C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Materiali Tradizionali e Innovativi 28. 11. 2013

1. Per i coefficienti di Fourier $\mathbf{c} = (c_0, c_1, c_{-2}, c_{-1})^T$ dell'interpolatore trigonometrico rispetto ai valori nodali $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, y_3)^T$ sono note le formule

$$(1)\ y_j = \sum_{k=-2}^{1} c_k e^{ikj\frac{\pi}{2}}, \qquad (2)\ c_k = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3} y_j e^{-ikj\frac{\pi}{2}}$$

(si veda [Quarteroni-Saleri, formule (3.19), (3.23)]; la (3.19) è da correggere: la sommatoria deve estendersi solo fino ad M). Sia $w := e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

(a) Calcolare w^4 ed esprimere le potenze $\overline{w}^k, k = 1, 2$ ($\overline{w}$ è il complesso coniugato di w) come potenze $w^k, k = 2, 3$.

(b) Per $k \in \mathbb{Z}$, calcolare $w^k \overline{w}^k$.

(c) Trovare una matrice $\mathbf{F}$ che permette di scrivere la (1) nella forma $\mathbf{y} = \mathbf{Fc}$.

(d) Scrivere gli elementi di $\mathbf{F}$ attraverso le potenze di w in modo tale che l'esponente cresca dal "nord-ovest" al "sud-est", essendo 0 nell'angolo nord-ovest e 9 nell'angolo sud-est della matrice.

(e) Dimostrare che $4 \cdot \mathbf{F}^{-1} = \overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}}^T$. (Si usi $1 + w + w^2 + w^3 = \frac{w^4-1}{w-1}$.)

(f) Utilizzare $\mathbf{F}^{-1}$ per scrivere la (2) in forma matriciale.

(g) Calcolare il prodotto matriciale

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e confrontare il risultato con la matrice $\mathbf{F} =: \mathbf{F}_4$.

Nota: Più in generale, per N pari e $M = \frac{N}{2}$, si ha il risultato che sta alla base della trasformata rapida di Fourier (FFT):

$$\mathbf{F}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_M & \mathbf{D}_M \\ \mathbf{I}_M & -\mathbf{D}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_M & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{F}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_{N-1} & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_N \end{bmatrix},$$

dove $\mathbf{D}_M = \mathrm{diag}(1, w, w^2, \dots, w^{M-1})$ ed $\mathbf{e}_1 \dots, \mathbf{e}_N$ sono i vettori colonna della base canonica di $\mathbb{C}^N$.

2. Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss calcolando la fattorizzazione $\mathbf{LU}$ della matrice dei coefficienti:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & & & + & 2x_3 & = & 1 \end{array} .$$

3. Risolvere $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ conoscendo i fattori $\mathbf{L}$ ed $\mathbf{U}$ di $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, cioè risolvere prima il sistema triangolare $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$ con la *sostituzione in avanti* e poi il sistema triangolare $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$ con la *sostituzione all'indietro*:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} .$$