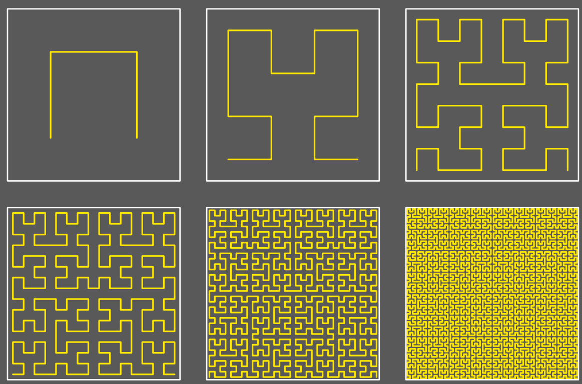
La Matematica per le altre discipline

Prerequisiti e sviluppi universitari



a cura di

G. Accascina, G. Anichini, G. Anzellotti,
F. Rosso, V. Villani, R. Zan

Unione Matematica Italiana

2006

Ho continuato a fare aritmetica con mio padre, superando orgogliosamente le frazioni e i decimali. Sono finalmente arrivata al punto in cui tante mucche mangiano tanta erba e i recipienti si riempiono di acqua in tante ore. L'ho trovato avvincente.

Agatha Christie, "An Autobiography"

Figura in copertina: Primi passi della costruzione, dovuta a Peano, di una curva che "riempie un quadrato"

Prefazione

La matematica è universalmente riconosciuta come potente linguaggio per descrivere il mondo, per costruire modelli, per calcolare e per prevedere. Per questo è considerata uno strumento utilissimo, se non indispensabile, in moltissime discipline: la Statistica, l'Informatica, la Fisica, la Chimica, la Geologia, la Biologia, la Psicologia, l'Ingegneria, l'Architettura, la Medicina, l'Agraria, l'Economia, la Sociologia. Anche in molte discipline di area umanistica, ad esempio le Scienze dei beni culturali e l'Archeologia, e anche nelle Scienze Giuridiche si va ampliando, o almeno comincia, l'uso di strumenti matematici, sia di tipo quantitativo e statistico, sia di tipo logico-formale. Conseguenza di questo è che in più della metà delle classi delle lauree previste nel nuovo ordinamento universitario sono presenti settori scientifico-disciplinari di matematica e quindi che l'insegnamento/apprendimento della matematica è un problema culturale e didattico rilevante, che riguarda ogni anno migliaia di docenti universitari e centinaia di migliaia di studenti. Nei corsi di laurea della classe 32 - Scienze Matematiche, questo problema assume un carattere del tutto specifico e non vogliamo considerarlo in questa sede. Puntiamo invece l'attenzione sui corsi di laurea dove la matematica svolge un ruolo strumentale e non costituisce una disciplina caratterizzante e sulla questione di come in questi corsi si possano realizzare insegnamenti che siano capaci di portare gli studenti alla competenza matematica richiesta, partendo dalle conoscenze possedute all'ingresso e utilizzando la quantità di crediti a disposizione. Non si tratta di una questione facile, a causa del limitato numero di crediti che, in genere, è stato assegnato alla matematica negli ordinamenti didattici dei corsi di laurea, e il problema è reso ancora più difficile dal fatto che la preparazione iniziale degli studenti è molto disomogenea, e per molti è piuttosto carente. Pur restando fermo indubbiamente che la progettazione dei percorsi formativi è compito dei singoli docenti e di ciascun consiglio di corso di laurea, l'Unione Matematica Italiana ritiene che, per affrontare tale questione, sia utile avere a disposizione un quadro comune di riferimento delle conoscenze e competenze matematiche principali che sono possibile oggetto degli studi universitari, rispetto al quale ciascuno possa determinare la propria posizione. Inoltre, l'UMI ritiene che l'articolazione in "unità elementari" delle conoscenze, abilità e competenze che devono essere raggiunte al termine di un percorso didattico, unità ben definite e condivise a livello nazionale, possa essere utile ai fini della certificazione dei crediti (ad esempio in caso di trasferimento ad altre sedi o a un diverso corso di laurea) e più in generale ai fini dell'accreditamento dei corsi di studio. L'Unione Matematica Italiana sente fortemente tali esigenze ed ha quindi nominato un gruppo di lavoro, del quale hanno fatto parte, nella fase istruttoria dei lavori, in cui è stata progettata l'architettura del documento, anche due colleghi matematici che lavorano nell'AMASES, e, nella stesura delle due unità che trattano argomenti di Matematica Discreta, due colleghi dell'AIRO. Tale gruppo aveva il compito di elaborare un quadro delle conoscenze e competenze matematiche principali che sono oggetto degli studi universitari, raggruppate in possibili "unità elementari"; tali unità dovevano riportare indicazioni sulle propedeuticità e una stima dell'impegno richiesto agli studenti, con la finalità di realizzare uno strumento utile per prendere decisioni relativamente alla programmazione dei percorsi di studio universitari e dei singoli insegnamenti di matematica. Una prima stesura di questo quadro di riferimento è stata prodotta e viene proposta nel presente documento. Un esempio di possibile utilizzazione è il seguente. Supponiamo che un certo corso di laurea ritenga indispensabile che i propri laureati conoscano e siano in grado di utilizzare certi strumenti matematici. Questo corso di laurea potrà allora trovare nel documento qui presentato una mappa delle conoscenze e delle abilità che occorrono per sviluppare tali strumenti e una stima dei crediti necessari. Dopodiché, a seconda delle diverse situazioni e dei crediti disponibili, il corso di laurea dovrà decidere quali delle conoscenze necessarie si considerano già acquisite all'ingresso dell'Università (e quindi, se gli studenti non le possiedono, hanno dei "debiti" da colmare opportunamente) e quali altre devono invece essere trattate negli insegnamenti universitari. Tutto questo può essere fatto in vari modi, che possono differire da Ateneo ad Ateneo e da un Corso di laurea all'altro:

- ad un estremo, si potrà richiedere un elevato livello di conoscenze per l'accesso, e allora nel corso di laurea si potranno raggiungere obiettivi più ambiziosi con un numero limitato di crediti; in tal caso occorrerà un certo lavoro per ottenere e per verificare che gli studenti abbiano effettivamente le conoscenze iniziali stabilite;
- all'altro estremo, si potranno accettare conoscenze iniziali anche piuttosto basse; in tal caso occorrerà dare un maggior numero di crediti all'insegnamento universitario della matematica per avere laureati adeguatamente preparati.

Naturalmente si hanno anche altre possibilità, fra cui quella di separare gli studenti in classi di diverso livello e in percorsi di diverse caratteristiche e diversa durata, ma non è questo l'oggetto della nostra attenzione in questa sede.
Le conoscenze richieste per l'accesso dovranno poi essere rese note agli studenti in fase di orientamento e agli insegnanti delle scuole superiori, che potranno perseguirle, compatibilmente con gli altri loro obiettivi formativi. Il presente documento può quindi anche essere una mappa utile agli studenti e agli insegnanti delle scuole secondarie superiori per collocarsi e orientarsi in questa articolata situazione.
Infine, l'UMI ritiene di dover sottolineare che *definire* e rendere pubbliche le conoscenze per l'ingresso è importante, ma non è sufficiente. Occorre anche fare in modo che gli studenti che frequentano i diversi corsi *possiedano effettivamente i pre-requisiti stabiliti*. Infatti, si ribadisce, l'insegnamento della matematica non può essere efficace se non si rivolge a studenti che in virtù della loro precedente preparazione sono in grado di trarne pro-

fitto. L'inseguimento di contenuti matematici elevati o ritenuti più utili per le applicazioni, senza avere il tempo necessario per maturare i concetti e senza un'attenzione adeguata alla preparazione di ingresso, potrebbe invece dar luogo in concreto ad un crescente divario tra il programma dichiarato (e anche formalmente svolto) e le *effettive conoscenze acquisite* dagli studenti.

9 febbraio 2006

Indice

Introduzione: obiettivi e contenuti del documento

Cosa si trova in questo documento.
Questo documento presenta un possibile schema a blocchi delle principali conoscenze e competenze matematiche che possono essere oggetto di studio nei corsi di laurea dove la matematica svolge un ruolo strumentale e non costituisce una disciplina caratterizzante. Lo schema comprende, per ciascun blocco,

- un'indicazione di propedeuticità e prerequisiti;
- una stima dell'impegno richiesto agli studenti per apprendere quel blocco, e quindi del corrispondente numero di crediti.

Nel documento sono comprese sia conoscenze e abilità di base che dovrebbero essere mediamente già possedute dagli studenti all'ingresso dell'Università, sia conoscenze più avanzate che sono usualmente oggetto dei corsi universitari del primo o del secondo anno.

Finalità e destinatari. Il documento intende proporsi come un possibile *quadro di riferimento* per individuare gli obiettivi e costruire i curricula degli insegnamenti di matematica cosiddetti "di servizio" e per attribuire agli stessi insegnamenti un opportuno numero di crediti, a seconda dei requisiti di accesso richiesti agli studenti. Il documento vuole anche proporsi come uno strumento per individuare con maggiore precisione tali requisiti. Per tutti questi fini, il documento potrà essere utilizzato dal responsabile e dai docenti di matematica di ciascun corso di laurea, tenendo conto delle specifiche caratteristiche del corso di laurea stesso. La descrizione che viene data delle conoscenze e abilità di base può poi essere utile anche ai docenti, agli istituti scolastici e agli atenei per le iniziative volte a migliorare la preparazione in matematica degli studenti che entrano all'università.

La struttura a blocchi. Le conoscenze e le abilità matematiche sono presentate in "unità elementari", dette anche "blocchi" o "mattoncini", che si possono considerare come elementi costitutivi degli obiettivi che gli studenti devono raggiungere al termine di un corso o di un modulo di insegnamento. Vorremmo che fosse chiaro che ogni blocco indica un insieme di conoscenze, abilità e competenze e non vuole essere uno schema per lo svolgimento delle lezioni. In particolare, si sottolinea che l'ordine in cui sono presentate le conoscenze e le abilità in un blocco non è necessariamente quello in cui esse possono essere sviluppate nelle lezioni. Allo stesso modo, l'ordine in cui sono presentati i blocchi non corrisponde ad un ordine sequenziale. Un esempio di rappresentazione grafica dei riferimenti incrociati è nella mappa in figura 0.a. Inoltre è possibile organizzare un corso in modo tale che in un certo momento siano trattati insieme contenuti che compaiono qui in blocchi diversi. Osserviamo anche che vi sono alcune coppie di blocchi che hanno intersezione non vuota. Naturalmente, la suddivisione in blocchi che si trova qui proposta non è l'unica possibile. Anche altre scelte sarebbero state ragionevoli, ma ci auguriamo che quella fatta sia adeguata agli scopi indicati.

Struttura di ciascun blocco. La descrizione di ogni blocco è articolata nel modo seguente:

MOTIVAZIONI
Esplicitano le ragioni per cui il blocco è stato costituito in quel certo modo e anche alcune possibili motivazioni per cui quel blocco può avere interesse nel contesto degli studi universitari.

PREREQUISITI E COLLEGAMENTI
I prerequisiti indicano le conoscenze indispensabili o utili per affrontare il blocco, e sono espressi quando possibile in termini di altri blocchi. A seconda dei casi cercheremo di precisare se è necessario padroneggiare completamente un certo blocco prerequisito o se è sufficiente averne una padronanza parziale, ad esempio in termini di conoscenza limitata ad alcuni contenuti, o di minore abilità di calcolo, o di minore approfondimento teorico. In alcuni casi osserveremo che per cominciare ad affrontare un certo blocco X è sufficiente avere una conoscenza parziale di certi altri blocchi Y, Z, anche se, man mano che si procede nello studio di X, occorrerà approfondire la conoscenza di Y e Z.
Le indicazioni date riguardo ai prerequisiti non dovrebbero essere prese come prescrizioni rigide. Esse sono soprattutto un richiamo a riflettere sul fatto che per affrontare efficacemente lo studio di un certo argomento, lo studente deve possedere adeguatamente alcune conoscenze e abilità, senza le quali non sarà in grado di trarre profitto dal suo studio. Tale riflessione dovrebbe essere fatta sia dai responsabili dei corsi di laurea, che insieme ai docenti universitari stabiliscono l'organizzazione dei corsi di matematica e i requisiti per l'accesso, sia dagli studenti che si indirizzano ad un certo corso di laurea e che dovrebbero prepararsi adeguatamente. Diciamo qui una volta per tutte che il blocco n.1 *Linguaggio degli insiemi e delle funzioni, insiemi numerici e operazioni* è un prerequisito per tutti gli altri blocchi.

CONTENUTI E OBIETTIVI
La lista dei contenuti è semplicemente un elenco di nozioni e risultati matematici sui quali vertono gli obiettivi. Gli obiettivi sono espressi invece in termini di conoscenze e abilità. Quando ci è stato possibile abbiamo cercato di descrivere le abilità con precisione, indicando il tipo di prestazione che riteniamo adeguata da parte degli studenti.

ESEMPI DI PROBLEMI, DOMANDE, ESERCIZI
Gli esempi che presentiamo al termine di ogni blocco intendono precisare ulteriormente le abilità e le competenze che sono descritte negli obiettivi. Gli esempi proposti sono di tipologia diversa, sia per quanto riguarda il tipo di processi da mettere in atto, sia per quanto riguarda le conoscenze necessarie (in alcuni casi per rispondere è sufficiente possedere alcune nozioni relative all'argomento, altre volte è necessario individuare relazioni non banali fra le conoscenze possedute). D'altra parte, uno stesso esempio si può presentare come un esercizio standard o come un problema più complesso, a seconda di quali contenuti sono

stati affrontati in precedenza, e in quale modo, oppure a seconda degli strumenti, sia teorici, sia di calcolo, che sono consentiti.

NUMERO DI CREDITI
A ciascun blocco è stato attribuito un peso in crediti, ma l'indicazione data non dovrebbe essere presa come una prescrizione rigida. Il numero di crediti attribuito potrà essere aumentato o ridotto tenendo conto delle seguenti variabili:

- il fatto che gli argomenti di un blocco siano svolti tutti o in parte;
- il grado di approfondimento e di abilità che si vuole sia raggiunto dagli studenti;
- l'inevitabile sovrapposizione di più blocchi all'interno di un insegnamento;
- il grado di preparazione e di "maturità matematica" degli studenti all'inizio del corso;
- la possibile interazione con altri insegnamenti dello stesso Corso di laurea.

