Probabilità e Statistica matematica

4. 2. 2008

1. Un'urna contiene 8 palline di cui 2 rosse e 6 nere. Vengono eseguite 5 estrazioni di una pallina, (A) rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna, (B) non rimettendola. In entrambi i casi (A) e (B), si risponda a ciascuna delle seguenti domande:
   (a) Qual è la probabilità che delle 5 palline estratte una sola sia rossa?
   (b) Qual è la probabilità che delle 5 palline estratte almeno 2 siano rosse?
   (c) Sia X il numero delle palline rosse tra le 5 palline estratte. Calcolare il valore atteso $E(X)$ e la varianza $\mathrm{Var}(X)$ di X.
   (d) Disegnare il grafico della funzione di ripartizione di X e il diagramma a barre della funzione di probabilità.

2. In una serie di prove di Bernoulli ripetute e indipendenti, qual è la probabilità che si abbia il primo successo all'n-esima prova? Calcolare il valore atteso del numero della prova alla quale si ha il primo successo.

3. Qual è la probabilità che su 400 lanci di una moneta non truccata il numero di teste sia tra 190 e 210? (Si scriva la formula esatta e, usando l'approssimazione normale, si calcoli approssimativamente tale probabilità.)

4. Siano R_1 e R_2 numeri casuali indipendenti tra 0 e 1, cioè variabili aleatorie continue uniformi sull'intervallo $[0, 1]$.
   (a) Trovare le funzioni di distribuzione e le funzioni di densità delle variabili casuali $X := R_1 - R_2$ e $Y := |X| = |R_1 - R_2|$.
   (b) Calcolare $E(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ e $E(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$.

5. Sia R un numero casuale, cioè una variabile aleatoria uniforme sull'intervallo $[0, 1]$ e sia ν un numero reale positivo fisso. Sia $X := -\frac{1}{\nu} \ln R$.
   (a) Si calcolino la funzione di ripartizione e la funzione di densità di X.
   (b) Si calcolino $E(X)$ e $\mathrm{Var}(X)$.
   (c) Siano X_1 e X_2 variabili aleatorie indipendenti, entrambe distribuite come X. Si trovi la funzione di densità di $X_1 + X_2$.

6. Sono state effettuate quattro misure di una grandezza fisica ottenendo i valori: $10,2$; $9,9$; $10,2$; $10,1$. Assumendo che questi dati possano essere pensati come un campione normale la cui media è il valore vero della grandezza fisica, calcolare
   (a) la media campionaria e la mediana campionaria;
   (b) la varianza campionaria e la deviazione standard campionaria;
   (c) l'intervallo in cui giacerà il valore vero per un livello di confidenza (c1) del 95%, (c2) del 99%;
   (d) l'intervallo fiduciario per la varianza ad un livello (d1) del 95%, (d2) del 99%.