

1. Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = -3 \end{cases} .$$

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 46, p. 107) Risolvere i sistemi

$$(a) \begin{cases} 6x - 2y - 2z - 8t = 7 \\ -9x + 3y + 3z + 12t = 13 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - 3y + 5z = -3 \\ 3x + 2y + 4z = -9 \\ -x - 3y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = -6 \end{cases}$$

3. Discutere la risolubilità del sistema

$$\begin{cases} x - y - 2z = 3 \\ 2x + y + z = a \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

in funzione del parametro reale a .

Suggerimento: Applicare l'eliminazione di Gauss e considerare il sistema equivalente triangolare.

4. Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per stabilire se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, per calcolarne l'inversa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

Qual è il rango delle matrici?

5. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 38, p. 94) Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Suggerimento: Si usi l'algoritmo di Gauss per ridurre le matrici a scala per righe.

6. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 34, p. 93) Sia $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcolare $\det(\mathbf{A}^3)$ e $\det(\mathbf{A}^{-1})$.

7. Calcolare il determinante delle matrici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 3 & -7 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Calcolare il determinante e l'inversa della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Nel piano cartesiano con l'origine O siano dati i punti $P = (2, 4)$ e $Q = (4, 2)$. Calcolare l'area del triangolo di vertici O, P, Q .