Un credito, come indicato nelle norme vigenti, corrisponde convenzionalmente a 25 ore di lavoro dello studente, che in questo documento si intende siano da ripartire fra 8 - 10 ore di lezione ed esercitazione in classe e 17 -15 ore di lavoro individuale. Si richiama comunque l'attenzione sul fatto che per arrivare a determinati obiettivi sono necessarie una certa quantità di lavoro e una certa quantità di tempo per la maturazione dei concetti, non riducibili oltre una certa soglia.

Considerazioni generali. A questo punto è opportuno esplicitare alcune considerazioni e criteri generali che il gruppo di lavoro ha condiviso e adottato nella definizione dei "mattoncini".
Chi intende diventare un matematico ha a sua disposizione molto tempo da dedicare allo sviluppo sistematico di una conoscenza approfondita e formalizzata della matematica. Chi invece, in un altro corso di laurea, deve dotarsi in un tempo limitato di strumenti matematici utili per altre discipline, e quindi di un linguaggio matematico e di un insieme di schemi cognitivi per la lettura e l'interpretazione di fenomeni, naturali o sociali, può accontentarsi di possedere un apparato formale un po' ridotto e tuttavia deve

- conoscere approfonditamente alcuni problemi e situazioni prototipo;
- conoscere definizioni ragionevolmente precise degli oggetti matematici considerati e conoscere la loro possibile interpretazione in diversi contesti;
- conoscere un numero sufficientemente elevato di proprietà significative degli oggetti noti, sotto la forma di enunciati di teoremi, e saperle interpretare e utilizzare in diversi contesti;
- conoscere argomentazioni e giustificazioni dei teoremi che per alcuni risultati, o almeno in casi particolari, hanno anche la forma di dimostrazioni rigorose;
- possedere abilità operative di calcolo e di rappresentazione-visualizzazione, anche con l'assistenza di opportuni strumenti, e nella soluzione di problemi;
- avere capacità di soluzione di problemi.

Oltre a quelle indicate, che sono conoscenze disciplinari di tipo dichiarativo-proposizionale (indicate talvolta come "sapere"), e di tipo procedurale (indicate talvolta come "saper fare"), l'utilizzatore della matematica deve avere anche altre conoscenze, soprattutto se vuole essere in grado di costruire, o almeno di adattare e utilizzare, modelli matematici. In particolare:

- oltre che conoscere singoli oggetti matematici (ad esempio la funzione e^x, o l'equazione differenziale $u'' + u = 0$), deve conoscere "famiglie" di oggetti e le loro proprietà (ad esempio la famiglia di funzioni a^x, con la proprietà che c'è un tempo di dimezzamento, oppure la famiglia delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine, con diversi comportamenti a seconda dei coefficienti);
- deve avere la capacità di cambiare rappresentazioni (grafiche, simboliche, nel linguaggio naturale), di vedere una situazione da più punti di vista, di controllare semanticamente i passaggi formali e di interpretare i risultati di un calcolo;
- deve sapere che *esistono* "tipi" di oggetti che hanno "certi tipi di proprietà" e deve sapere dove può reperire ulteriori informazioni, definizioni, teoremi, applicazioni (ad esempio deve sapere in generale che *esistono* dei modi per approssimare una funzione "generica" usando funzioni che stanno in certe classi particolari, come i polinomi, le splines, o i polinomi trigonometrici, e deve sapere di volta in volta come trovare il tipo di risultato che lo interessa);
- deve avere capacità di modellizzare situazioni e di *impostare* problemi;
- deve essere in grado di ritrovare le informazioni necessarie riguardo a concetti matematici e procedure che ha imparato, ma che non ricorda completamente.

Questo secondo gruppo appena descritto comprende competenze di tipo *metacognitivo* che tutti riconosceranno come importanti e non facili da raggiungere. Vogliamo sottolineare che ci pare possibile e opportuno dedicare loro una notevole attenzione e ridurre invece l'apparato formale (che non vuol dire affatto rinunciare a dimostrare e argomentare!). Infatti, ci pare che per raggiungere il tipo di conoscenza indicata non sia necessario insistere eccessivamente sul formalismo, il quale non di rado, oscura il significato degli oggetti matematici e frena lo sviluppo delle competenze di modellizzazione.
Le competenze disciplinari e metacognitive elencate fin qui si sviluppano e si esplicano *insieme* e *attraverso* capacità generali e trasversali, cui ci si riferisce spesso in modo sommario come al "metodo di studio" o alla "capacità di apprendere". In modo più dettagliato e preciso possiamo descriverle come capacità di

- lettura e interpretazione dei testi,
- scrittura e, in generale, comunicazione,
- organizzazione e archiviazione della conoscenza, nella memoria a breve o lungo termine e in archivi di ogni genere, anche su supporto informatico,
- autovalutazione delle conoscenze e delle abilità,

ma anche, più globalmente, di organizzazione e gestione delle risorse, di progettazione, di consapevolezza dei processi decisionali in gioco, di assunzione di responsabilità delle decisioni prese. Queste capacità richiedono a loro volta credenze e atteggiamenti positivi ed efficaci verso la matematica, verso l'apprendimento e verso lo studio. Non è compito di questo documento entrare specificamente in tale questione, tuttavia vogliamo dire che

- buone capacità generali migliorano i risultati nello studio di ogni disciplina e vengono particolarmente apprezzate in chi cerca lavoro;

- il contesto della matematica è particolarmente adatto a sviluppare tali capacità (anzi, questo è spesso uno dei motivi principali per cui la matematica è inserita nei curricula).

Di conseguenza osserviamo che anche le capacità generali devono essere tenute opportunamente presenti nella definizione degli obiettivi e dei prerequisiti di un corso e nella attribuzione del numero di crediti.

Ringraziamenti. Gli autori desiderano ringraziare i numerosi docenti della Scuola e dell'Università che hanno contribuito con la loro lettura critica allo sviluppo delle prime bozze dei diversi blocchi. Un particolare ringraziamento va all'A.I.R.O (*Associazione Italiana di Ricerca Operativa*) e ai colleghi Fabio Schoen e Massimo Pappalardo per aver curato la redazione, rispettivamente, dei blocchi 21 e 22. È altresì doveroso menzionare l'A.M.A.S.E.S. (*Associazione per la Matematica Applicata alle Scienze Economiche e Sociali*) per aver offerto la sua collaborazione attraverso i colleghi Vincenzo Aversa e Franco Gori. Si ringraziano infine Sandro Innocenti, Luciano Cappello e Francesca Mazzini per l'attenta lettura e per le utili revisioni e aggiunte alla versione semi-definitiva del documento.

9 febbraio 2006

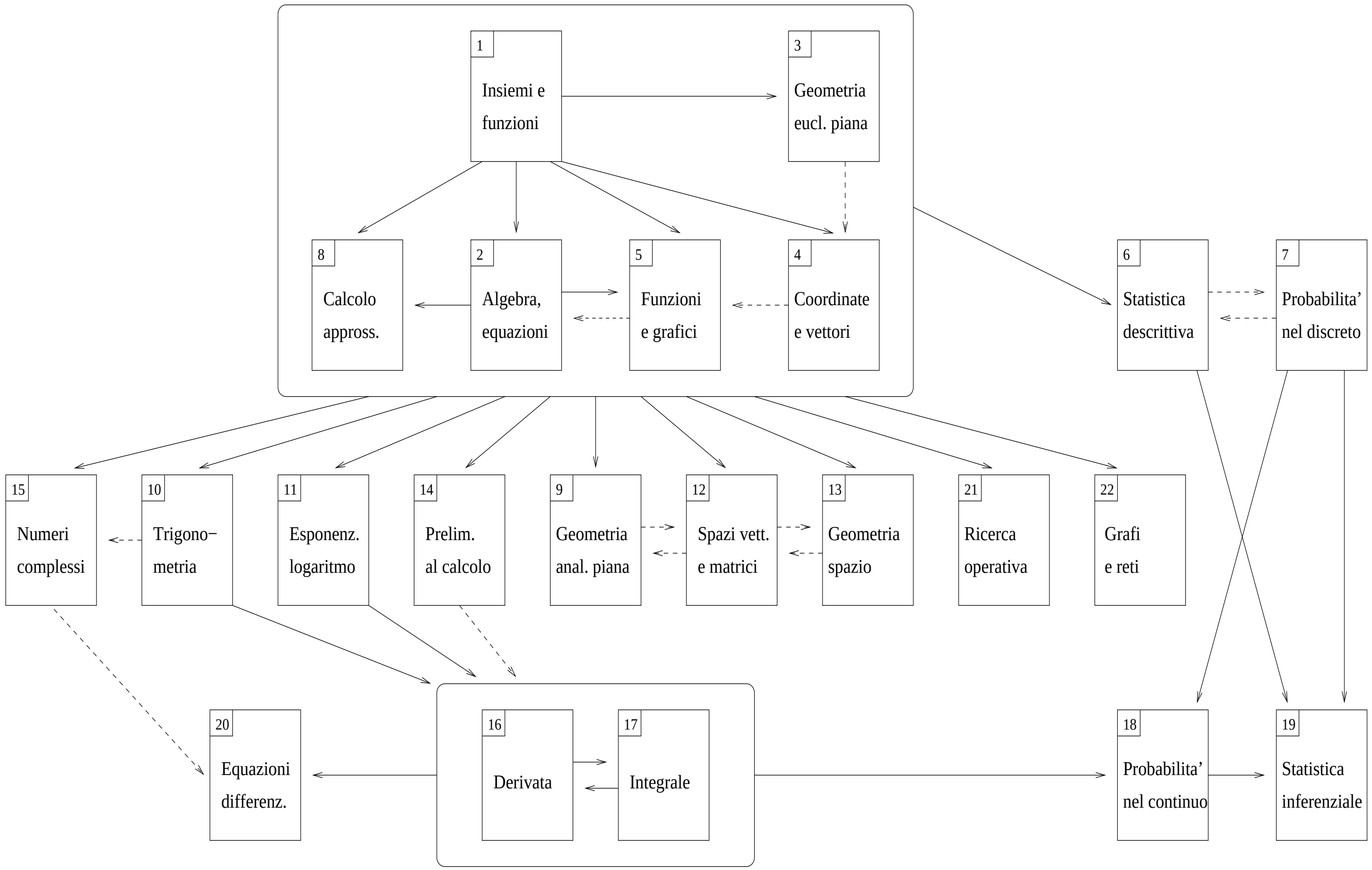


Figura 0.a Schema dei blocchi e dei collegamenti principali

Elenco dei blocchi e dei relativi crediti

Capitolo 1

Linguaggio degli insiemi e delle funzioni, insiemi numerici e operazioni

1.1 Motivazioni

Per parlare di qualunque argomento matematico è indispensabile utilizzare alcune semplici nozioni e notazioni relative agli insiemi e alle funzioni. Tali nozioni servono come *linguaggio* e non occorre una conoscenza della *teoria degli insiemi*.
La conoscenza dei numeri interi, delle frazioni e dei numeri decimali finiti, in particolare la capacità di operare con sicurezza con le operazioni e con le disuguaglianze, è necessaria per affrontare qualunque argomento di matematica. A diversi livelli di complessità occorre saper calcolare mentalmente, con carta e penna e con la calcolatrice. Per evitare una visione della matematica come disciplina solamente caratterizzata da regole di calcolo da memorizzare e da applicare, visione che ostacolerebbe gli studi successivi, occorre in questo stadio che gli studenti sappiano anche vedere i numeri naturali, interi e razionali come elementi di insiemi sui quali sono definite relazioni e operazioni con certe proprietà, e che abbiano consapevolezza delle motivazioni che stanno alla base dei successivi ampliamenti degli insiemi numerici. Inoltre, occorre che gli studenti abbiano esempi di procedure che portano a considerare numeri individuati da un allineamento decimale infinito e che sappiano che, se l'allineamento non è periodico, allora questi numeri non sono rappresentabili con una frazione.

1.2 Prerequisiti e collegamenti

Saper eseguire le operazioni aritmetiche nell'insieme dei numeri razionali.
Moduli particolarmente correlati sono

- *Calcolo numerico esatto e approssimato, propagazione degli errori (blocco n. 8)*
- *Potenze e radici, equazioni e disequazioni algebriche (blocco n. 2)*
- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*

1.3 Contenuti e obiettivi

Contenuti	Obiettivi: conoscenze e abilità
Nozione intuitiva di insieme e di funzione. I connettivi logici "and", "or", "not". L'implicazione. I quantificatori. Termini e forme del discorso matematico.	Saper descrivere a parole e saper rappresentare graficamente l'inclusione, l'intersezione, l'unione ed il complementare di insiemi dati. Conoscere le nozioni di prodotto cartesiano fra insiemi, di relazione e di funzione. Saper rappresentare in vari modi (grafici, tabelle, diagrammi a frecce) relazioni e funzioni. Saper distinguere un'implicazione dalla sua inversa. Saper esprimere nel linguaggio naturale una proposizione in cui compaiono quantificatori, e viceversa. Saper utilizzare i quantificatori. Saper negare proposizioni in cui compaiono quantificatori. Conoscere il ruolo di definizioni, assiomi, teoremi nel discorso matematico. Conoscere il significato dei termini "ipotesi" e "tesi". Sapere individuare ipotesi e tesi nell'enunciato di un teorema. Saper impostare una dimostrazione per assurdo.
L'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Operazioni, ordinamento, proprietà delle operazioni e dell'ordinamento. I numeri reali come allineamenti decimali infiniti.	Conoscere a livello intuitivo le proprietà dell'insieme dei numeri naturali e delle operazioni di addizione e moltiplicazione. Conoscere la relazione di divisibilità fra numeri naturali e la definizione di numero primo. Conoscere e saper motivare i successivi ampliamenti agli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Conoscere la legge di annullamento del prodotto e saperla applicare. Saper interpretare le operazioni di sottrazione e divisione come operazioni inverse dell'addizione e della moltiplicazione. Conoscere le proprietà delle operazioni e dell'ordinamento e saperle coordinare (ad esempio saper operare su disuguaglianze sommando / moltiplicando ambo i membri per uno stesso numero). Saper eseguire operazioni e valutare diseguaglianze: mentalmente, con carta e penna e con la calcolatrice. Conoscere e saper utilizzare le convenzioni di scrittura riguardo all'ordine delle operazioni in una espressione. Sapere che iterando l'algoritmo della divisione tra due numeri interi si ottengono cifre decimali che si ripetono periodicamente. Saper operare con numeri espressi in rappresentazioni diverse (ad esempio saper confrontare una frazione ed un numero decimale). Conoscere esempi di procedure di calcolo che portano a considerare allineamenti decimali infiniti non periodici. Conoscere la rappresentazione dei numeri sulla retta e sapere che esistono punti della retta cui corrispondono numeri che non si possono scrivere come frazioni.

1.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **0.5** CREDITI .

