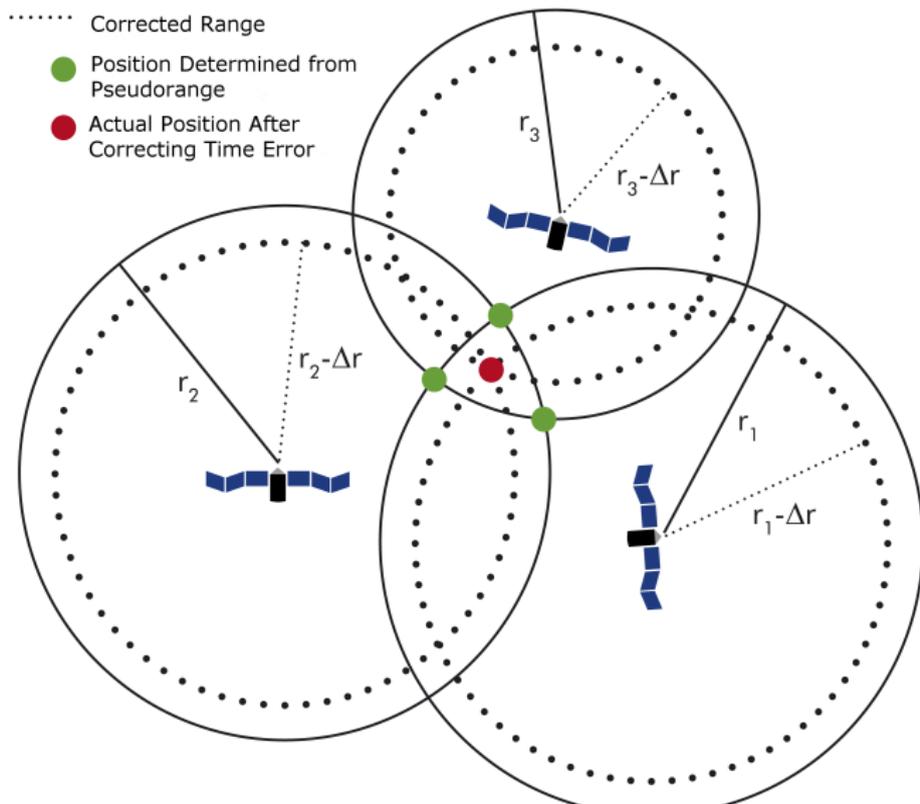
Master control station in Colorado



TRE SATELLITI



TRILATERAZIONE IN DUE DIMENSIONI



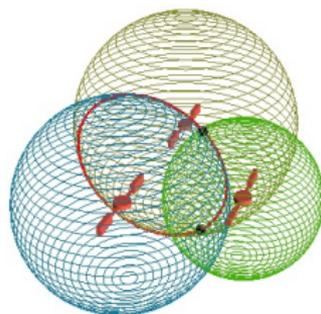
TRILATERAZIONE IN TRE DIMENSIONI

Satellite 1: (15 600, 7 540, 20 140) (km)

Satellite 2: (18 760, 2 750, 18 610) (km)

Satellite 3: (17 610, 14 630, 13 480) (km)

Satellite 4: (19 170, 610, 18 390) (km)

