

1. Trovare il punto di flesso e gli asintoti della seguente funzione logistica:

$$N(t) = \frac{5}{1 + e^{-2t+3}}.$$

$$\begin{aligned} N'(t) &= \frac{10e^{-2t+3}}{(1+e^{-2t+3})^2} = \frac{2}{5}e^{-2t+3}[N(t)]^2, \quad N''(t) = \frac{2}{5}(-2e^{-2t+3}[N(t)]^2 + 2e^{-2t+3}N(t)N'(t)) \\ &= \frac{4}{5}e^{-2t+3}N(t)[-N(t) + N'(t)], \text{ ne segue: } N''(t) \geq 0 \Leftrightarrow N'(t) \geq N(t) \Leftrightarrow \\ &\frac{2e^{-2t+3}}{1+e^{-2t+3}} \geq 1 \Leftrightarrow 2e^{-2t+3} \geq 1 + e^{-2t+3} \Leftrightarrow e^{-2t+3} \geq 1 \Leftrightarrow -2t + 3 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{3}{2}, \\ &\text{quindi il punto } \left(\frac{3}{2}, N\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \text{ è un punto di flesso discendente per il} \\ &\text{grafico di } N. \end{aligned}$$

2. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y - 3)$$

con la condizione iniziale

$$(a) y(0) = \frac{3}{2}, \quad (b) y(0) = 3, \quad (c) y(0) = 6.$$

Le funzioni costante $y = 0$ e $y = 3$ sono soluzioni dell'equazione differenziale, quindi $y = 3$ è soluzione del problema di Cauchy (b). Sia adesso $y \neq 0$ e $y \neq 3$. Allora $\int \frac{dy}{y(y-3)} = \int dx$ e con $\frac{1}{y(y-3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y} \right)$ si ottiene $\ln \left| \frac{y-3}{y} \right| = 3x + c$ (c è costante di integrazione), quindi $\left| \frac{y-3}{y} \right| = e^{3x+c} = e^c e^{3x}$. Nel caso (a) $\left| \frac{y-3}{y} \right| = -\frac{y-3}{y} = e^{3x+c} e^{-\frac{3-3}{2}} = 1 = e^c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow 3 - y = ye^{3x}$ e la soluzione del problema di Cauchy è $y = \frac{3}{1+e^{3x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Nel caso (c) $\left| \frac{y-3}{y} \right| = \frac{y-3}{y} = e^{3x+c}$ e $\frac{6-3}{6} = \frac{1}{2} = e^c \Rightarrow \frac{y-3}{y} = \frac{1}{2}e^{3x} \Rightarrow 2(y-3) = ye^{3x}$ e la soluzione del problema di Cauchy è $y = \frac{6}{2-e^{3x}}$, $x > \frac{\ln 2}{3}$.

3. Nella reazione bimolecolare $2\text{NO}_2 \rightarrow \text{N}_2\text{O}_4$ la concentrazione $C = C(t) = [\text{NO}_2]$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$

dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

- (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.

$$\int_{C_0}^C \frac{dC}{C^2} = -k \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} = kt \Rightarrow C = C(t) = \frac{1}{\frac{1}{C_0} + kt}, \quad t \geq 0$$

- (b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \rightarrow \infty$. $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 0$

4. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^y \ln x \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

$$\int_0^y e^{-y} dy = \int_1^x \ln x dx \Rightarrow [-e^{-y}]_0^y = [x \ln x]_1^x - \int_1^x x \frac{1}{x} dx \Rightarrow 1 - e^{-y} = x \ln x - x + 1 \Rightarrow e^{-x} = x(1 - \ln x) \Rightarrow y = -\ln x - \ln(1 - \ln x), \quad 0 < x < e$$

5. In una reazione chimica $A + B \rightarrow C$ del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[A]_0$, $[B]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k([A]_0 - x) \cdot ([B]_0 - x) \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

dove k (in $s^{-1}M^{-1}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \rightarrow \infty$ nei seguenti due casi:

(a) $[A]_0 = [B]_0 = 2$, (b) $[A]_0 = 3$, $[B]_0 = 2$.

(a) $\int_0^x \frac{dx}{(2-x)^2} = k \int_0^t dt \Rightarrow \left[\frac{1}{2-x}\right]_0^x = kt \Rightarrow \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + kt \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{\frac{1}{2} + kt}, t > 0$

(b) $\int_0^x \frac{dx}{(2-x)(3-x)} = k \int_0^t dt \Rightarrow \int_0^x \left(\frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x}\right) dx = kt \Rightarrow \ln \left|\frac{2-x}{3-x}\right| - \ln \frac{2}{3} = kt$
 $\Rightarrow \frac{2-x}{3-x} = \frac{2}{3} e^{kt} \Rightarrow 2-x = \frac{2}{3}(3-x)e^{kt} \Rightarrow x = \frac{2-2e^{kt}}{1-\frac{2}{3}e^{kt}} = \frac{6-6e^{-kt}}{3-2e^{-kt}}, t > 0$

In entrambi i casi (a) e (b), $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 2$.

6. La concentrazione $C = C(t)$ di un soluto in funzione del tempo t sia soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = 3(20 - C) \\ C(0) = 5. \end{cases}$$

- (a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.
 (b) Si trovi il limite di $C(t)$ per $t \rightarrow +\infty$.
 (c) Usando la risposta di (a), si determini t in modo tale che $C(t) = 10$.

(a) $\int_5^C \frac{dC}{20-C} = 3 \int_0^t dt \Rightarrow [-\ln |20-C|]_5^C = 3t$, poiché $C(0) = 5$ si ha
 $20-C > 0 \Rightarrow \frac{20-C}{20-5} = e^{-3t} \Rightarrow C = 20 - 15e^{-3t}, t > 0$

(b) $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t) = 20$

(c) $10 = 20 - 15e^{-3t} \Rightarrow e^{-3t} = \frac{2}{3} \Rightarrow -3t = \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow t = \frac{1}{3}(\ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{3}{2}\right)$