1.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 1.1 Siano:

$$A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$$

e

$$B = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 > 2\}$$

(1) Scrivere alcuni elementi dell'insieme A ed alcuni elementi dell'insieme B.
(2) Descrivere i seguenti insiemi:

- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $A \setminus B$

Esempio 1.2 Dati gli insiemi $A = \{0, 1\}$ e $B = \{a, b\}$, determinare tutte le possibili funzioni di A in B e darne una rappresentazione grafica.

Esempio 1.3 Si consideri l'insieme di parole $A = \{ananas, mela, gatto, mano\}$ e l'insieme di numeri $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. La legge che associa ad ogni parola dell'insieme A il numero di vocali in essa contenute $\grave{e}$ una funzione definita su A a valori in B ?

Esempio 1.4 *Definizione*: *Dati due numeri naturali a e b diversi da zero, un intero d viene detto massimo comun divisore fra a e b se valgono le seguenti tre proprietà:*

(1) d è un divisore di a
(2) d è un divisore di b
(3) se c è un divisore comune fra a e b allora c è un divisore di d.

Applicare questa definizione per dimostrare che:

(1) 4 è il massimo comun divisore fra 24 e 28
(2) 5 non è il massimo comun divisore fra 35 e 38
(3) 3 non è il massimo comun divisore tra 15 e 45.

Esempio 1.5 Spiegare la seguente affermazione

Non si può dividere per zero.

Esempio 1.6 Tradurre il seguente enunciato in una formula matematica:

Dividendo 27 *per* 6 *si ottiene come quoziente* 4 *e come resto* 3.

Esempio 1.7 *Teorema: Per ogni coppia di naturali m, n, con $n \neq 0$, esistono e sono unici due naturali q, r tali che $m = nq + r$ e $0 \leq r < n$.*

(1) Individuare ipotesi e tesi del precedente teorema.
(2) Determinare q e r, nel caso in cui $m = 20$ e $n = 6$.
(3) Nell'enunciato precedente, quali lettere designano rispettivamente quoziente e resto?
(4) Perché è necessaria la condizione $n \neq 0$? Cosa potrebbe succedere se non fosse verificata? Fare qualche prova numerica.
(5) Sarebbe meglio mettere la condizione $n \leq m$? Cosa accade se $n > m$?
(6) Cosa accade se $m = 0$?

Esempio 1.8 Nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali considerare la proprietà $P(x)$:

"*x verifica $x + 3 > 5$.*"

(1) È vero o falso che $\forall x \in \mathbb{N}$ vale $P(x)$?
(2) È vero o falso che $\exists x \in \mathbb{N}$ per cui vale $P(x)$?
(3) Determina un sottoinsieme A di $\mathbb{N}$ tale che $\forall x \in A$ vale $P(x)$.
(4) Determina un sottoinsieme B di $\mathbb{N}$ tale che risulti falso che $\exists x \in B$ per cui vale $P(x)$.
(5) Rispondere alle domande precedenti nel caso in cui la stessa proprietà sia considerata nell'insieme $\mathbb{R}$.

Esempio 1.9 Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(1) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ x - y = 3$.
(2) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} :\ x - y = 3$.
(3) $\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ x - y = 3$.
(4) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} :\ x - y = 3$.

Esempio 1.10 Siano a, b, c numeri reali arbitrari. Quali delle seguenti implicazioni sono vere e perché? In quali è necessario imporre la condizione che uno o più numeri siano diversi da zero affinché siano vere e perché? In quali è necessario imporre che siano positivi?

(1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
(2) $a < b \Rightarrow ac < bc$
(3) $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
(4) $a < b \Rightarrow \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Esempio 1.11 Definizione: Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$. Il numero M si dice massimo dell'insieme A se $M \in A$ e per ogni a di A si ha: $M \geq a$.

(1) Dimostrare che $7/2$ non è il massimo dell'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} |\ 1 < x < 4\}$
(2) Dimostrare che l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} |\ x > 3\}$ non ha massimo.
(3) Dimostrare che l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} |\ x < 2\}$ non ha massimo.

Esempio 1.12 Quale delle seguenti espressioni significa: *ogni numero intero è multiplo* *di 7*?

$$a)\ \exists\, a \in \mathbb{Z}, \exists\, b \in \mathbb{Z} : a = 7b$$

$$b)\ \exists\, a \in \mathbb{Z}, \forall\, b \in \mathbb{Z} : a = 7b$$

$$c)\ \forall\, a \in \mathbb{Z}, \exists\, b \in \mathbb{Z} : a = 7b$$

$$d)\ \forall\, a \in \mathbb{Z}, \forall\, b \in \mathbb{Z} : a = 7b$$

Esempio 1.13 Quale delle seguenti espressioni significa: *non è vero che ogni numero intero è multiplo di 7*?

$$a)\ \exists\, a \in \mathbb{Z}, \exists\, b \in \mathbb{Z} : a \neq 7b$$

$$b)\ \exists\, a \in \mathbb{Z}, \forall\, b \in \mathbb{Z} : a \neq 7b$$

$$c)\ \forall\, a \in \mathbb{Z}, \exists\, b \in \mathbb{Z} : a \neq 7b$$

$$d)\ \forall\, a \in \mathbb{Z}, \forall\, b \in \mathbb{Z} : a \neq 7b$$

Esempio 1.14 Quale è il maggiore tra:

(1) $10/3$ e 3.331?
(2) π e $314/100$?
(3) $6,28$ e 2π?

Esempio 1.15 Trovare i numeri x che verificano la condizione

$$(x+2)(x^2+1)(x^2-1) = 0$$

Esempio 1.16 Disporre in ordine crescente i seguenti numeri:

$$0,30; \qquad 0,7; \qquad 0,15; \qquad 0,1.$$

Esempio 1.17 Indicare la sesta cifra dopo la virgola del numero $12,652 \cdot 10^{-4}$

Esempio 1.18 Utilizzando una calcolatrice, per tentativi, cercare un numero x tale che $x^5 + x^3 = 1$.

Esempio 1.19 Scrivere le espressioni decimali dei numeri

$$1, \qquad 1+\frac{1}{4}, \qquad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}, \qquad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}, \qquad \ldots$$

e confrontarle con l'espressione decimale di $\frac{\pi^2}{6}$.

Capitolo 2

Manipolazione di formule algebriche, potenze e radici, equazioni e disequazioni algebriche

2.1 Motivazioni

Nel contesto della matematica la capacità di trasformare espressioni algebriche in vista di un certo obiettivo è di fondamentale importanza, così come la capacità di avere il controllo sulle trasformazioni effettuate. Altrettanto importante è la capacità di orientarsi nell'impostazione, riconoscimento ed eventuale risoluzione di equazioni e disequazioni, in particolare quelle algebriche.

2.2 Prerequisiti e collegamenti

È utile avere alcune conoscenze indicate in:

- *Coordinate e vettori (blocco n. 4)*

Le conoscenze del presente blocco dovrebbero essere sviluppate contestualmente a quelle di:

- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*

perché si rafforzano a vicenda. È utile disporre con sicurezza dei contenuti di questo blocco prima di affrontare

- *Geometria analitica piana (blocco n. 9)*
- *Spazi vettoriali e matrici (blocco n. 12)*

2.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Trasformazione di espressioni algebriche. Significato di una formula	Saper riconoscere e applicare consapevolmente le proprietà delle operazioni dei numeri reali, nel trasformare espressioni letterali. Saper utilizzare lettere e notazioni algebriche per descrivere situazioni e risolvere problemi. Saper utilizzare diverse espressioni algebriche equivalenti a seconda dell'obiettivo. Saper fattorizzare un'espressione del tipo $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$, ...
Generalità su equazioni, disequazioni. Le funzioni potenza, valore assoluto, radice. Equazioni e disequazioni algebriche.	Saper riconoscere se un numero è soluzione di un'equazione. Saper applicare la regola di annullamento del prodotto per risolvere equazioni. Saper applicare la regola "dei segni" per risolvere disequazioni. Saper utilizzare le proprietà delle disuguaglianze fra numeri reali per risolvere disequazioni. Visualizzare graficamente il significato di semplici equazioni e disequazioni fra potenze ad esponente intero, radici, valore assoluto. Saper risolvere equazioni di 1° e 2° grado in un'incognita. Saper risolvere semplici equazioni e disequazioni algebriche.

2.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **1** CREDITO .

2.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 2.1 Indicare se le seguenti affermazioni sono vere o false.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $x < x^n$.

(2) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $a < b \Rightarrow a^n < b^n$.

Esempio 2.2 Indicare quale delle seguenti uguaglianze è falsa:
□ $a^{\frac{b}{c}} = \frac{a^b}{a^c}$
□ $(a^b)^c = a^{bc}$
□ $a^{b-c} = \frac{a^{-c}}{a^{-b}}$
□ $a^{b+c} = \frac{a^c}{a^{-b}}$

Esempio 2.3 Se a e b sono numeri reali positivi, l'uguaglianza:

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

☐ è sempre vera
☐ non è mai vera
☐ è vera per alcuni valori di a e b, e precisamente ...

Esempio 2.4 $\sqrt{9}$ è uguale a:
☐ 3
☐ -3
☐ ± 3
☐ dipende

Esempio 2.5 Per qualsiasi un numero reale x, $|-x|$ è uguale a:
☐ $-|x|$
☐ $|x|$
☐ $+x$

☐ nessuna delle precedenti

Esempio 2.6 Calcolare $(x+y)^4$ in almeno due modi diversi. Confrontare quindi i risultati ottenuti.

Esempio 2.7 Chiamando x, y e z le lunghezze di tre segmenti, interpretare geometricamente con un disegno
le identità:

$$(x+y)z = xz + yz$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Esempio 2.8 Scrivere i seguenti polinomi nella forma $a(x+b)^2+c$, con a, b, c opportunamente scelti

$$x^2 - x - 1 \qquad 3x^2 - 6x + 1 \qquad x^2 + \frac{1}{4} + x.$$

Esempio 2.9 Le lunghezze dei lati di un rettangolo sono a e b. Esprimere la metà del quadrato del perimetro del rettangolo.

Esempio 2.10 In un paese di n abitanti la quantità Q di un certo bene venduta annualmente è data da $Q = k\frac{n}{5p^2}$ dove p è il prezzo unitario e k una costante. Se il prezzo dimezza ed il numero di abitanti triplica, di quanto varia Q?

Esempio 2.11 Una ditta di elettrodomestici ha venduto in un anno 200 forni a microonde al prezzo di 100 euro l'uno. È stato stimato che se il prezzo di vendita di un forno aumenta di x euro, allora il numero di forni venduti in un anno diminuisce di $30x$. Esprimere l'incasso annuo della ditta in funzione dell'aumento x.

Esempio 2.12 Scrivere l'espressione $\frac{2x+1}{x^2+2x}$, con $x \neq 0$ e $x \neq -2$, nella forma $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}$, scegliendo opportunamente due numeri reali a e b.

Esempio 2.13 Se x, y e z sono numeri diversi da zero, $\frac{x^2y}{3z}$ si può scrivere come:
☐ $\frac{1}{3}(x^{-2}yz)^{-1}$
☐ $(3x^{-2}y^{-1}z)^{-1}$
☐ $\frac{x^2}{3x^{-2}yz^{-1}}$
☐ nessuna delle precedenti

Esempio 2.14 Indicare quale dei seguenti numeri è soluzione dell'equazione $x^3 + 12\sqrt{24 - x^2}$.

$$-3\sqrt{3} \qquad -3\sqrt{2} \qquad -2\sqrt{3} \qquad -2\sqrt{2}$$

Esempio 2.15 Determinare quante soluzioni reali distinte ha ciascuna delle seguenti equazioni:

$$x^3 + 2 = 0, \quad |1 - x| + 2 = 0, \quad \frac{1}{x+2} = 0,$$

$$(3x+5)^4 = 1, \quad 2(x-1)^2 + 3(x-1)^4 = 0, \quad \frac{x - x^2}{x+2} = 0.$$

Esempio 2.16 Interpretare e risolvere graficamente le disequazioni:

$$x^2 < x^4 \qquad x^2 > x \qquad |x| > -x \qquad \sqrt{x} > x.$$

Esempio 2.17 Quali delle seguenti implicazioni sono vere per ogni valore reale di x per cui hanno senso le espressioni che in esse compaiono?

(1) $\frac{2}{x-2} < 3 \Rightarrow 2 < 3(x-2)$
(2) $\sqrt{2x+1} > x - 1 \Rightarrow 2x + 1 > (x-1)^2$
(3) $\sqrt{x} > x \Rightarrow x > x^2$
(4) $\frac{1}{x} \leq x \Rightarrow 1 \leq x^2$
(5) $-2x < 3 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$

Esempio 2.18 Sia $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, un'equazione di 2^o grado che ha due radici reali x_1 e x_2. Dimostrare l'identità:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Utilizzare tale identità per stabilire il segno di $ax^2 + bx + c$, al variare di a, b, c.

Esempio 2.19 Risolvere le disequazioni

$$\frac{2x}{2x^2 + x - 2} \geqslant 0 \qquad 4x - x^5 > 0 \qquad \frac{1}{x^2 - x + 1} \leq 0 \qquad \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x} - 2} < 0.$$

Esempio 2.20 Sapendo che vale

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f},$$

esprimere q in funzione delle altre due variabili.

Esempio 2.21 Un prodotto è esposto in vetrina al prezzo di 14 euro. Il prezzo è dato dal ricavo del venditore più la tassa del 20% sul ricavo (IVA). Calcolare la tassa.

Capitolo 3

Geometria euclidea piana

3.1 Motivazioni

Nei corsi universitari di materie scientifiche vengono molto spesso usati, più o meno esplicitamente, argomenti di geometria euclidea piana. Raramente però gli studenti sono in grado di rendere espliciti tali riferimenti. Spesso essi non sono neanche in grado di descrivere con linguaggio appropriato o addirittura percepire semplici proprietà geometriche di figure o immagini. Vengono qui riportati gli argomenti e gli obiettivi essenziali di geometria euclidea piana. Ulteriori approfondimenti in diverse direzioni si trovano nei blocchi *Geometria analitica piana (blocco n. 9)* e *Dalla trigonometria alle funzioni trigonometriche (blocco n. 10)*.

