Probabilità e Statistica Matematica (C.d.L. in Chimica Industriale)
Soluzioni 31. 01. 2006

1. (a), (b)

		Y: 4	5	6	7	
X	2	$\frac{1}{6}$	0	0	0	$\frac{1}{6}$
	3	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
	4	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

(c) $E(X) = \frac{10}{3}$, $E(Y) = \frac{11}{2}$; (d) $\text{Var}(X) = \frac{5}{9}$, $\text{Var}(Y) = \frac{11}{12}$;
(e) $\text{Cov}(X, Y) = \frac{2}{3}$; (f) $\rho = \sqrt{\frac{48}{55}} \approx 0,93$.

2. Sia X una variabile aleatoria normale di media 5 e di varianza 4.

   (a) $P(X > 8) = P(\frac{X-5}{2} > 1,5) = 1 - \Phi(1,5) \approx 1 - 0,9332 = 0,0668$;

   (b) $P((X-5)^2 > 20) = P((\frac{X-5}{2})^2 > 5) = P(\chi^2(1) > 5) \approx 0,025$
   oppure

$$\begin{aligned} P((X-5)^2 > 20) &= P(|X-5| > \sqrt{20}) \\ &= P(\frac{X-5}{2} < -\frac{\sqrt{20}}{2}) + P(\frac{X-5}{2} > \frac{\sqrt{20}}{2}) \\ &= 2(1 - \Phi(\sqrt{5})) \approx 2(1 - \Phi(2,236)) \\ &\approx 2(1 - 0,9875) = 0,025\,. \end{aligned}$$

3. Con $\mu = 1000$, $\sigma^2 = 10^5$ e $\text{Var}(\overline{X}) = \sigma^2/100$ si ottiene

$$\frac{(1020 - 1000)10}{\sigma} = 0,2\sqrt{10} \approx 0,6325\,,$$

   quindi $P = 1 - \Phi(0,2\sqrt{10}) \approx 1 - 0,7357 = 0,2643$.

4. Essendo (X_1, X_2) un campione di X, si ha $E(X_1) = E(X_2) = E(X)$, $E(X_1^2) = E(X_2^2) = E(X^2)$ e che X_1 e X_2 sono indipendenti, quindi

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2) = (E(X))^2\,.$$

   Segue

$$\begin{aligned} E(T_1) &= \frac{1}{2}(E(X^2) + E(X^2)) - \frac{1}{4}(E(X^2) + E(X^2) + 2(E(X))^2) \\ &= \frac{1}{2}(E(X^2) - (E(X))^2) = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (T_1 \text{ è distorto})\,, \\ E(T_2) &= \frac{1}{2}(E(X^2) + E(X^2)) - E(X) \cdot E(X) = \sigma^2 \quad (T_2 \text{ è corretto})\,, \\ E(T_3) &= \frac{1}{5}E(X^2) + \frac{4}{5}E(X^2) - E(X) \cdot E(X) = \sigma^2 \quad (T_3 \text{ è corretto})\,. \end{aligned}$$

5. $\overline{x} = 4,53$, $s^2 = 7 \cdot 10^{-4}$.
   (a1) $4,53 \pm 0,07$, (a2) $4,53 \pm 0,15$;
   (b1) $[0,014;\ 0,167]$, (b2) $[0,011;\ 0,374]$.