

1. Trovate la somma e la differenza dei numeri complessi $z = 1 + 2i$, $w = 4 - 3i$, geometricamente usando vettori nel piano complesso. Verificate i risultati calcolando $z + w$ e $z - w$ algebricamente.
2. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 30, Esercizio 16) Scrivere in forma algebrica ($z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$) i seguenti numeri complessi:

$$\frac{(2+i)(1-i)}{3-2i}, \quad \frac{1}{i(3+2i)^2}, \quad \frac{(3+i\sqrt{2})^3}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}.$$

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 31, Esercizio 18) Calcolare il modulo e un argomento dei numeri:

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}.$$

N.B.: Non occorre calcolare i quozienti. Il quoziente di due numeri complessi ha come modulo il quoziente dei moduli, e come argomento la differenza degli argomenti.

4. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 31, Esercizio 21) Scrivere in forma algebrica $a + ib$ i numeri

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}, \quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3, \quad (1+i)^{20}, \quad (1-i)^{11}, \quad (1+i\sqrt{3})^n - (1-i\sqrt{3})^n.$$

N.B.: La formula di de Moivre può essere utile.

5. Quali dei seguenti numeri complessi si possono ottenere da $z = x + iy$ geometricamente? Si faccia un disegno.

(a) $\bar{z} := x - iy$, (b) $\overline{-z}$, (c) $-z$, (d) $\frac{1}{z}$ (solo per chi conosce l'inversione circolare).

6. Disegnare nel piano complesso il luogo dei punti z tali che:

(a) $|z| = 2$, (b) $|z| < 2$, (c) $|z| > 2$, (d) $|z - 1| = 2$, (e) $|z + 1| = 1$,
 (f) $|z + 1| = |z - 1|$, (g) $|z + i| = |z - 1|$, (h) $\operatorname{Re}(z^2) > 2$, (i) $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -1$.

(Si ricordi che $|z_1 - z_2|$ è la distanza tra z_1 e z_2 . $\operatorname{Re}(z)$ denota la parte reale e $\operatorname{Im}(z)$ la parte immaginaria di z .)

7. In un sistema di riferimento cartesiano nel piano il punto P abbia le coordinate $(-\sqrt{3}, 1)$. Sia Q il punto che si ottiene ruotando P in senso antiorario attorno l'origine O di un angolo di 60° . Calcolate: (a) le coordinate polari dei punti P e Q , (b) le coordinate cartesiane del punto Q .

8. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 31, Esercizio 27) Disegnare nel piano complesso i seguenti insiemi:

$$A = \left\{ z : 1 < |z| < 2; \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{3} \right\}, \quad B = \{ iz : z \in A \}.$$

N.B.: L'insieme B si ottiene attraverso una rotazione (centro e angolo?) di A .