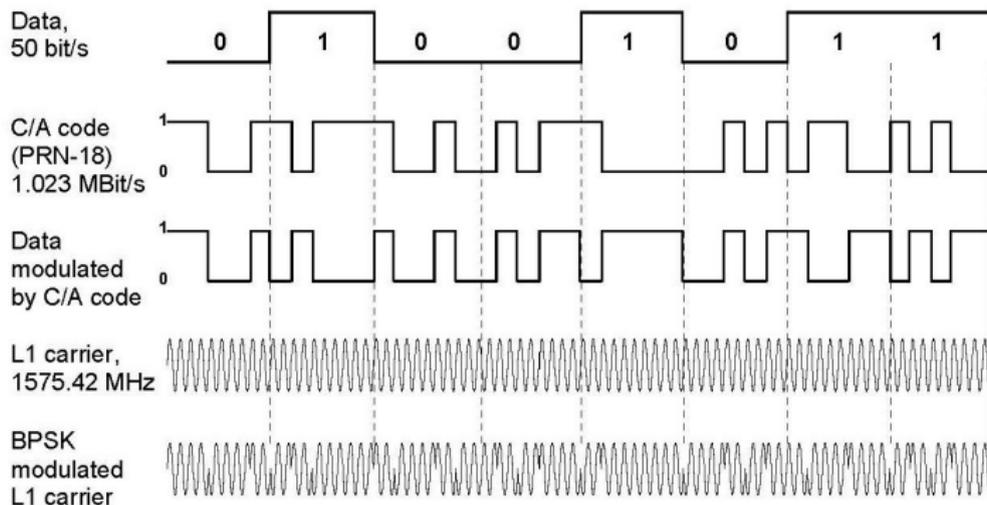


Intervalli di tempo misurati: 0,070 74; 0,072 20; 0,076 90; 0,072 42 (s)

Risposta corretta: $(x, y, z) = (-41, 772 71; -16, 789 19; 6 370, 059 6)$
(km), $\tau = -0,003 201 566$ (s).

Seconda soluzione: $(x, y, z) = (-39, 747 8; -134, 274 1; -9 413, 6)$ (km)
 $\tau = 0,185 2$ (s)

SEGNALE DI UN SATELLITE DEL GPS

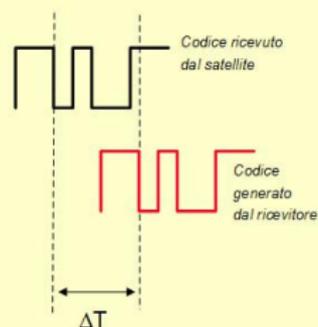


SEGNALE GPS C/A (coarse acquisition)

Teoria del sistema GPS

Determinazione della pseudodistanza con l'uso del codice

- Pseudodistanze (Codice)
 - Ciascun satellite manda un segnale che si ripete ogni millisecondo
 - Il ricevitore confronta il segnale ricevuto con quello generato internamente
 - Da questa correlazione si determina la differenza di tempo (ΔT) e quindi la pseudodistanza
 - L'orologio del ricevitore dev'essere sincronizzato con quello del satellite



$$D = V (\Delta T)$$



REGISTRO A SCORRIMENTO CON RETROAZIONE LINEARE (LFSR)

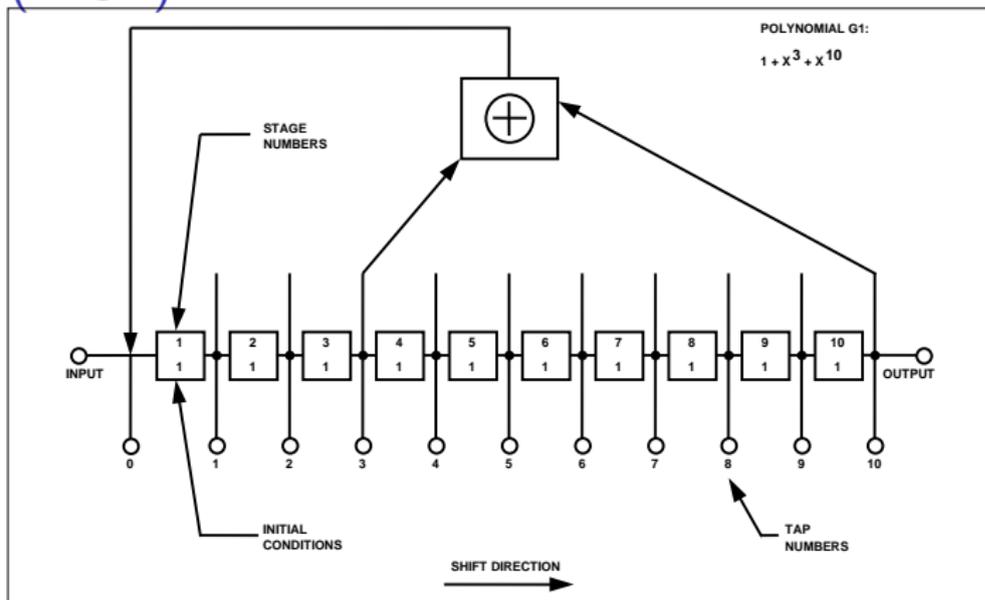
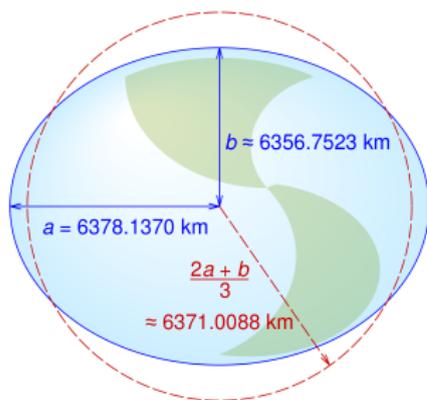


