

1. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 41, p. 103) Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare rappresentata nelle basi canoniche da

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Determinare il nucleo e l'immagine di F , le loro dimensioni e una loro base.
 (b) Determinare una base \mathcal{B} di \mathbb{R}^3 tale che F rispetto alla base \mathcal{B} e alla base canonica di \mathbb{R}^2 viene rappresentata dalla matrice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Trovare matrici invertibili \mathbf{S} e \mathbf{T} tali che $\mathbf{SAT}^{-1} = \mathbf{B}$. Le matrici \mathbf{S} e \mathbf{T} sono univocamente determinate?

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 54, p. 121) Calcolare gli autovalori (reali o complessi) e gli autovettori corrispondenti per le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcolare gli autovalori (reali o complessi) e gli autovettori corrispondenti per le seguenti matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Dire se le matrici sono diagonalizzabili su \mathbb{R} o su \mathbb{C} e, in caso affermativo, calcolare una matrice \mathbf{S} del cambiamento di base tale che \mathbf{SAS}^{-1} è una diagonalizzazione della matrice \mathbf{A} .

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 57, p. 121) Un autovalore si dice *regolare* se la sua molteplicità geometrica coincide con la sua molteplicità algebrica. Dire se le seguenti matrici hanno autovalori regolari o no:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 58, p. 121) Determinare i valori del parametro k per i quali la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ -k & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ammette come autovettore $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Scelto uno di questi valori k , dire se la matrice corrispondente è diagonalizzabile.