

**Istituzioni di Matematica – Biotecnologie**  
**Prova del 14/02/2009**

**Cognome:** \_\_\_\_\_

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Matricola:** \_\_\_\_\_

Scrivere le soluzioni nei riquadri.

1. (a) Quanti diversi risultati  $CCCCCCC$ ,  $CCCCCCCT$ ,  $CCCCCTC$ , ... si possono avere su 7 lanci di una moneta? ( $C$  = croce,  $T$  = testa)

- (b) Quanti di tali risultati contengono  $T$  esattamente 4 volte?

2. Dati i tre punti  $A = (-1, 3, 2)$ ,  $B = (3, 0, 5)$  e  $C = (-1, 1, 2)$ , calcolare

- (a) i vettori  $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{b} := \overrightarrow{AC}$ ,

- (b) il prodotto scalare di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ,

- (c) il prodotto vettoriale di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ,

- (d) la proiezione ortogonale del vettore  $\vec{a}$  sul vettore  $\vec{b}$ ,

- (e) la distanza del punto  $B$  dalla retta passante per i punti  $A$  e  $C$ .

3. Sia  $f$  una funzione numerica reale, invertibile e derivabile con continuità su  $\mathbf{R}$  e sia  $f(2) = f'(2) = 4$ ,  $f(0) = 0$ .

- (a) Calcolare  $(f^{-1})'(4)$ .

- (b) Calcolare  $\int_0^1 f'(2x) dx$ .

4. Calcolare le derivate

- (a)  $V(l) = D(1 - e^{-a(l-l_0)})^2$ ,  $\frac{dV}{dl} =$

- (b)  $z(t) = (1 + 2t) \operatorname{sen} t$ ,  $z'(t) =$

**(continua)**

(c)  $y = \frac{\ln x}{x^2}$ ,

$y' =$

5. Calcolare

(a)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2-3u)^2} du =$

(b)  $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx =$

(c)  $\int \frac{\ln x}{x^2} dx =$

6. Si consideri la reazione  $2 \text{N}_2\text{O}_5 \longrightarrow 4\text{NO}_2 + \text{O}_2$ . La concentrazione  $C := [\text{N}_2\text{O}_5]$  dipende dal tempo  $t$ , cioè  $C = C(t)$ , ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} = -kC \\ C_0 = C(0), \end{cases}$$

dove  $k = 8,05 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$ .

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.

$C(t) =$

(b) Si trovi il limite di  $C(t)$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) =$

(c) Si trovi il tempo di mezza-vita della reazione, cioè il tempo  $t_{1/2}$  a cui metà del reagente ha reagito.

$t_{1/2} =$

(d) Dopo quante ore la concentrazione di  $\text{N}_2\text{O}_5$  si riduce al 3% della concentrazione iniziale  $C_0$ ?

**Istituzioni di Matematica – Biotecnologie**  
**Prova del 14/02/2009**

**Cognome:** \_\_\_\_\_

**Nome:** \_\_\_\_\_

**Matricola:** \_\_\_\_\_

Scrivere le soluzioni nei riquadri.

1. (a) Quanti diversi risultati  $CCCCCC, CCCCCT, CCCCTC, \dots$  si possono avere su 6 lanci di una moneta? ( $C =$  croce,  $T =$  testa)

- (b) Quanti di tali risultati contengono  $T$  esattamente 3 volte?

2. Dati i tre punti  $A = (3, -1, 2)$ ,  $B = (0, 3, 1)$  e  $C = (1, -1, 1)$ , calcolare

- (a) i vettori  $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{b} := \overrightarrow{AC}$ ,

- (b) il prodotto scalare di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ,

- (c) il prodotto vettoriale di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ,

- (d) la proiezione ortogonale del vettore  $\vec{a}$  sul vettore  $\vec{b}$ ,

- (e) la distanza del punto  $B$  dalla retta passante per i punti  $A$  e  $C$ .

3. Sia  $f$  una funzione numerica reale, invertibile e derivabile con continuità su  $\mathbf{R}$  e sia  $f(3) = f'(3) = 3$ ,  $f(0) = 0$ .

- (a) Calcolare  $(f^{-1})'(3)$ .

- (b) Calcolare  $\int_0^1 f'(3x) dx$ .

4. Calcolare le derivate

- (a)  $V(r) = D(1 - e^{-\beta(r-r_0)})^2$ ,

- (b)  $z(t) = (1 - t) \cos t$ ,

- (c)  $y = \frac{\ln x}{x}$ ,

**(continua)**

5. Calcolare

(a)  $\int_0^1 \frac{1}{(3-2u)^2} du =$

(b)  $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$

(c)  $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx =$

6. Si consideri la reazione  $2 \text{N}_2\text{O}_5 \longrightarrow 4\text{NO}_2 + \text{O}_2$ . La concentrazione  $x := [\text{N}_2\text{O}_5]$  dipende dal tempo  $t$ , cioè  $x = x(t)$ , ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx \\ x_0 = x(0), \end{cases}$$

dove  $k = 8,05 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$ .

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.

$x(t) =$

(b) Si trovi il limite di  $x(t)$  per  $t \rightarrow +\infty$ .

$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) =$

(c) Si trovi il tempo di mezza-vita della reazione, cioè il tempo  $t_{1/2}$  a cui metà del reagente ha reagito.

$t_{1/2} =$

(d) Dopo quante ore la concentrazione di  $\text{N}_2\text{O}_5$  si riduce all'1% della concentrazione iniziale  $x_0$ ?