

1. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 46, p. 107) Risolvere i sistemi

$$(a) \begin{cases} 6x - 2y - 2z - 8t = 7 \\ -9x + 3y + 3z + 12t = 13 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x - 3y + 5z = -3 \\ 3x + 2y + 4z = -9 \\ -x - 3y + z = 3 \\ 2x + y + 3z = -6 \end{cases}$$

Verificare i risultati in MATLAB/Octave.

2. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 37, p. 93) Scrivere la matrice inversa di ciascuna delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificare i risultati in MATLAB/Octave (comando `inv`).

3. (Bramanti-Pagani-Salsa, Esercizio 38, p. 94) Determinare il rango delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Verificare i risultati in MATLAB/Octave (comando `rank`).

4. Calcolate il numero di condizionamento delle matrici in norma 1, 2 e ∞ :

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{200} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 9 & -10 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}.$$

Confrontate i risultati con quelli ottenuti con MATLAB/Octave usando i comandi `cond(A, 1)`, `cond(A, 2)`, `cond(A, inf)`.

NB: Le norme matriciali indotte dalle norme vettoriali 1, 2 e ∞ sono

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_1 &= \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, \\ \|\mathbf{A}\|_2 &= \sqrt{\varrho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})}, \text{ dove } \varrho(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \text{ è il massimo dei numeri } \lambda \\ &\text{ tali che } \det(\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \\ \|\mathbf{A}\|_\infty &= \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \end{aligned}$$

e il numero di condizionamento è per definizione $\|\mathbf{A}\| \|\mathbf{A}^{-1}\|$.