3.2 Prerequisiti e collegamenti

Per poter apprendere gli argomenti trattati in questo blocco non si ritiene necessaria la conoscenza degli argomenti trattati in altri blocchi, a parte, ovviamente, il blocco *Linguaggio degli insiemi e delle funzioni, insiemi numerici e operazioni (blocco n. 1)*.
Le conoscenze del presente blocco sono assolutamente essenziali per:

- *Geometria analitica piana (blocco n. 9)*
- *Dalla trigonometria alle funzioni trigonometriche (blocco n. 10)*
- *Geometria euclidea ed analitica dello spazio (blocco n. 13)*

3.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Figure geometriche piane, enti fondamentali e loro proprietà.	Conoscere il significato dei termini retta, semiretta, segmento, piano, semipiano, angolo e saperli utilizzare con proprietà. Saper dare una definizione di rette parallele e di rette perpendicolari. Conoscere e saper usare i criteri di congruenza e similitudine tra triangoli. Conoscere e saper usare proprietà elementari riguardanti rette parallele, rette perpendicolari, triangoli, quadrilateri. Conoscere e saper usare il teorema di Talete, il teorema di Pitagora. Conoscere e saper usare le proprietà delle circonferenze, delle corde e delle tangenti; conoscere la relazione tra angoli al centro e angoli alla circonferenza. Conoscere la nozione di figura convessa.
Misura: lunghezze e aree. Proprietà della misura	Saper calcolare perimetri e aree di poligoni. Conoscere le relazioni tra lunghezza della circonferenza, area del cerchio e lunghezza del raggio. Sapere come variano aree e perimetri con cambiamenti di scala. Saper utilizzare l'additività e l'invarianza per isometrie dell'area.
Costruzioni geometriche.	Saper effettuare e giustificare costruzioni geometriche elementari con il solo uso di riga non graduata e compasso quali: triangolo equilatero di lato assegnato, retta passante per un punto assegnato parallela (o perpendicolare) ad una retta assegnata, circonferenza passante per tre punti assegnati. Conoscere qualche metodo per tracciare un'ellisse.
Trasformazioni geometriche del piano: isometrie, traslazioni, rotazioni, simmetrie rispetto a un punto e rispetto a una retta, omotetie, similitudini e loro composizioni.	Saper determinare semplici proprietà delle trasformazioni geometriche. Saper individuare proprietà invarianti per isometrie o per similitudini.
Dall'intuizione alla dimostrazione.	Saper modellizzare aspetti del mondo reale con figure geometriche piane. Saper interpretare figure geometriche, cogliendone gli elementi essenziali in relazione ad un dato obiettivo o individuandone proprietà caratterizzanti. Saperle descrivere con un linguaggio appropriato. Riconoscere la necessità di sottoporre proprietà intuitive e congetture relative a proprietà geometriche alla dimostrazione logica. Comprendere dimostrazioni e produrre catene deduttive.

3.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **1** CREDITO . Qualsiasi studente dovrebbe aver già incontrato nel suo curriculum scolastico gran parte degli argomenti descritti. Si reputa pertanto che il tempo di lavoro assistito ed individuale corrispondente ad un credito sia sufficiente per uno studente che affronti questi argomenti all'inizio del primo anno universitario.

3.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 3.1 Descrivere la figura 3.a in modo tale che una persona, che non può vedere la figura, la possa riprodurre fedelmente.

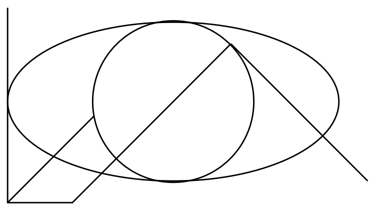


Figura 3.a

Esempio 3.2 Verificare la verità o falsità delle seguenti affermazioni.
Dati due insiemi convessi aventi almeno un punto in comune,

- la loro intersezione è un insieme convesso;
- la loro unione è un insieme convesso.

Esempio 3.3 Tre punti distinti A, B , C non allineati definiscono un triangolo ABC di lati i segmenti AB, BC e CA. Sappiamo che l'insieme dei punti delimitati dal triangolo è sempre un insieme convesso. Un quarto punto D non appartenente alle tre rette contenenti i lati del triangolo ABC definisce, insieme ai tre precedenti, il quadrilatero $ABCD$ di lati i segmenti AB, BC, CD e DA.
Determinare in quali regioni del piano deve stare il punto D affinché il quadrilatero $ABCD$ non sia intrecciato.
Determinare in quali regioni del piano deve stare il punto D affinché il quadrilatero $ABCD$ non sia intrecciato e l'insieme dei punti delimitati da esso sia un insieme convesso.

Esempio 3.4 Dati due punti distinti A e B, determinare tutti i quadrati aventi come vertici i punti A e B.

Esempio 3.5 È dato un triangolo ABC avente il lato AB di lunghezza uguale a 10 cm e sono dati due punti A' e B' aventi distanza uguale a 10 cm. Determinare le posizioni dei punti C' tali che il triangolo di vertici $A'B'C'$ sia congruente al triangolo ABC. Determinare tali punti C' facendo uso solamente di un compasso.

Esempio 3.6 Assegnati due punti A e B aventi distanza uguale a 10 cm, determinare tutti i punti C tali che i triangoli ABC abbiano area uguale a 20 cm^2.

Esempio 3.7 Dati due punti distinti A e B, definire il loro punto medio M e determinarlo facendo uso solamente di un compasso e di un riga non graduata.

Esempio 3.8 Determinare la bisettrice di un angolo assegnato facendo uso solamente di un compasso e di una riga non graduata.

Esempio 3.9 Siano dati tre punti distinti. Quali condizioni devono verificare i tre punti affinché esista almeno una circonferenza passante per essi? In tal caso, quante ne esistono? Spiegare come si può determinarne centro e raggio.

Esempio 3.10 Affrontare il problema precedente considerando, invece che tre punti, due punti distinti.

Esempio 3.11 Affrontare il problema precedente considerando, invece che tre punti, quattro punti distinti.

Esempio 3.12 Disegnare il simmetrico di un punto rispetto ad un altro punto facendo uso solo di un compasso.

Esempio 3.13 Determinare le due tangenti ad una circonferenza assegnata passanti per il punto assegnato esterno alla circonferenza facendo uso solamente di un compasso e di un riga non graduata.

Esempio 3.14 La circonferenza di centro O e raggio 1 in figura 3.b, è divisa dal segmento AB in due parti. Sapendo che l'angolo $A\widehat{O}B$ è retto, quanto vale l'area della regione

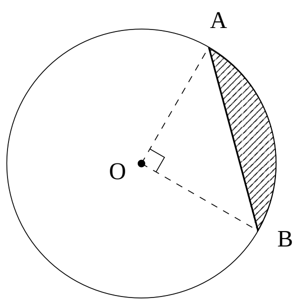


Figura 3.b

evidenziata?

Esempio 3.15 Si vuole tagliare la fetta di torta triangolare in figura 3.c in modo da ottenere due porzioni uguali. Se il taglio HK è parallelo al lato AC e $\overline{AB} = l$, quanto misura HB?

Esempio 3.16 Un fotografo, dotato di una macchina fotografica che ha un angolo di campo visivo pari a $60°$, vuole fotografare nella sua interezza un'asta orizzontale lunga 5 metri

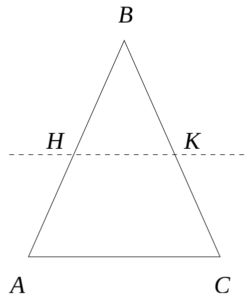


Figura 3.c

posta ad un'altezza di 180 cm rispetto al terreno orizzontale, ponendo la macchina fotografica ad un altezza di 180 cm sul terreno. In quali punti del terreno egli può porre il cavalletto della macchina fotografica? E' possibile determinare tali punti avendo a disposizione solo una lunga corda da usare o per tracciare circonferenze (fissandone una estremità nel centro della circonferenza) o per tracciare segmenti (fissandone gli estremi)?

Esempio 3.17 È data un'isometria f del piano. Sono assegnati tre punti A, B e C non allineati e le loro immagini $f(A)$, $f(B)$ e $f(C)$ attraverso l'isometria f. Dato un qualsiasi quarto punto D, è possibile, conoscendo solamente i punti A, $f(A)$, B, $f(B)$, C, $f(C)$ e D, determinare l'immagine di D attraverso f? In caso affermativo spiegare come determinare $f(D)$. È possibile determinare $f(D)$ facendo uso del solo compasso?

Esempio 3.18 Affrontare il problema precedente togliendo l'ipotesi che i tre punti A,B e C siano non allineati.

Esempio 3.19 Nella figura 3.d, le rette s e t sono parallele. Qual è il minimo numero di angoli che si devono conoscere, affinché siano poi determinati tutti gli altri?

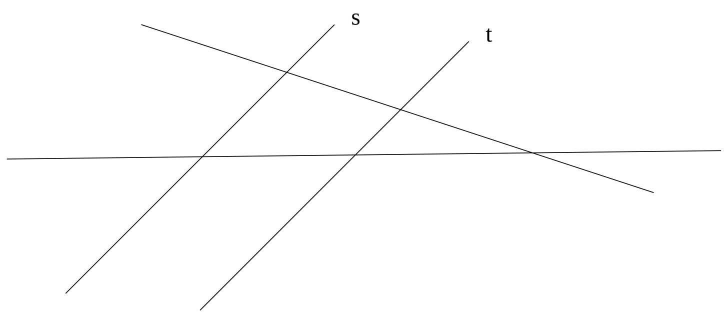


Figura 3.d

Esempio 3.20 Un'asta AB di lunghezza l è appoggiata ad un muro, come in figura 3.e, in modo che l'estremo A sia ad 1 m dal suolo. È vero che spostando B di 1 m verso il

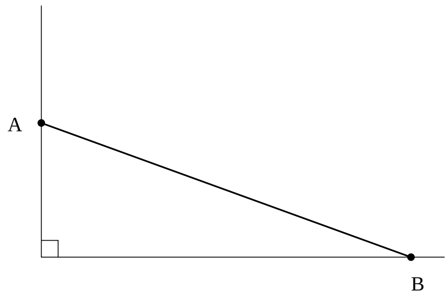


Figura 3.e

muro, anche A sale di 1 m?

Esempio 3.21 Quanti sono gli assi di simmetria di un poligono regolare di 24 lati?

Esempio 3.22 Due fotografie riportano un'osservazione al microscopio con ingrandimenti diversi. Su una si distinguono tre punti e sull'altra solo due. Come si può determinare su tale immagine la posizione del punto non visibile?

Capitolo 4

Coordinate e vettori

4.1 Motivazioni

La descrizione del piano e dello spazio utilizzando le coordinate rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano è uno strumento di base, necessario per la maggior parte degli sviluppi della matematica. In questo ambito è naturale anche l'introduzione del concetto di vettore con le sue prime proprietà.

4.2 Prerequisiti e collegamenti

Per un percorso significativo e per affrontare esercizi più interessanti è utile conoscere almeno in parte:

- *Geometria euclidea del piano (blocco n. 3).*

Alcune conoscenze del presente blocco sono indispensabili per lo sviluppo di:

- *Geometria analitica piana (blocco n. 9)*
- *Dalla trigonometria alle funzioni trigonometriche (blocco n. 10)*
- *Geometria euclidea ed analitica dello spazio (blocco n. 13)*
- *Numeri complessi (blocco n. 15)*
- *Spazi vettoriali e matrici (blocco n. 12)*

4.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Sistemi di riferimento nel piano e nello spazio.	Conoscere le coordinate cartesiane nel piano e nello spazio. In un sistema di coordinate assegnato nel piano o nello spazio, saper individuare le coordinate di un punto e saper rappresentare una coppia o terna ordinata di numeri come un punto. Saper calcolare la distanza tra due punti di coordinate note. Saper descrivere semplici sottoinsiemi del piano come luoghi di punti che soddisfano certe condizioni sulle coordinate (semipiani, angoli, semplici poligoni, rette e semirette, segmenti, circonferenze). Saper disegnare semplici sottoinsiemi del piano e dello spazio definiti assegnando condizioni sulle coordinate. In contesti di varia natura nei quali intervengono due variabili, rappresentare ed interpretare determinate situazioni utilizzando sottoinsiemi del piano cartesiano.
Il linguaggio dei vettori.	Conoscere il linguaggio dei vettori per indicare segmenti orientati nello spazio. Conoscere l'identificazione dello spazio con l'insieme dei vettori applicati in un punto fissato. Saper calcolare il modulo di un vettore di coordinate date. Saper sommare vettori, moltiplicare un vettore per uno scalare, sia graficamente sia utilizzando le coordinate. Saper scrivere ed interpretare l'equazione della retta in forma parametrica.
Prodotto scalare.	Sapere costruire la proiezione di un vettore su un altro. Saper calcolare il prodotto scalare tra due vettori, in termini di coordinate dei vettori o di modulo dei vettori e coseno dell'angolo tra essi compreso. Sapere che il prodotto scalare è nullo se e solo se i due vettori sono ortogonali.

4.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **1** CREDITO . Qualsiasi studente che si iscriva all'università dovrebbe avere già incontrato nel suo curriculum scolastico gli argomenti descritti in questo blocco, almeno per quanto riguarda il piano. L'estensione allo spazio richiede una maturazione dei concetti, ma non è particolarmente impegnativa. Si reputa pertanto che il tempo di lavoro assistito ed individuale corrispondente ad un credito sia sufficiente per uno studente che debba padroneggiare questo blocco di conoscenze all'inizio del primo anno universitario. Se si omettono alcune parti, può essere sufficiente anche mezzo credito.

4.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 4.1 Disegnare il triangolo di vertici $A = (0,1,0)$, $B = (-1,0,3)$, $C = (2,-2,2)$ e calcolarne il perimetro.

Esempio 4.2 Calcolare il perimetro e l'area del rettangolo in figura 4.a.

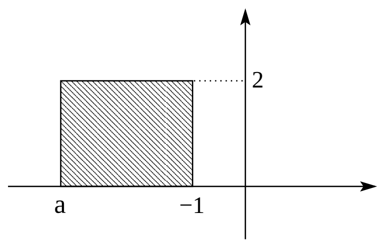


Figura 4.a

Esempio 4.3 Disegnare la retta passante per il punto $P = (-1,2)$ e che ha pendenza -0.5.

Esempio 4.4 Fissato un sistema di riferimento cartesiano nel piano, sia dato il punto A di coordinate $(3,-5)$.
Determinare le coordinate del:

- punto B simmetrico di A rispetto all'origine del sistema di riferimento;
- punto C simmetrico di A rispetto all'asse delle x;
- punto D simmetrico di A rispetto all'asse delle y;
- punto C simmetrico di A rispetto alla retta $y = x$.

Esempio 4.5 Sia ABC un triangolo rettangolo in A e avente il cateto AC di lunghezza doppia del cateto AB.
Considerare un sistema di riferimento cartesiano che verifichi le seguenti condizioni:

- l'asse delle x coincide con la retta contenente il cateto AB del triangolo ABC;
- l'asse delle y coincide con la retta contenente il cateto AC del triangolo ABC;
- l'unità di misura del sistema di riferimento coincide con la lunghezza AB del triangolo ABC.