Figure 3-8. G1 Shift Register Generator Configuration

Problemi da risolvere per il buon funzionamento del GPS

- 1 Quando il segnale radio attraversa la ionosfera (tra 85 e i 600 km di altitudine) la velocità della luce non risulta costante!
- 2 Ogni satellite trasmette un segnale (pseudo-casuale) periodico. Il periodo è breve rispetto alle distanze da percorrere. C'è l'incertezza di un multiplo del periodo.
- 3 Ricevitori GPS ad alte velocità (aerei): necessità di ridurre il tempo di calcolo al minimo assoluto.

4 La Terra non è perfettamente sferica



5 Effetti della Relatività:

- SPECIALE: $-7 \mu\text{s}/\text{giorno}$
- GENERALE: $+45 \mu\text{s}/\text{giorno}$
(prevede un incremento della velocità degli orologi al bordo del satellite).

GRANDEZZE UTILI

velocità della luce $c = 299\,792\,458$ m/s

raggio terrestre equatoriale 6 378,137 0 km (ellissoide WGS-84)

raggio terrestre polare 6 356,752 3 km (ellissoide WGS-84)

raggio terrestre medio 6 371,008 8 km

relatività speciale -7 μ s/giorno

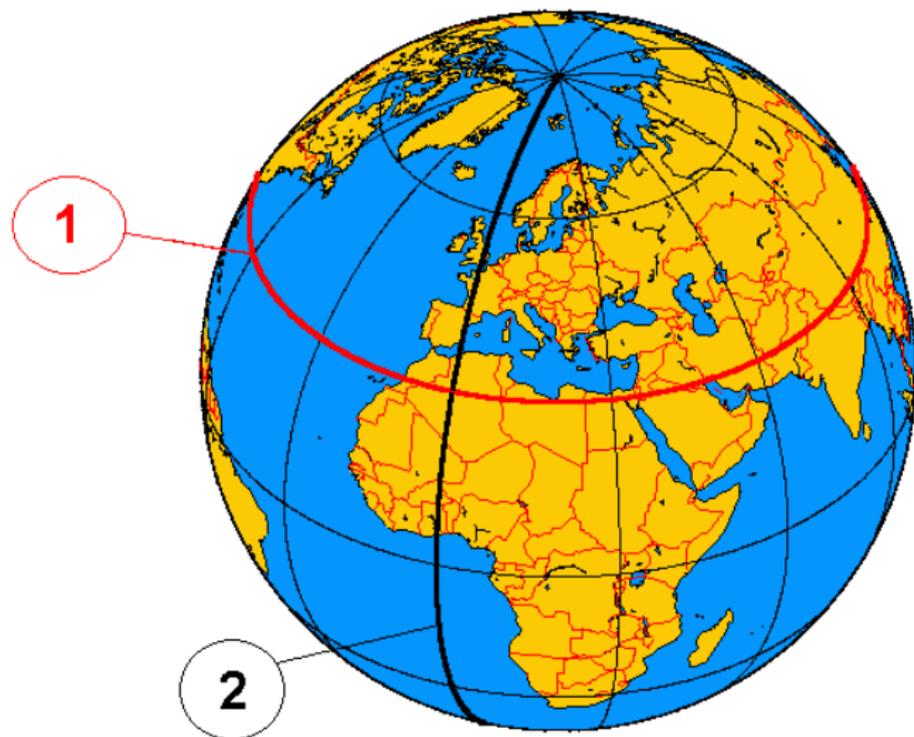
relatività generale $+45$ μ s/giorno

differenza $+38$ μ s/giorno

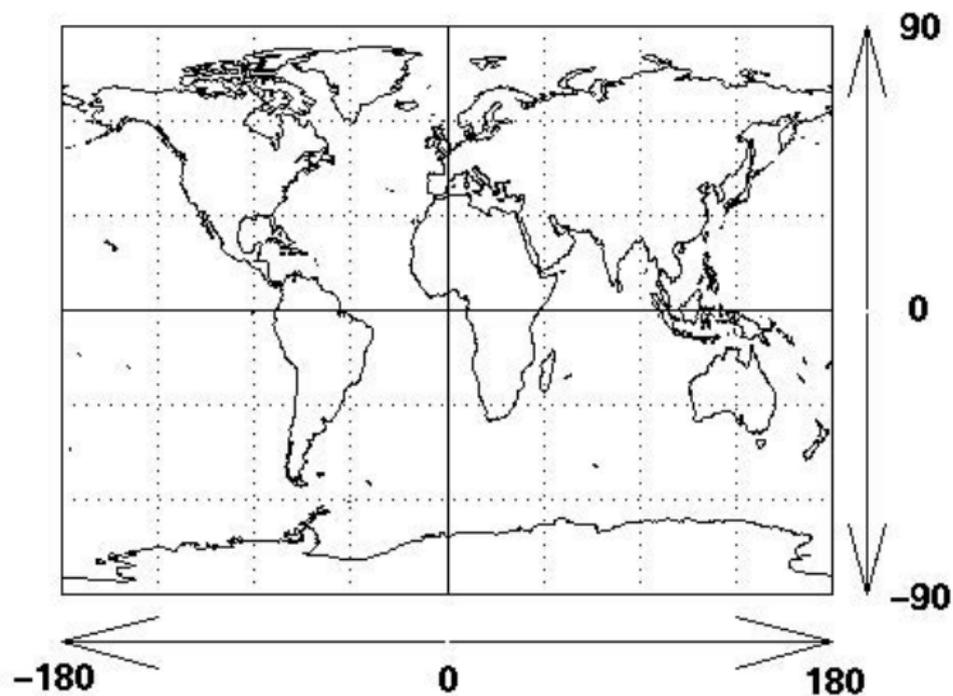
velocità satellite 14 000 km/h $\approx 3,9$ km/s

C/A (coarse acquisition code) 1,023 MHz \rightarrow 1023 bit/ms

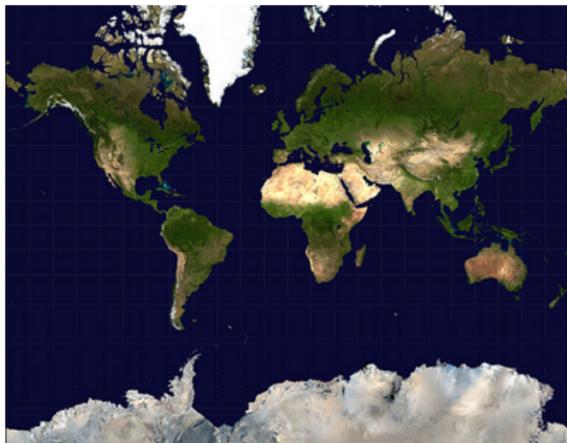
PARALLELI E MERIDIANI



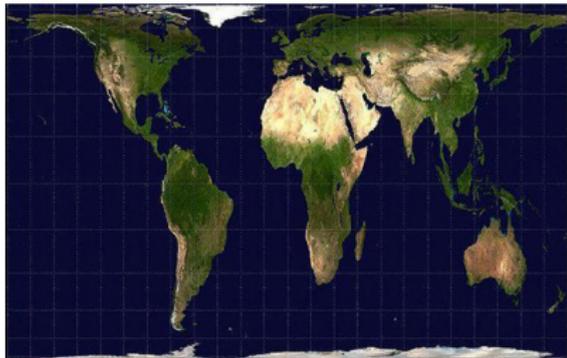
LONGITUDINE E LATITUDINE



La carta di Mercatore e la carta di Gall-Peters



conforme (equiangola)



superfici in scala