Università di Bologna - Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Corso di ALGEBRA E GEOMETRIA PER LE APPLICAZIONI A.A. 2014/15 - N3

1. Si consideri un robot planare con un giunto di rotazione 1, un segmento 2 di lunghezza l_2, un giunto di rotazione 2 e un giunto prismatico 3 che permette alla lunghezza l_3 di un segmento 3 di variare da m_1 ad m_2. Il segmento 4 è la mano (= punto finale del segmento 3) che ha la direzione del giunto prismatico 3 . Si introducano tre sistemi di riferimento cartesiani destrorsi come segue. Il primo sistema (x_1, y_1) è fissato con l'origine nel giunto 1 e il secondo sistema di coordinate (x_2, y_2) ha anche l'origine nel primo giunto con l'asse x_2 in direzione del braccio 2. Il terzo sistema (x_3, y_3) ha origine nel giunto 2 con l'asse x_3 in direzione del giunto prismatico. Si denoti con θ_i $(i = 1, 2)$ l'angolo orientato che serve per ruotare in senso antiorario l'asse x_i nell'asse x_{i+1}. Infine, si denotino con α l'angolo (orientato in senso antiorario) tra il semiasse delle x_1 positive e la direzione della mano e con (a, b) le coordinate della mano nel sistema (x_1, y_1).

   a) Dare una formula esplicita per la mappa $f \colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ($\mathcal{J}$ = spazio dei giunti, $\mathcal{C}$ = spazio delle configurazioni del robot), che descrive il posizionamento della mano (a, b, α) in funzione di θ_1, θ_2 e l_3.

   b) Calcolare le singolarità cinematiche del robot e interpretarle geometricamente.

   c) Convertire la funzione f in una mappa polinomiale utilizzando in $\mathcal{J}$ le nuove coordinate $c_1 := \cos\theta_1$, $s_1 := \operatorname{sen}\theta_1$, $c := \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\alpha$, $s := \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\alpha$ e l_3.

   d) Data una posizione $(a, b, \cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ della mano (dove (a, b) sono le coordinate nel sistema 1 del punto in cui si trova la mano e l'orientamento della mano è dato dal vettore unitario $(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$), trovare un sistema di equazioni le cui soluzioni diano le possibili configurazioni dei giunti per le quali si ottiene tale posizione della mano.

   e) Risolvere il sistema di d) calcolando con un sistema di computer algebra una base di Gröbner ridotta per l'ideale generato dalle equazioni di d) nell'anello
   $$\mathbb{Q}(a, b, c, s, l_2)[c_1, s_1, l_3]$$
   rispetto all'ordine lessicografico $c_1 > s_1 > l_3$. Stabilire anche per quali specializzazioni dei parametri continua ad essere una base di Gröbner ridotta.

   Nota: Con CoCoA si usi $\mathbb{Q}[c_1, s_1, l_3, a, b, c, s, l_2]$ con l'ordine lessicografico $c_1 > s_1 > l_3 > a > b > c > s > l_2$.

   f) Sia ora $l_2 = 3$ e $2 \leq l_3 \leq 3$. L'orientamento della mano sia fissato in direzione del semiasse delle x_1 positive. Decidere (senza o con l'uso del computer), se si può posizionare la mano nei seguenti punti:
   $$(4, 3), \quad (5, 2), \quad (2.51,\ 2.96)\,.$$

In caso affermativo dire con quanti posizionamenti dei giunti il punto è raggiungibile.

2. Si consideri un robot tridimensionale con tre bracci e due giunti di rotazione non planari. Il primo braccio è fisso, il primo giunto permette una rotazione del secondo braccio nel piano perpendicolare al primo braccio e il secondo giunto la rotazione del terzo braccio nel piano perpendicolare al secondo braccio.
Si introducano tre sistemi di riferimento cartesiani destrorsi come segue. Il primo sistema (x_1, y_1, z_1) è fissato con l'origine nel giunto 1 e il braccio 1 sull'asse z_1. Allora il braccio 2 ruota nel piano (x_1, y_1). Il secondo sistema di coordinate (x_2, y_2, z_2) ha anche l'origine nel primo giunto con l'asse x_2 in direzione del braccio 2 e l'asse y_2 nel piano (x_1, y_1). Il terzo sistema di coordinate (x_3, y_3, z_3) con l'origine nel giunto 2 ha l'asse x_3 in direzione del braccio 3 e l'asse z_3 in direzione del braccio 2. Quindi il braccio 3 ruota nel piano (x_3, y_3) che è parallelo al piano (y_2, z_2).
Infine si i denotino con l_2, l_3 le lunghezze dei bracci $2, 3$ rispettivamente, con θ_1 l'angolo orientato che serve per ruotare in senso antiorario l'asse x_1 nell'asse x_2 e con θ_2 l'angolo orientato per ruotare in senso antiorario l'asse y_2 nell'asse x_3.
Il legame tra le coordinate di un punto nei sistemi 1 e 3 è:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1c_2 & s_1s_2 & c_1 & c_1l_2 \\ c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & s_1l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove $c_i = \cos\theta_i,\ s_i = \operatorname{sen}\theta_i,\ i = 1, 2$.

a) Determinare le coordinate della mano (= punto finale del braccio 3) nel sistema di riferimento 3.

b) Data una posizione (x, y, z) della mano nel sistema 1, trovare un sistema di equazioni le cui soluzioni diano le possibili configurazioni dei giunti per le quali si ottiene tale posizione della mano.

c) Risolvere il sistema di b) calcolando con il computer una base di Gröbner ridotta per l'ideale generato dalle equazioni di b) nell'anello

$$\mathbb{Q}(l_2, l_3)[c_1, s_1, c_2, s_2, x, y, z]$$

rispetto all'ordine lessicografico $c_1 > s_1 > c_2 > s_2 > x > y > z$.

d) Sia ora $l_2 = 5$ e $l_3 = 12$. Decidere (senza o con l'uso del computer), se si può posizionare la mano nei seguenti punti:

$$(4, 3, 12), \quad (12, 3, 4), \quad (0, 0, 13)\,.$$

In caso affermativo dire con quanti posizionamenti dei giunti il punto è raggiungibile.

e) Descrivere geometricamente il luogo delle possibili posizioni della mano.

f) Calcolare le singolarità cinematiche del robot e interpretarle geometricamente.