Determinare:

- le coordinate dei vertici A, B e C;
- le equazioni delle tre rette contenenti i tre lati del triangolo ABC;

- le relazioni algebriche verificate da tutti e soli i punti appartenenti ad ognuno dei tre lati del triangolo ABC;
- le relazioni algebriche verificate da tutti e soli i punti interni al triangolo ABC.

Esempio 4.6 Rappresentare nel piano cartesiano l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| \leqslant 1\}$.

Esempio 4.7 Rappresentare nel piano cartesiano l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 = 4\}$. Quale figura rappresenta nello spazio l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y+1)^2 = 4\}$?

Esempio 4.8 Rappresentare nello spazio cartesiano gli insiemi

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1, |z - 1| \leqslant 1\}$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geqslant 0, z \geqslant 0\}.$$

Esempio 4.9 Dati i punti $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ e $C = (4, 1)$, determinare le coordinate del:

- punto D tale che il vettore $\overrightarrow{AD}$ sia la somma dei vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$;
- punto medio E del segmento BC.

Determinare la relazione intercorrente tra il vettore $\overrightarrow{AD}$ e il vettore $\overrightarrow{AE}$.

Esempio 4.10 Siano u e w i due vettori in figura 4.b. Disegnare il vettore v tale che $w = u + v$ e calcolarne il modulo (un quadretto corrisponde ad un'unità).

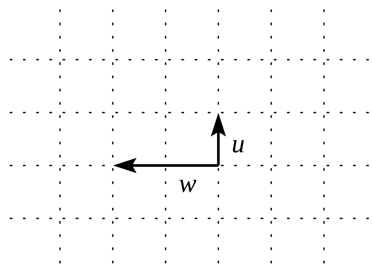


Figura 4.b

Esempio 4.11 Sia r la retta $(-1 + 2t, 5 - 3t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Determinare due vettori u e v tali che $u + tv$ sia la retta parallela ad r e passante per $(1, -2)$.

Esempio 4.12 Sia dato nello spazio cartesiano il vettore $v = \overrightarrow{OA}$, dove O è l'origine e $A = (1, -2, 3)$. Determinare due punti B e C, non appartenenti alla stessa retta passante per O, tali che i vettori $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ siano ortogonali al vettore v. Determinare quindi il luogo dei punti D tali che il vettore $\overrightarrow{OD}$ sia perpendicolare a v.

Esempio 4.13 Calcolare il modulo della proiezione ortogonale del vettore $(1, -2, 3)$ sul vettore $(5, 3, -1)$.

Esempio 4.14 Sia w un vettore non nullo di $\mathbb{R}^2$. Se v_1 e v_2 sono due vettori tali che $v_1 \cdot w = v_2 \cdot w$, dire se è vero che $v_1 = v_2$.
(Con $v_1 \cdot w$ è indicato il prodotto scalare dei vettori v_1 e w)

Esempio 4.15 I punti $A = (-3, 5, 0)$, $B = (-3, -1, 2)$ e $C = (9, 5, 0)$ possono essere vertici consecutivi di una faccia di un cubo?

Capitolo 5

Funzioni e grafici elementari

5.1 Motivazioni

Questo blocco raccoglie un insieme di conoscenze elementari relative alle funzioni reali di variabile reale e ai loro grafici, unite ad alcune minime conoscenze sull'uso delle coordinate per descrivere semplici insiemi nel piano. Lo studio dei grafici utilizzando la nozione di derivata è invece parte del blocco *Derivata (blocco n. 16)* e si ritiene che dovrebbe essere appreso solamente dopo aver acquisito almeno in buona parte le conoscenze e le capacità qui descritte.

5.2 Prerequisiti e collegamenti

Le conoscenze indicate in questo blocco sono strettamente collegate a buona parte di quelle indicate in:

- *Potenze e radici, equazioni e disequazioni algebriche (blocco n. 2)*
- *Coordinate e vettori (blocco n. 4)*

che, se non sono prerequisiti, sono almeno da sviluppare contemporaneamente. Ulteriori conoscenze sono poi utili e consentono di considerare un maggior numero di esempi significativi di funzioni e grafici, come indicato in alcuni esempi di domande e problemi. In particolare è utile avere una conoscenza *elementare* e *operativa* delle funzioni seno, coseno, esponenziale e logaritmo, per la qual cosa però *non* è necessario sviluppare interamente i blocchi sulle funzioni trigonometriche e sulle funzioni esponenziale e logaritmo, che nel presente documento sono presentati successivamente a questo. In questo blocco l'insieme dei numeri reali si usa soprattutto con il significato di *l'insieme di tutti i numeri che ci può venire in mente di usare*. Dunque occorre appena saper operare algebricamente e un poco anche numericamente con qualche numero non razionale, come $\sqrt{2}$ o π, trattandolo in modo intuitivo come allineamento decimale. Non è necessaria la conoscenza del numero di Nepero e. Con il simbolo $\log$ indichiamo la funzione logaritmo in una base qualunque (maggiore di 1) e il lettore è invitato a mettere quella che preferisce. Noi consigliamo di usare la base 2 oppure la base e, se questo numero è conosciuto *e anche il suo significato è effettivamente conosciuto*.
Molte conoscenze indicate nel presente blocco sono una premessa utile per:

- *Elementi di statistica descrittiva (blocco n. 6)*
- *Dalla trigonometria alle funzioni trigonometriche (blocco n. 10)*
- *Progressioni aritmetiche e geometriche, funzione esponenziale e funzione logaritmo (blocco n. 11)*
- *Preliminari al calcolo: processi di approssimazione e numeri reali (blocco n. 14)*

e sono indispensabili per lo sviluppo di:

- *Derivata (blocco n. 16)*
- *Integrale (blocco n. 17)*

5.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Esempi di funzioni e grafici. Definizione di proprietà elementari delle funzioni.	Conoscere la definizione e il grafico delle funzioni seguenti. Funzione potenza (ad esponente intero), radice, valore assoluto. Funzione segno. Funzioni definite a tratti. Saper disegnare per punti i grafici della funzione esponenziale (ad esempio di base 2, 3) e delle funzioni seno e coseno. Conoscere il sottografico e il sopragrafico di una funzione e utilizzarli per descrivere insiemi. Saper dare una definizione di funzione crescente o decrescente ed essere in grado di accertare la monotonia di una semplice funzione. Conoscere la nozione di funzione limitata. Sapere come si leggono sul grafico dominio e immagine e le proprietà di una funzione di essere iniettiva, suriettiva, biiettiva. Saper trovare il massimo e il minimo di una semplice funzione con metodi elementari. Conoscere esempi e proprietà generali di funzioni periodiche ed esempi di descrizione di fenomeni periodici, non soltanto con funzioni trigonometriche. Definizione geometrica di insieme convesso e funzioni convesse.

(*continua*)

Funzioni lineari, funzioni polinomiali di primo grado e retta. Pendenza di una retta. Interpretazione dei grafici in diversi contesti.	Saper calcolare (in modo approssimato, rispetto ad un sistema di riferimento dato) la pendenza di una retta disegnata su di un foglio. Saper scrivere l'equazione di una retta di cui sono date le coordinate di due punti. Saper disegnare e saper scrivere l'equazione di una retta di cui sono date le coordinate di un punto P_0 e la pendenza a. Conoscere la definizione di funzione lineare da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Sapere che i grafici di funzioni lineari sono le rette (non verticali) passanti per l'origine e saper interpretare sul grafico le relazioni $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(tx) = tf(x)$. Nel caso in cui una funzione $y = ax + b$ rappresenti un certo fenomeno, saper leggere sul grafico il comportamento del fenomeno stesso.
Operazioni sulle funzioni e trasformazioni dei grafici. Famiglie di funzioni che dipendono da parametri.	Somma e prodotto di funzioni e loro grafici. Somma di una funzione e di una costante, relazione con le traslazioni verticali del grafico. Prodotto di una funzione per una costante e relazione con i cambiamenti di scala nell'asse verticale e le riflessioni rispetto all'asse orizzontale. Reciproco di una funzione e suo grafico. Composizione di funzioni. Traslazioni e cambiamenti di scala sull'asse orizzontale. Riflessioni rispetto all'asse verticale. Funzione inversa e suo grafico. Massimo fra due funzioni. Esempi di funzioni ottenute combinando in modo semplice funzioni elementari e rappresentazione qualitativa dei loro grafici. Funzioni pari e funzioni dispari. Grafici di semplici funzioni polinomiali e razionali. Funzione logistica e funzione gaussiana. Funzione $\tan x$. Funzione logaritmo. In una data famiglia di funzioni dipendenti da parametri, trovare le funzioni che verificano determinate condizioni (ad esempio che assumono valori assegnati in punti assegnati).

5.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **1** CREDITO . Una *completa* padronanza di questo blocco si ottiene in genere solo insieme a quella del calcolo differenziale e integrale, ma una *buona* padronanza è possibile e opportuna anche prima di un corso di Calcolo, con l'impegno di circa 1 credito. Una conoscenza già accettabile per costruire successivi sviluppi può essere raggiunta anche con 0.5 crediti.

5.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 5.1 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^3 + x$. Alcune delle seguenti sono descrizioni del grafico di f. Quali?

A: $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}\}$ B: $\{(x^3 + x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
C: $\{(x, x^3 + x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ D: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^3 + x\}$

Mostrare che la funzione f è crescente in $\mathbb{R}$.

Esempio 5.2 Disegnare il grafico della funzione f definita da

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } x \in (-\infty, 2] \\ 2 & \text{se } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

Descrivere l'immagine di f.

Esempio 5.3 Sia $f \colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ la funzione il cui grafico è disegnato nella figura 5.a (il cerchietto *bianco* sta a significare che il punto corrispondente *non appartiene al grafi co*, il cerchietto *nero* che il punto corrispondente *fa parte del grafi co*).

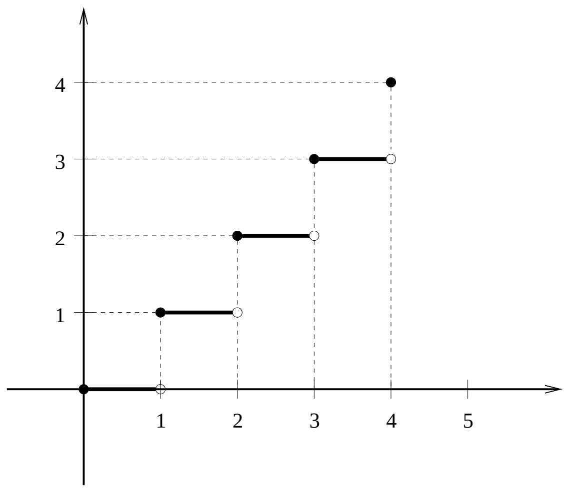


Figura 5.a Grafi co di f

Dire quale delle seguenti è una definizione di f

A: $f(x) = n$, dove n è il più grande intero che verifica $n < x$
B: $f(x) = n$, dove n è il più grande intero che verifica $n \leq x$
C: $f(x)$ è il più piccolo intero che supera x

Esempio 5.4 In uno stesso riferimento cartesiano disegnare il grafico delle funzioni $2^{-x^2/a}$, per $a = 1$, $a = 2$, $a = 4$, $a = 0.5$, $a = 0.25$.

Esempio 5.5 In uno stesso riferimento cartesiano disegnare i grafici delle funzioni $f(t) = \sin(2\pi t + \alpha)$, per $\alpha = \pi/2$, $\alpha = \pi/3$, $\alpha = \pi/2$.

Esempio 5.6 In uno stesso riferimento cartesiano disegnare i grafici delle funzioni

$$f(t) = \sin(\omega t),$$

per $\omega = 1$, $\omega = 2$, $\omega = 4$.

Esempio 5.7 Descrivere il triangolo mostrato nella figura 5.b mediante opportune intersezioni e unioni di sottografici e sopragrafici.

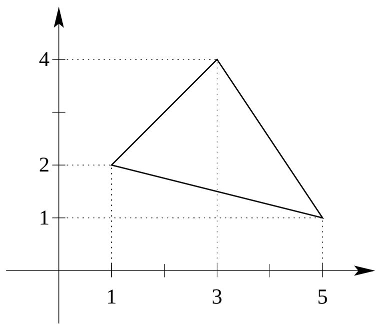


Figura 5.b Triangolo

Esempio 5.8 Mostrare che la funzione $1/x^2$ è decrescente nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Esempio 5.9 In figura 5.c è disegnato il grafico di una funzione f. Descrivere il dominio e l'immagine di f.

Esempio 5.10 Descrivere il dominio delle funzioni seguenti

$$\frac{x}{\sqrt{x-1}}; \qquad \log\left(\frac{x}{2-x}\right); \qquad \log(\sin x).$$

Esempio 5.11 Descrivere l'immagine delle funzioni seguenti

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}; \qquad f(x) = \log(x-1); \qquad \max\{x, 2-x\}.$$

Esempio 5.12 Mostrare che i tre punti $(-5, 36)$, $(20, 56)$ e $(75, 100)$ appartengono alla stessa retta.

Esempio 5.13 Gli studenti di una classe, volendo organizzare un viaggio di istruzione, si recano presso due ditte per conoscere il preventivo di spesa di un pullman. La prima ditta chiede 2 € al km, più 150 € di spesa fissa. La seconda ditta chiede 1.75 € al km, più 200 € di spesa fissa. A partire da quale distanza è più conveniente scegliere la seconda ditta?

$$A: \quad 101\,km \qquad B: \quad 201\,km \qquad C: \quad 301\,km \qquad D: \quad 401\,km$$

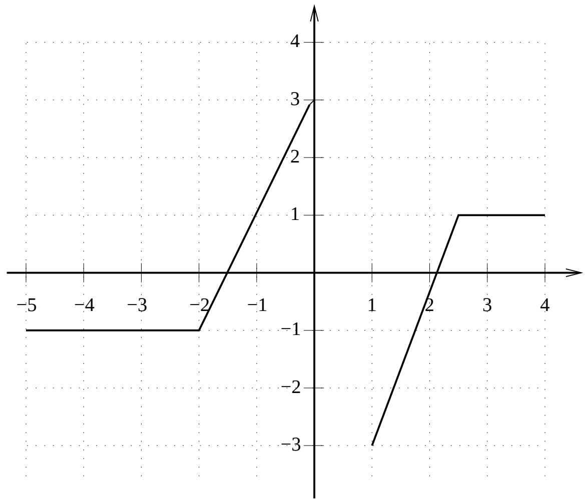


Figura 5.c Grafico di f

Esempio 5.14 Rappresentare qualitativamente il grafico delle funzioni *iperboliche*

$$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2 \qquad \text{e} \qquad \cosh x = (e^x + e^{-x})/2.$$

Esempio 5.15 Sia g una funzione di x con grafico del tipo mostrato in figura 5.d. Individuare quale, fra i grafici mostrati in figura 5.e, rappresenta meglio la funzione

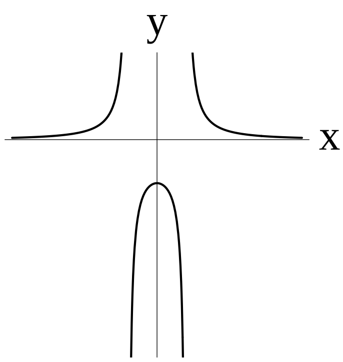


Figura 5.d Grafico di g

$\exp(g(x))$.

