Matematica con Esercitazioni 23. 11. 2013

1. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 41, p. 103) Sia $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare rappresentata nelle basi canoniche da

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determinare il nucleo e l'immagine di F, le loro dimensioni e una loro base.

   (b) Determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che F rispetto alla base $\mathcal{B}$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^2$ viene rappresentata dalla matrice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 45, p. 104) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita dalle relazioni:

$$\begin{aligned} f(e_1) &= e_1 - e_2 \\ f(e_2) &= e_1 - e_2 + e_3 \\ f(e_3) &= e_2 - e_3 \end{aligned}$$

   dove e_1, e_2, e_3 sono la base canonica in $\mathbb{R}^3$. Dire se f è iniettiva, se è suriettiva se è biunivoca. Determinare $\dim \operatorname{Im}(f)$ e il rango della matrice che rappresenta f.

3. Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = -3 \end{cases}.$$

4. Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per stabilire se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, per calcolarne l'inversa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Qual è il rango delle matrici?

5. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $a \neq 0$ e $ad - bc \neq 0$.

   (a) Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per calcolare l'inversa della matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. (Osservazione: La formula ottenuta vale anche nel caso $a = 0$, purchè $ad - bc \neq 0$.)

   (b) Si scriva l'inversa di $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$.