1) PROBLEMA DI CAUCHY: ① $y'' + 2y' = 6x^2 + 2x$; $y(0) = y'(0) = 0$

E.D. omogenea associata: ② $y'' + 2y' = 0$; EQ. CAR. ③ $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, la quale dà $\lambda = \left\langle \begin{matrix} 0 \\ -2 \end{matrix} \right.$. $\Rightarrow$ SOLUZIONI DI ②: $\boxed{C_1 + C_2 e^{-2x}}$

CALCOLO DI UNA SOLUZIONE DI ①. $f(x) = 6x^2 + 2x$ è "di tipo ④" con $\begin{array}{c|c|c|c} m & \alpha & \beta & k \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$ ($k=1$ perché $0+0i = 0$ è soluzione semplice di ③). Allora c'è una soluzione di ① della forma: $z(x) = x(ax^2 + bx + c)$, cioè: $z(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ da cui $z'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, $z''(x) = 6ax + 2b$; allora

$$L(z) = \left.\begin{matrix} z'' \\ +2z' \end{matrix}\right\} = \begin{matrix} 6ax + 2b \\ +6ax^2 + 4bx + 2c \end{matrix}$$

$$= 6ax^2 + (6a + 4b)x + 2b + 2c \text{, desiderato} = 6x^2 + 2x.$$

Deve perciò essere $\begin{cases} 6a = 6 \\ 2b + 2c = 0 \\ 6a + 4b = 2 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$, e quindi

$z(x) = x^3 - x^2 + x$; la soluzione generale di ① è pertanto

$y(x) = x^3 - x^2 + x + C_1 + C_2 e^{-2x}$; $y'(x) = 3x^2 - 2x + 1 - 2C_2 e^{-2x}$

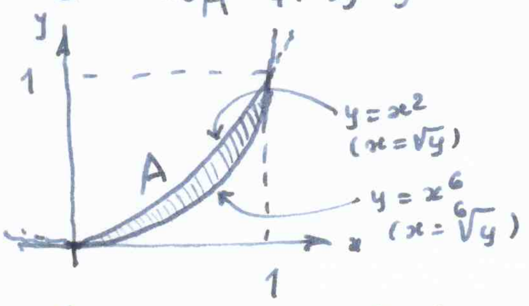
$\begin{matrix} y(0) = C_1 + C_2 \\ y'(0) = 1 - 2C_2 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 1 - 2C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{2} \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$

SOLUZIONE PROBLEMA DI CAUCHY: $y(x) = x^3 - x^2 + x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2x}$, $x \in]-\infty, +\infty[$

C4. ING. FAENZA 19.02.2014

---

② $\iint_A \frac{24x^5}{4 + 2y^2 - y^4} \, dx\,dy$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ x^6 \leq y \leq x^2\}$



Conviene integrare lungo linee parallele all'asse x

$$\iint_A \frac{24x^5}{4+2y^2-y^4} \, dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[6]{y}} \frac{24x^5}{4+2y^2-y^4} \, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{4x^6}{4+2y^2-y^4} \right]_{x=\sqrt{y}}^{x=\sqrt[6]{y}} dy = \int_0^1 \frac{4y - 4y^3}{4+2y^2-y^4} \, dy =$$

$$= \left[\ln(4 + 2y^2 - y^4) \right]_{y=0}^{y=1} = \ln 5 - \ln 4 = \ln\left(\frac{5}{4}\right)$$

---

3) MODULO E UN ARGOMENTO di $z = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^7$

Sia $w = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. Allora $|w| = 2$, e, detto α un argomento di w, $\tan\alpha = 1$; siccome $\operatorname{Re} w > 0$, va bene $\alpha = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Allora $w = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, e $z = w^7 = 2^7 e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Perciò il modulo di z è $|z| = 2^7 = 128$, e $\arg z = \frac{7\pi}{4}$. In forma cartesiana.

$z = 128\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = 64\sqrt{2} - 64\sqrt{2}\, i$

---

4) DETERMINARE UNA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^3$ FORMATA DA AUTOVETTORI PER LA MATRICE $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Autovalori: soluzioni di $p(\lambda) = 0$, $p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} =$

$= (2-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right)$; $p(\lambda) = 0$ se $2 - \lambda = 0$ ($\Rightarrow \lambda = 2$), oppure

$(3-\lambda)^2 = 1$, ovvero $3-\lambda = \pm 1$, da cui $\lambda = \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}$. Allora abbiamo $\lambda = 2$ autovalore con molteplicità algebrica 2; $\lambda = 4$ con m.a. = 1

• <u>Autospazio con $\lambda = 2$</u>: $(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} x \quad +z = 0 \\ \quad 0 \quad = 0 \\ x \quad +z = 0 \end{cases}$

equivalente a: $x+z=0$. Ora cerchiamo due vettori ortogonali, nel piano $x+z=0$, i cui punti sono: $(x, y, -x)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Un primo vettore può essere $(0,1,0)$; un altro è $(1,0,-1)$, il quale è anche ortogonale al primo. Il vettore $v_1 = (0,1,0)$ ha anche norma 1; il vettore $u_2 = (1,0,-1)$ ha norma $\|u_2\| = \sqrt{2}$, quindi il vettore $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ è ortogonale a v_1 e ha norma 1.

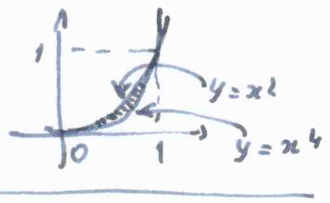
• <u>Autospazio con $\lambda = 4$</u>: $(A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} -x \quad +z = 0 \\ \quad -2y \quad = 0 \\ x \quad -z = 0 \end{cases}$

equivalente a: $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$. Gli autovettori sono $(x, 0, x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, e formano (necessariamente) un autospazio di dimensione 1, per il quale una base è $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} = \{v_3\}$.
Abbiamo scelto v_3 già con norma 1. Necessariamente, v_3 è ortogonale a v_1, v_2, perché A è simmetrica. Una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$, spettrale per A (cioè composta da autovettori per A) è $\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{(0,1,0); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$.

VARIANTE ES. 1): $y'' + 3y' = 27x^2 - 18x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
La soluzione è: $y(x) = e^{-3x} + 3x^3 - 6x^2 + 4x - 1$, $x \in]-\infty, +\infty[$

2) $I = \iint_A \frac{12x^3}{5+3y^2-2y^3}\,dx\,dy$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^4 \le y \le x^2,\ x \ge 0\}$

$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} \frac{12x^3}{5+3y^2-2y^3}\,dx \right) dy = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{6}{5}\right)$



VARIANTE ES. 3): MODULO, ARGOMENTO DI $z = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^5$

$z = \left(2 e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5 = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $\left(= -16\sqrt{2} - 16\sqrt{2}\, i\right)$;

$|z| = 2^5 = 32$, $\arg z = \frac{5\pi}{4}$

VARIANTE ES. 4: Base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Gli autovalori sono: $\lambda_1 = 5$ (doppio), $\lambda_2 = 3$ (semplice);

Autovettori ortonormali per l'autospazio $Eig(A,5)$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Autovettore (orto)normale per $Eig(A,3)$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Base di $\mathbb{R}^3$ ortonormale e spettrale per A: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$.