Esempio 5.16 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \sin x - [\sin x]$ (dove il simbolo $[\xi]$ denota la *parte intera* del numero reale ξ, ovvero il più grande *numero intero* minore o uguale a ξ).

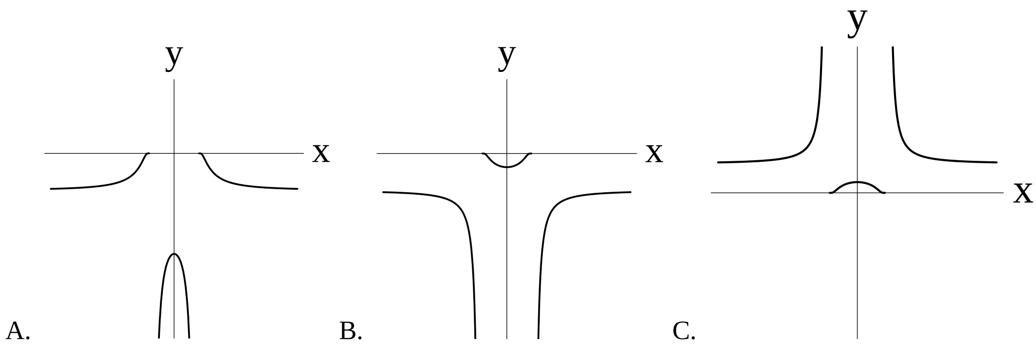


Figura 5.e Grafici fra cui scegliere quello della funzione $\exp(g(x))$

Esempio 5.17 Siano f e g le funzioni, definite sull'intervallo $[0, 5]$, il cui grafico è riportato nella figura 5.f.

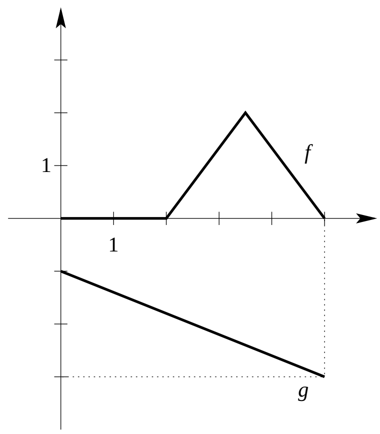


Figura 5.f Grafici di f e g

Disegnare il grafico delle funzioni $f + g$, fg, f/g.

Esempio 5.18 Rappresentare il grafico della funzione $f(x) = |x| + |x + 2|$. La funzione f è iniettiva?

Esempio 5.19 In uno stesso riferimento cartesiano, tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x^2$$

e anche il grafico di ciascuna delle funzioni indicate sotto.

$$x^2+4; \quad (x+4)^2; \quad \frac{1}{4+x^2}; \quad \frac{1}{4-x^2}$$

Esempio 5.20 Sia f la funzione il cui grafico è riportato nella figura 5.g.

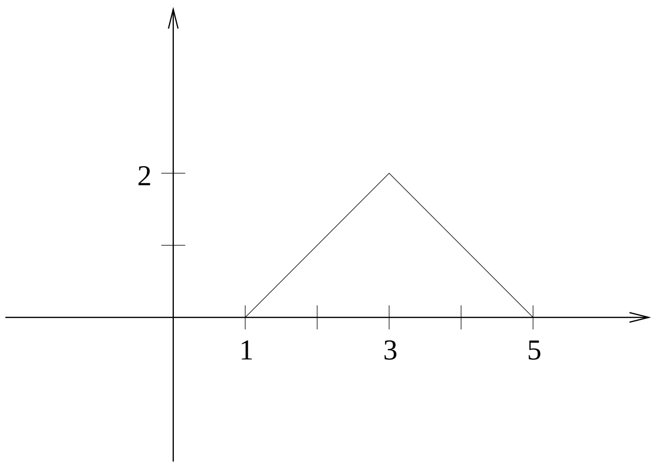


Figura 5.g Grafi co di f

Disegnare il grafico delle funzioni $g(x) = f(x+2)$; $h(x) = f(x)+2$; $u(x) = f(-x)$ e inoltre il grafico delle funzioni $-f$; f^2; $|f|$; $1/f$; $\max\{f, 0\}$.

Esempio 5.21 Disegnare qualitativamente il grafico e determinare il periodo della funzione $\sin x \cos x$.

Esempio 5.22 Il grafico mostrato nella figura 5.h è quello della funzione $ax^3 + c$, per a e c fissati. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

$A:\quad a > 0$ e $c > 0$	$B:\quad a > 0$ e $c < 0$
$C:\quad a < 0$ e $c > 0$	$D:\quad a < 0$ e $c < 0$

Esempio 5.23 Determinare il valore di a, b, c in modo che il grafico della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ passi per i punti $(-1, 1)$, $(2, 0)$ e $(4, -1)$. Calcolare il massimo di f.

Esempio 5.24 Tracciare il grafico delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ e poi per punti il grafico della funzione $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$. Mostrare poi, usando opportune formule trigonometriche, che $f(x) = A\cos(x + \alpha)$ con A e α opportuni e si veda che il grafico corrisponde.

Esempio 5.25 Determinare quali tra le funzioni della famiglia $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ verificano le condizioni $f(0) = f(1) = 1$.

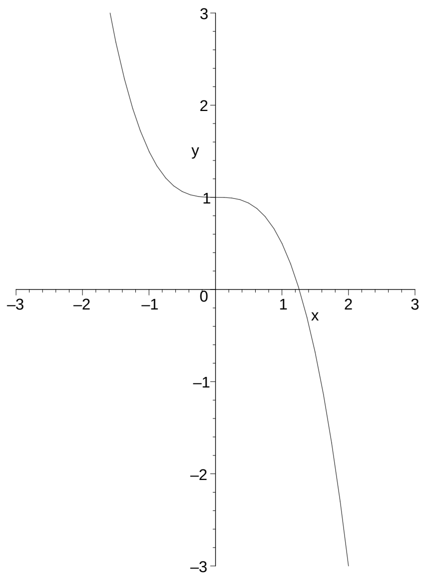


Figura 5.h Grafico di $ax^3 + c$, per a e c fissati

Capitolo 6

Elementi di Statistica Descrittiva

6.1 Motivazioni

La Statistica è uno strumento per trattare dati e con essa si possono dare intepretazioni di cose accadute (*statistica descrittiva*) o si può tentare di "prevedere ciò che potrebbe accadere" (*statistica inferenziale o matematica*). La Statistica inferenziale, che ha uno stretto legame con il calcolo delle probabilità, è contenuta nel blocco *Elementi di statistica inferenziale (blocco n. 19)*. In questo blocco si trovano invece conoscenze relative alla statistica descrittiva, utili in tutte le discipline (fisica, medicina, ingegneria, psicologia, economia, sociologia,...) quando occorre

- organizzare una ricerca;
- raccogliere, organizzare, rappresentare e interpretare dati, anche con l'ausilio di tabelle, istogrammi, grafici di vario tipo;
- affrontare dal punto di vista statistico diverse situazioni problematiche.

6.2 Prerequisiti e collegamenti

Si ritiene importante conoscere, almeno in parte:

- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*
- *Calcolo numerico esatto e approssimato, propagazione degli errori (blocco n. 8)*

Questo mattoncino costituisce una premessa utile a

- *Probabilità nel discreto e calcolo combinatorio (blocco n. 7)*

ed è indispensabile per

- *Elementi di statistica inferenziale (blocco n. 19)*

6.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Raccolta e classificazione di dati. Tipi di caratteri (o di dati). Campionamento.	Saper raccogliere dati utilizzando vari metodi, ad esempio con osservazioni, indagini, esperimenti controllati e questionari. Saper distinguere tra variabili qualitative e quantitative. Scegliere in modo casuale un elemento in un collettivo; produrre esempi di campioni rappresentativi e non rappresentativi. Riuscire a costruire semplici campioni stratificati.
Rappresentazione di dati. Tabelle e diagrammi. Frequenza relativa ed assoluta.	Saper costruire e leggere tabelle di dati, eventualmente a doppia entrata. Saper costruire, anche con fogli elettronici, opportune rappresentazioni grafiche dei dati (istogrammi, areogrammi, box-plot,...) e saperli interpretare. Saper determinare la frequenza assoluta e relativa di una modalità espressa anche in forma di percentuale.
Analisi di dati. Indici di posizione e dispersione. Regressione e correlazione.	Saper determinare media, mediana e scarto quadratico medio di una distribuzione (collezione di dati), essendo in grado di valutare quelli significativi in relazione all'obiettivo dell'analisi. Conoscere ed utilizzare le proprietà elementari di tali indici statistici. Saper determinare la retta di regressione, calcolare la correlazione tra due variabili statistiche e saperne valutare il grado di dipendenza.

6.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **1** CREDITO . Le conoscenze del presente blocco possono essere sviluppate contestualmente a quelle del blocco *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*. In tal caso si potrebbe anche prevedere, per il complesso dei due moduli, una riduzione (di circa $1/5$) del tempo-crediti necessario al loro sviluppo.

6.5 Esempi di problemi, esercizi e domande.

Esempio 6.1 Considerare la seguente tabella di dati, che illustra la percentuale della popolazione agricola sulla popolazione attiva in alcuni paesi:

Anni	Gran Bretagna	Francia	Germanie	U.S.A
1850	22	64	65	65
1870	15	49	49	50
1910	6	42	18	33

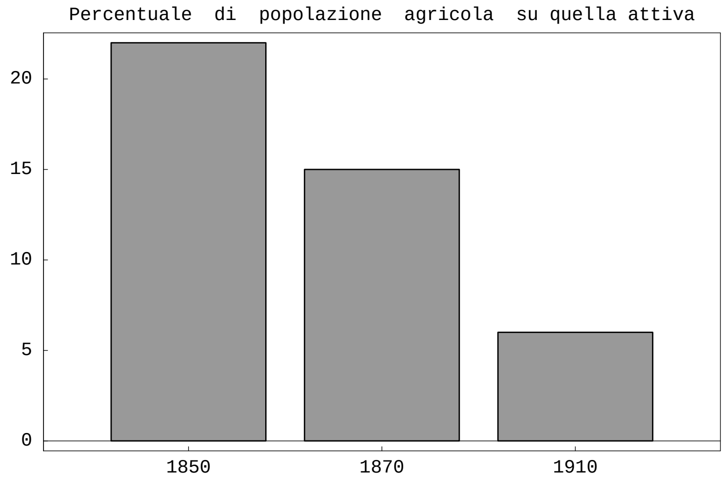


Figura 6.a Percentuale della popolazione agricola sulla popolazione attiva in alcuni paesi

Osserviamo poi il grafico riportato in figura 6.a, che evidenzia la percentuale della popolazione agricola sulla popolazione attiva in uno dei precedenti paesi.

- Di quale paese si tratta?
- Sarebbe possibile inserire in uno stesso grafico tutti i dati della tabella che è stata precedentemente introdotta?
- Come si potrebbero fare i confronti?

Esempio 6.2 Le altezze (in centimetri) di 50 studenti di una scuola sono riportate nella tabella che segue:

169	166	166	170	164	168	170	167	171	170
171	164	171	170	172	173	167	167	168	168
170	168	167	166	160	169	161	174	166	174
174	167	164	168	161	167	164	170	168	166
168	170	167	171	170	164	166	168	169	167

Determinare moda, mediana e media della distribuzione.

Esempio 6.3 Volendo raggruppare in classi i dati dell'Esempio precedente, considerare il caso in cui i dati vengono raggruppati in 10 classi e quello in cui i dati vengono raggruppati in 5 classi. Tracciare poi, per entrambi i casi, il grafico della distribuzione di frequenza.

Discutere i risultati ottenuti nelle due situazioni proposte. (Per lo svolgimento di questo esercizio si suggerisce l'utilizzo di un foglio elettronico).

Esempio 6.4 Calcolare lo scarto quadratico medio dei dati della tabella introdotta nell'Esempio 2 e discutere la sua determinazione nei due casi che si hanno a seconda delle due diverse suddivisioni in classi.

Esempio 6.5 Cosa accade alla mediana, alla media ed allo scarto quadratico (relativi ai dati dell'Esempio 2) se ciascun dato è quintuplicato? Motivare la risposta.

Esempio 6.6 Cosa accade alla mediana, alla media ed allo scarto quadratico (relativi ai dati dell'Esempio 2) se ciascun dato è diminuito di 2? Motivare la risposta.

Esempio 6.7 Cosa accade alla mediana e alla media (relativi ai dati dell'Esempio 2) se i dati dell'ultima colonna sono aumentati di $10\,cm$? Motivare la risposta. Si possono determinare media e mediana non sapendo che i 5 dati aumentati di $10\,cm$ appartengono all'ultima colonna?

Esempio 6.8 Descrivere tre esempi, tratti dalla realtà di ogni giorno, nei quali sia utilizzata la mediana, la media aritmetica e la media armonica.

Esempio 6.9 Si lancia un dado 100 volte (fisicamente o usando una tavola di numeri aleatori). Costruire il grafico della distribuzione di frequenze relative dei punteggi e calcolare la media campionaria dopo:

1) 10 lanci;
2) 25 lanci;
3) 100 lanci.

Esempio 6.10 Nella tabella seguente sono riportati i dati relativi ai titoli di studio di 150 abitanti di una cittadina ai quali era stato chiesto anche il titolo di studio del padre. Le classi sono state definite come (E) = elementare, (M) = media, (BS) biennio superiore, (ES) = esame di stato, (D) = diploma universitario, (L) = laurea universitaria. La tabella mette in evidenza un "miglioramento culturale" dei figli rispetto ai padri. Giustificare questa considerazione.

