

1. Si considerino i vettori  $\vec{u} = (2, 1)$  e  $\vec{v} = (1, 3)$ . Calcolare e disegnare i vettori  $2\vec{u} + \vec{v}$  e  $-2\vec{u} - 3\vec{v}$  a mano e con MATLAB/Octave (comando `quiver`).
2. Dati i vettori  $\vec{a} = (2, 1)$ ,  $\vec{b} = (-3, 2)$ , calcolare  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$  e l'angolo tra  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  in radianti e in gradi. Verificare i risultati con Octave (funzioni `norm`, `dot`, `acos`).
3. Dati  $u = [-1, 4, 5]$ ,  $v = [7, -2, 1]$ , calcolare  $u \cdot v'$  e  $u' \cdot v$ .
4. Trovare l'angolo tra i vettori  $\vec{p} = (3, 0, -4)$ ,  $\vec{q} = (-2, 2, 1)$ .
5. Dati i tre punti  $A = (-1, 0, 2)$ ,  $B = (-2, 1, 3)$  e  $C = (0, 1, 0)$ , calcolare
  - (a) i vettori  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ ;
  - (b) la distanza tra i punti  $A$  e  $B$ ;
  - (c) il prodotto scalare di  $\vec{AB}$  e  $\vec{AC}$ ;
  - (d) l'angolo  $BAC$  in gradi e in radianti.
6. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 55, Esercizio 5) Tra i seguenti vettori, individuare eventuali coppie di vettori paralleli o perpendicolari:

$$(2, -1, 1), \quad (1, 2, -1), \quad (1, 4, 2), \quad (2, 4 - 2).$$

7. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 55, Esercizio 6) Dati i vettori

$$\mathbf{v} = (1, 2, 3) \quad \text{e} \quad \mathbf{w} = (-2, 0, 1),$$

calcolare i vettori  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  e  $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$ , il modulo del vettore  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$  e il versore del vettore  $2\mathbf{v} - 3\mathbf{w}$ .

8. (Bramanti-Pagani-Salsa, pp. 70–71, Esercizio 22) Verificare che e il seguente "prodotto scalare" in  $\mathbf{R}^2$  soddisfa effettivamente gli assiomi del prodotto scalare:

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + 4y_1y_2 \\ &= [x_1, y_1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rispetto a questa struttura di spazio vettoriale con prodotto interno, rispondere alle seguenti domande:

- (a) I vettori  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  sono ortogonali?
  - (b) Quanto vale  $|(0, 1)|$ ?
  - (c) Qual è la distanza tra  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ ?
  - (d) Qual è l'angolo tra  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ ?
9. Dato il vettore  $\vec{a} = (1, 3)$ , determinare la sua proiezione secondo la direzione del vettore  $\vec{b} = (1, 1)$ .
  10. Sia  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  un vettore arbitrario in  $\mathbf{R}^n$ . Usando la disuguaglianza di Schwarz, provare che

$$(v_1 + v_2 + \dots + v_n)^2 \leq n(v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2).$$

Trovare un vettore  $\vec{v}$  tale che nella precedente disuguaglianza valga il segno di uguale.