	PADRE E	PADRE M	PADRE BS	PADRE ES	PADRE D	PADRE L
E	10	3	2	0	0	0
M	6	15	4	1	0	0
BS	4	10	8	5	1	0
ES	1	6	6	12	3	1
D	0	0	5	10	10	4
L	0	0	0	6	8	9

Esempio 6.11 Supponiamo che questi 5 amici abbiano i seguenti redditi e risparmi:

	REDDITO (R)	RISPARMIO (ρ)
ANDREA	8 000 €	6 00 €
BEPPE	11 000 €	1 200 €
CARLO	9 000 €	1 000 €
DARIO	6 000 €	700 €
EUGENIO	6 000 €	300 €

Rappresentare in un piano cartesiano R,ρ i punti corrispondenti ai 5 amici e calcolare la retta di regressione. Dare poi una interpretazione dei dati utilizzando questa retta.

Esempio 6.12 Dopo aver calcolato la retta di regressione relativa ai dati dell' Esempio precedente, considerando il risparmio (ρ) dipendente dal reddito (R), dare una interpretazione del coefficiente angolare della retta: è un numero "puro" (adimensionale) ? Perché?

Capitolo 7

Probabilità nel discreto ed elementi di calcolo combinatorio

7.1 Motivazioni

In moltissime discipline si incontrano importanti situazioni in cui gli esiti di fenomeni o esperimenti sono incerti e il calcolo delle probabilità è uno strumento indispensabile di modellizzazione. Il caso in cui gli eventi possibili sono in numero finito, che è sostanzialmente quello considerato in questo blocco, richiede tecniche e linguaggio un po' meno complessi, e può essere trattato autonomamente. Il Calcolo delle Probabilità nel caso continuo è invece raccolto nel blocco *Probabilità nel continuo (blocco n. 18)*. Non è però necessario separare lo studio dei due casi e anzi può essere utile mantenerli collegati nell'insegnamento. In questo blocco è inserito un breve riferimento alla distribuzione normale che ci sembra necessario per completare il discorso nel caso discreto e che verrà poi sviluppato nel blocco *Probabilità nel continuo (blocco n. 18)*.
Nel Calcolo delle Probabilità si utilizzano molti oggetti matematici che sono di comune uso anche in altri settori della Matematica. Questo consente di collegare naturalmente l'insegnamento della probabilità a quello di altri argomenti.

7.2 Prerequisiti e collegamenti

Per apprendere gli argomenti trattati in questo blocco sono utili le conoscenze e le abilità incluse in:

- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*
- *Elementi di statistica descrittiva (blocco n. 6)*

I contenuti di questo blocco sono fortemente collegati a:

- *Probabilità nel continuo (blocco n. 18)*
- *Elementi di statistica inferenziale (blocco n. 19)*

7.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Fenomeni casuali. Eventi. Spazio degli eventi elementari. Probabilità di un evento. Criteri per l'assegnazione di una probabilità agli eventi elementari: impostazione "classica" e "frequentistica". Additività della probabilità su eventi disgiunti. Calcolo combinatorio.	Saper fornire esempi di esperienze il cui risultato è incerto (ad esempio il lancio di un dado, l'estrazione del lotto, i tempi di attesa). Saper elencare i possibili risultati di un "esperimento" (eventi). Saper valutare la probabilità di un evento, in particolare saper riconoscere un evento impossibile e un evento certo. Saper fornire una rappresentazione grafica dei possibili esiti di un'"esperimento" (grafi ad albero, diagrammi di Venn, tabelle). Saper costruire modelli appropriati al problema considerato. Sapere che la somma delle probabilità degli eventi di una famiglia completa di eventi incompatibili è uguale ad 1. Saper esprimere la probabilità di un evento per mezzo di quella del suo complementare. Saper calcolare la probabilità dell'unione di eventi non necessariamente incompatibili. Saper usare le tecniche del calcolo combinatorio (disposizioni, combinazioni, permutazioni) per "contare" gli elementi di un insieme e per calcolare la probabilità di un evento.
Eventi indipendenti. Probabilità condizionata e formula di Bayes.	Sapere se due eventi sono indipendenti. Essere in grado di fornire esempi di eventi indipendenti. Conoscere il concetto di probabilità condizionata e la formula di Bayes e saperli utilizzare nella risoluzione di problemi concreti.
Distribuzioni di probabilità. Variabili aleatorie discrete: valore atteso (o media o previsione o speranza matematica) e varianza. Gioco equo. Distribuzioni discrete di particolare importanza: binomiale (o bernoulliana), geometrica, ipergeometrica, di Poisson.	Saper calcolare la distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta. Sapere cosa indicano il valore atteso, la varianza e la deviazione standard di una variabile aleatoria. Saper calcolare media e deviazione standard di una variabile aleatoria e di una funzione elementare di una variabile aleatoria discreta (ad esempio: $E(X+3), E(X^2), \mathrm{Var}(2X)$). Conoscere le proprietà di alcune distribuzioni discrete notevoli (binomiale, geometrica, ipergeometrica, di Poisson) e saperle applicare in situazioni concrete. Saper valutare criticamente i giochi di sorte.
Distribuzioni continue: distribuzione normale, utilizzando una nozione elementare di integrale.	Conoscere la differenza tra variabili discrete e variabili continue. Conoscere i concetti di funzione di densità e funzione di distribuzione. Conoscere le proprietà della distribuzione normale. Saper utilizzare le tavole della distribuzione normale standard.

7.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **2** CREDITI , ridotti a 1.5 crediti nel caso in cui non venga trattata la distribuzione normale.

7.5 Esempi e problemi

Esempio 7.1 In quanti modi si possono sedere 13 persone attorno ad un tavolo?

Esempio 7.2 Quante sono le coppie (ordinate) di numeri naturali, minori di 100 non consecutivi?

Esempio 7.3 Dati 5 punti in un piano (a tre a tre non allineati) quanti triangoli si possono formare?

Esempio 7.4 Dare un esempio di eventi indipendenti che non sono incompatibili ed un esempio di eventi incompatibili che non sono indipendenti.

Esempio 7.5 Mostrare che due eventi incompatibili e di probabilità positiva non possono essere indipendenti.

Esempio 7.6 Qual è la probabilità che, giocando al lotto, su tre ruote diverse, esca contemporaneamente come primo estratto il numero 77?

Esempio 7.7 Scommettere sul fatto che verrà almeno una volta il 4 lanciando un dado 4 volte è "equivalente" a scommettere sul fatto che verrà almeno una volta il "doppio 6" lanciando due dadi 24 volte?

Esempio 7.8 Qual è il giusto prezzo da pagare per far parte di un gioco in cui si può vincere 25 € una volta su 5 e 10 € con probabilità doppia?

Esempio 7.9 Per la vittoria finale nel campionato di calcio, gli scommettitori danno la Juventus 5 a 2 ed il Milan 3 a 2. Quali sono le rispettive probabilità di vincere?

Esempio 7.10 Scrivere in termini insiemistici l'evento: {si verificano almeno 3 degli eventi A, B, C, D}.

Esempio 7.11 Si può spiegare, usando termini probabilistici, il fatto che la roulette è considerato il gioco "da casinò" meno iniquo per uno scommettitore?

Esempio 7.12 È noto che una forma di profilassi ha la probabilità del 90% di essere effettiva durante un anno. Se supponiamo che da un anno ad un altro gli effetti siano indipendenti, dopo 7 anni è più probabile un successo (della profilassi) o un suo fallimento?

Esempio 7.13 Giuseppe dice ad un amico *"Ho due figli ed almeno uno dei due è Maschio."* Qual è la probabilità che anche l'altro figlio sia Maschio ?
Se Giuseppe avesse detto *"Ho due figli ed il minore è Maschio"* la risposta alla domanda precedente sarebbe la stessa o sarebbe diversa?

Esempio 7.14 Qual è la probabilità di ottenere 8 Teste su 10 lanci di una moneta perfetta? E se la probabilità di Testa fosse del 55% ?

Esempio 7.15 Si estraggono a caso e contemporaneamente due numeri da un sacchetto di numeri da tombola. Determinare la funzione di probabilità dei due numeri.

Esempio 7.16 Un sistema di allarme è formato da 3 meccanismi indipendenti le cui probabilità di guastarsi sono $p_1 = 0.2$, $p_2 = 0.1$, $p_3 = 0.3$. Due di essi si guastano a causa di un corto circuito. Qual è la probabilità che si siano guastati, a prescindere dall'ordine del guasto, i primi due ?

Esempio 7.17 Giocando a poker, è più probabile avere in mano un *full* ovvero Tre carte di un tipo (*Asso,* 7,*...*) e Due di un secondo tipo oppure un *colore* ovvero cinque carte dello stesso seme (*Picche, Cuori,...*) non consecutive?

Esempio 7.18 Provare che $\mathrm{Var}(aX) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$ e che $\mathrm{Var}(X+2) = \mathrm{Var}(X)$.

Esempio 7.19 Discutere il significato di $\mathrm{Var}(X) = 0$. A che tipo di variabile aleatoria può far riferimento?

Esempio 7.20 Può esistere una variabile aleatoria tale che $E(X) = \mathrm{Var}(X)$?

Esempio 7.21 Sia X una variabile aleatoria di tipo geometrico e siano $n, m \geq 1$. È vero che $P(X = n + m | X > n) = P(X = m)$?

Esempio 7.22 Si lanci un dado onesto. Sia X il risultato di un lancio, S la somma del lancio di due dadi, N il numero di lanci effettuati per ottenere la prima volta la faccia 5 . Calcolare le distribuzioni di X, S, N, la loro media e la loro varianza.

Esempio 7.23 Un metodo frequentemente usato per conoscere la numerosità N di alcune specie di animali è il seguente: si cattura un certo numero n di animali, si contraddistigue in qualche modo ogni animale catturato – ad es. tingendo loro una zampa di vernice rossa indelebile – e si lasciano poi liberi. Dopo un po' di tempo, allorché la fauna si è "ristabilita", si ripete l'operazione e si cerca di stimare, partendo dal numero di animali con la zampa rossa catturati questa seconda volta, quanto vale N. L'operazione può essere ripetuta più volte.
Supponendo allora di ripetere l'operazione di cattura e ricattura k volte e ipotizzando che ogni animale abbia la stessa probabilità p di essere catturato, trovare la probabilità che, partendo da N animali se ne catturino rispettivamente $n_1, n_2, \cdots, n_r$ di quelli già catturati. Successivamente, supponendo nota questa probabilità e di NON conoscere N, provare a definire una strategia per stimare N.

Esempio 7.24 (Problema dei compleanni) Quanti studenti ritenete debbano essere presenti nel cortile di una scuola affinché si possa scommettere "alla pari" che *almeno* due di essi sono nati nello stesso mese e nello stesso giorno?
(Suggerimento: ricavare al calcolatore i valori della probabilità che tra n studenti ve ne siano almeno due nati nati nello stesso mese e nello stesso giorno, per diversi valori di n da 10 a 100.)

Esempio 7.25 Se la probabilità che un apparecchio sia difettoso è 0.1, trovare la deviazione standard della distribuzione degli apparecchi difettosi per una partita di merce di 400 pezzi.

Esempio 7.26 Ad un esame il voto medio è stato 72 e la deviazione standard 9. Il miglior 10% degli studenti sarà promosso. Qual è il voto minimo per la promozione?

Capitolo 8

Calcolo numerico esatto e approssimato e propagazione degli errori

8.1 Motivazioni

In gran parte delle applicazioni della matematica si opera con numeri reali scritti sotto forma di allineamenti decimali. Tali allineamenti decimali hanno quasi sempre “code” infinite (anche se si tratta di numeri razionali). Nei calcoli è invece inevitabile usare solo espressioni decimali con “code” finite, spesso con un numero prefissato di cifre dopo la virgola. Quindi diventa cruciale rendersi conto di qual è la “perdita di informazione” che si subisce nel passare dalla conoscenza teorica di un numero (per esempio π) ad un suo valore decimale approssimato, per esempio 3.141592. È ancor più cruciale rendersi conto della misura in cui, nei calcoli con valori approssimati, la precisione dei dati in entrata si ripercuote sulla precisione del risultato in uscita. Va segnalata inoltre l’importanza di rendersi conto del diverso modo in cui i matematici e gli scienziati sperimentali (o gli economisti e gli statistici) usano gli oggetti e i simboli matematici. Ad esempio, nell’ambito di una scienza sperimentale, dare 2.70 come risultato di una misura è diverso rispetto a dare 2.7 , anche se entrambe le scritture si riferiscono allo stesso numero razionale. Infatti, scrivere la cifra zero dopo la cifra sette, proprio perché non sarebbe necessario, implica un significato ulteriore per quanto riguarda la precisione con cui è noto il dato: “sono certo che il risultato è 2.70 e non 2.72 o 2.69”. La stessa certezza non è implicata se si dà il nunero 2.7. Un altro esempio: la scrittura 12.75 ± 0.05 può avere significati diversi: in algebra essa indica l’insieme dei due numeri $\{12.70; 12.80\}$, mentre come risultato di una misura essa può indicare l’intervallo di valori tra 12.70 e 12.80, magari con una opportuna distribuzione di probabilità su di esso.

8.2 Prerequisiti e collegamenti

Per poter apprendere gli argomenti trattati in questo blocco è sufficiente avere una buona conoscenza dei diversi insiemi numerici (naturali, interi, razionali, reali), delle operazioni fra i numeri e delle proprietà delle disuguaglianze. Per eventuali richiami e per ulteriori approfondimenti si rinvia a:

- *Potenze e radici, equazioni e disequazioni algebriche (blocco n. 2)*

Moduli specificamente correlati sono

- *Elementi di statistica descrittiva (blocco n. 6)*
- *Probabilità nel discreto e calcolo combinatorio (blocco n. 7)*
- *Elementi di statistica inferenziale (blocco n. 19)*

Andranno curati collegamenti sistematici con le altre discipline specifiche del corso di studio, nei quali si fa un uso 'strumentale' della matematica.

8.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Rappresentazione decimale dei numeri reali.	Conoscere e usare correttamente scritture del tipo $a = 4.82...$ $a \simeq 4.82$ $a = 4.820 \pm 0.003$.
Operazioni di arrotondamento e di troncamento. Nozioni di precisione (errore) e di cifre esatte.	Saper applicare in situazioni concrete le operazioni di arrotondamento e troncamento. Conoscere il diverso significato col quale i termini "precisione" e "errore" vengono usati in matematica e in ambito sperimentale.
Formule di propagazione degli errori nelle operazioni aritmetiche.	Saper "calcolare" con intervalli reali. Per esempio, sapendo che $a_1 < a < a_2$ e che $b_1 < b < b_2$, cosa si può dire di $a + b, a - b, a \cdot b, a : b$? Saper scegliere la precisione dei dati numerici da inserire in una formula in modo tale da ottenere il risultato con una precisione prefissata.

8.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **0.5** CREDITI .

8.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 8.1 Volendo calcolare (senza l'uso di calcolatrici) la lunghezza della circonferenza circoscritta ad un quadrato di lato unitario, con quante cifre decimali esatte di π e di $\sqrt{2}$ si deve operare, se si pretende di conoscere il risultato con due cifre decimali esatte dopo la virgola? E se si pretende di conoscere il risultato con una precisione a meno di 0.002?

Esempio 8.2 Un bus dell'esercito può trasportare 36 soldati. Se si devono trasportare 1128 soldati, quanti bus sono necessari?

Esempio 8.3 Un autocarro può trasportare un carico utile di 7 tonnellate. Dovendo trasportare blocchi di marmo, ciascuno del peso di 1300 kg, quanti blocchi può trasportare?

Esempio 8.4 Un oggetto (per esempio un pezzo di roccia) pesa 3.650 ± 0.005 kg e ha un volume di $1.45 \pm 0.05\ dm^3$. Qual è il suo peso specifico? Volendo conoscere tale peso specifico con maggiore precisione, è più importante effettuare nuove e più accurate misure del peso o del volume?

Esempio 8.5 Si vuole realizzare un recipiente di forma cubica della capienza di 100 litri. Determinare (con l'uso di una calcolatrice) la lunghezza degli spigoli del recipiente con una precisione tale che la capienza effettiva non si discosti per più di 0.10 litri da quella teoricamente richiesta.

Esempio 8.6 Tutti gli strumenti di calcolo elettronico operano al loro interno con numeri scritti in base 2. Nella conversione tra le due basi un numero decimale finito si trasforma sempre in un numero "binario" finito, o ci sono casi nei quali la "coda" binaria può risultare infinita? E viceversa, cosa succede nella conversione di un numero "binario" finito in notazioni decimali?

Esempio 8.7 Considerare la sequenza di comandi (implementabili su una calcolatrice scientifica o su un computer):

(A) esprimere il numero 1/7 in forma decimale
(B) moltiplicare per 8
(C) togliere 1
(D) iterare venti volte i passi (B) e (C)

Riflettere sui risultati ottenuti (tenendo presente che, in base alle regole della matematica, al termine di ogni ciclo si dovrebbe ritornare all'espressione decimale di 1/7).

Capitolo 9

Geometria analitica piana

9.1 Motivazioni

L'uso del linguaggio algebrico per descrivere gli oggetti della geometria, e poi per calcolare e risolvere problemi, è uno degli strumenti di modellizzazione più importanti che hanno consentito lo sviluppo della scienza e della tecnologia moderna nel Seicento e nel Settecento. Tuttora la geometria analitica è uno strumento usato in molte discipline applicate ed è quindi importante saper passare consapevolmente dalla rappresentazione geometrica di un problema a quella algebrica, e viceversa, sapendo sfruttare le caratteristiche di ciascuna rappresentazione. Gli aspetti più elementari del metodo delle coordinate si trovano nel blocco *Coordinate e vettori (blocco n. 4)*. Nello stesso blocco si trovano le equazioni parametriche della retta. In *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)* si trova la descrizione di rette e parabole come grafici di funzioni polinomiali di primo e secondo grado. Qui sono raccolti alcuni altri temi di geometria analitica piana, in particolare la descrizione di curve come luoghi di zeri di polinomi di primo e secondo grado. Non si è però ritenuto opportuno inserire una teoria generale delle coniche e delle rette tangenti ad esse.

9.2 Prerequisiti e collegamenti

Per poter apprendere gli argomenti trattati in questo blocco si deve prima avere una buona padronanza degli argomenti trattati in:

- *Potenze e radici, equazioni e disequazioni algebriche (blocco n. 2)*
- *Coordinate e vettori (blocco n. 4)*
- *Geometria euclidea del piano (blocco n. 3)*

Per la parte sulle coordinate polari è utile una conoscenza parziale di:

- *Dalla trigonometria alle funzioni trigonometriche (blocco n. 10)*

Le conoscenze del presente blocco dovrebbero essere sviluppate contestualmente a quelle di:

- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*
- *Spazi vettoriali e matrici (blocco n. 12)*

poiché si rafforzano a vicenda. Molto interessanti sono anche i collegamenti con:

- *Geometria euclidea ed analitica dello spazio (blocco n. 13)*
- *Numeri complessi (blocco n. 15)*

9.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Equazione della retta. Rette parallele. Rette perpendicolari. Equazione della circonferenza nella forma $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. *Retta tangente ad una circonferenza. Curve descritte come luogo di zeri di una funzione di due variabili; intersezione di una curva con una retta.*	Scrivere l'equazione di una retta a partire da diversi tipi di condizioni. Saper definire geometricamente la distanza tra due rette parallele e saperla calcolare note le equazioni delle rette. Descrivere analiticamente semipiani, angoli e semplici poligoni. Rappresentare graficamente sottoinsiemi del piano assegnati con condizioni algebriche, in particolare soluzioni di sistemi di equazioni e disequazioni lineari in due incognite. Saper trovare l'equazione di una circonferenza che verifica determinate condizioni (ad esempio: determinare l'equazione della circonferenza passante per tre punti assegnati, determinare l'equazione della circonferenza dato il suo centro ed una retta ad essa tangente). Saper scrivere l'equazione di un'ellisse, definita come il luogo dei punti per i quali è costante la somma delle distanze da due punti dati (fuochi), nel caso in cui i fuochi sono posti su un asse. Analogamente saper scrivere le equazioni della parabola e dell'iperbole in posizioni canoniche. Conoscere le relazioni tra queste curve e le sezioni di un cono.
Coordinate polari nel piano. Coordinate in un sistema di riferimento traslato, ruotato o dilatato.	Equazioni di circonferenze, ellissi e spirali in coordinate polari. Rappresentazione parametrica di una circonferenza con centro e raggio assegnati.

9.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **1** CREDITO .

9.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 9.1 Determinare l'equazione della retta passante per i punti $A = (1, 2)$ e $B = (-1, 3)$.

Esempio 9.2 Determinare l'equazione della retta passante per il punto $P = (-2, 1)$ e parallela alla retta di equazione $4x + 2y - 1 = 0$.

Esempio 9.3 Determinare l'equazione della retta passante per il punto $P = (1, -4)$ e perpendicolare alla retta di equazione $y = 3x + 5$.

Esempio 9.4 Stabilire se i punti $A = (1, 3)$, $B = (3, -1)$ e $C = (2, 1)$ sono allineati.

Esempio 9.5 Dati i punti $A = (1, 1)$ e $B = (2, 3)$, determinare i vertici di tutti i quadrati aventi come lato il segmento AB.

Esempio 9.6 Dati i punti $A = (1, 1)$ e $B = (2, 3)$, determinare i vertici di tutti i quadrati aventi come diagonale il segmento AB.

Esempio 9.7 Dati i punti $A = (1, 1)$ e $B = (2, 3)$, determinare il terzo vertice C di un triangolo di area uguale a 10 e avente un lato coincidente con il segmento AB.

Esempio 9.8 Dati i punti $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ e $C = (0, 5)$, determinare un insieme di condizioni algebriche verificate da tutti e soli i punti appartenenti all'angolo $A\widehat{B}C$.

Esempio 9.9 Dati i punti $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ e $C = (0, 5)$, determinare un insieme di condizioni algebriche verificate da tutti e soli i punti appartenenti al triangolo ABC.

Esempio 9.10 Stabilire se il punto $D = (62, -1)$ è interno, esterno o sul bordo del triangolo di vertici $A = (1, 3)$, $B = (2, -6)$ e $C = (98, 2)$.

Esempio 9.11 Determinare per quali valori del parametro k la retta di equazione $2x - 3y + k = 0$ ha intersezione non vuota con il triangolo di vertici $A = (1, 3)$, $B = (2, -6)$ e $C = (98, 2)$.

Esempio 9.12 Dati i punti $A = (1, 1)$ e $B = (2, 3)$, determinare tutti i punti C tali che il triangolo ABC sia equilatero.

Esempio 9.13 Trovare il luogo dei centri delle circonferenze tangenti a due circonferenze assegnate.

Esempio 9.14 Determinare l'equazione della circonferenza avente centro $C = (-1, 1)$ e tangente alla retta di equazione $y = 2x - 1$.

Esempio 9.15 Dati i punti $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ e $C = (0, 5)$, determinare le condizioni algebriche verificate da tutti e soli i punti interni alla circonferenza passante per i punti A, B e C.

Esempio 9.16 Dati i punti $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ e $C = (0, 5)$, determinare l'area del triangolo ABD dove D è il punto di intersezione delle rette tangenti nei punti A e B alla circonferenza passante per A, B e C.

Esempio 9.17 Data la retta $r :\ x + 2y + 1 = 0$, determinare tutte le rette aventi da essa distanza uguale a 2.

Esempio 9.18 Rappresentare graficamente le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x + y + 1 > 0, \\ x + y = 0. \end{cases}$$

Esempio 9.19 Rappresentare graficamente le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 1 > 0, \\ x - 3 > 0. \end{cases}$$

Esempio 9.20 Rappresentare graficamente le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 < 4, \\ x + y > 0. \end{cases}$$

Esempio 9.21 Determinare l'equazione dell'ellisse avente i fuochi nei punti $F_1 = (0, 3)$, $F_2 = (0, 1)$ e l'asse maggiore di lunghezza 4.

Esempio 9.22 Dato un sistema di corrdinate polari (ρ, ϑ), rappresentare i punti che verificano ciascuna delle seguenti condizioni:

$$\rho = 3; \qquad \rho \leqslant 3; \qquad \vartheta = 3; \qquad \vartheta \leqslant 3; \qquad \rho = 3\vartheta.$$

Esempio 9.23 Disegnare la curva avente equazione $x = 1 + 2\cos\vartheta$, $y = -3 + 2\sin\vartheta$.

Esempio 9.24 Verificare se il triangolo di vertici i punti $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$ e $C = (0, 5)$ è acutangolo, retto o ottusangolo.

Capitolo 10

Dalla trigonometria alle funzioni trigonometriche

10.1 Motivazioni

Nozioni elementari di trigonometria, quali la misura di angoli e la “risoluzione” di triangoli, hanno applicazioni in problemi pratici (ad esempio: topografia, nautica, astronomia, etc.) e vengono utilizzate anche per il calcolo con i vettori, per le coordinate polari e per la rappresentazione dei numeri complessi. Le funzioni trigonometriche sono però importanti non tanto per la loro relazione con i lati e gli angoli di un triangolo, quanto per le loro speciali proprietà, che le rendono strumenti fondamentali per la modellizzazione dei fenomeni periodici, come quelli che si incontrano in molti problemi della fisica e dell’ingegneria (ad esempio moti armonici, moti planetari, fenomeni ondulatori). È necessario quindi che gli studenti acquisiscano, accanto all’idea di funzione trigonometrica di un angolo, l’idea di funzione trigonometrica definita nell’insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

10.2 Prerequisiti e collegamenti

Padronanza degli argomenti trattati in:

- *Geometria euclidea del piano (blocco n. 3)*
- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*

Risulta particolarmente correlato

- *Numeri complessi (blocco n. 15)*

10.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Idea intuitiva di lunghezza di un arco di curva. Misura di un angolo in radianti. Funzioni trigonometriche di un arco (angolo): seno, coseno, tangente. Funzioni trigonometriche inverse. Identità trigonometriche fondamentali.	Saper convertire la misura di un angolo da gradi a radianti e viceversa. Saper individuare i valori delle funzioni trigonometriche di alcuni angoli particolari senza ricorrere alla calcolatrice. Saper utilizzare in modo appropriato la calcolatrice per individuare i valori delle funzioni trigonometriche di un angolo generico e i valori delle funzioni trigonometriche inverse. Conoscere le identità $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\sin\alpha/\cos\alpha = \tan\alpha$. Saper utilizzare funzioni trigonometriche note di un certo angolo per trovare funzioni trigonometriche di altri angoli (complementare, supplementare, ecc.). Saper "risolvere" un triangolo rettangolo. Dati due lati di un triangolo e l'angolo compreso, saper determinare il terzo lato.
Proprietà elementari delle funzioni trigonometriche (parità, disparità, periodicità, limitatezza). Grafici delle funzioni trigonometriche e loro simmetrie. Formule di addizione del seno e del coseno.	Saper tracciare e riconoscere i grafici delle funzioni trigonometriche e di funzioni della forma $f(cx)$, $cf(x)$ dove f è una funzione trigonometrica. Saper utilizzare le proprietà elementari delle funzioni trigonometriche per risolvere semplici equazioni e disequazioni. Saper trasformare opportunamente espressioni trigonometriche. Conoscere le formule di addizione del seno e del coseno e saperle utilizzare per ricavare semplici relazioni tra le funzioni trigonometriche.

10.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **0.5** CREDITI . Possono essere sufficienti 0.5 crediti se gli studenti sono padroni dei prerequisiti e hanno affrontato l'argomento nella scuola superiore. Altrimenti può essere necessario un impegno maggiore.

10.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 10.1 Su molte calcolatrici scientifiche sono disponibili tre tasti per le misure angolari: radianti, gradi (sottinteso *sessagesimali*), gradi centesimali (di uso meno frequente). Determinare il seno di 1 radiante, di 1 grado, di 1 grado centesimale.
Determinare poi il seno di un angolo di $57^\circ\,17'\,44''$. Si otterrà un valore molto vicino ad uno dei valori già trovati in risposta alla domanda precedente. Fornire un'interpretazione di questo fatto.

Esempio 10.2 Se x è espresso in radianti e $x > 0$, dire se è vero o falso che $\sin x < x$.

Esempio 10.3 Dimostrare che:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x+\pi) = -\cos(x) \qquad \text{e} \qquad \sin(x+\pi) = -\sin(x).$$

Esempio 10.4 Calcolare il valore di

$$\frac{\sin \frac{7}{4}\pi - \cos(-5\pi)}{\tan^2 \frac{4}{3}\pi + \sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)}.$$

Esempio 10.5 È univocamente determinata l'area di un triangolo che ha due lati di lunghezza rispettivamente a e b e l'angolo compreso di ampiezza γ? Perché? Quanto vale tale area?

Esempio 10.6 In un parallelogramma i lati misurano 2 e 3 e un angolo $\pi/5$. Quanto misurano le diagonali?

Esempio 10.7 Trovare il periodo delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \sin(3x)$$
$$f(x) = 2\sin(\tfrac{x}{6} + \tfrac{\pi}{5})$$
$$f(x) = \sin x + \sin 5x$$

Esempio 10.8 Tracciare il grafico delle seguenti funzioni:

- $f(x) = \cos 2x$
- $f(x) = \sin |x|$
- $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

Esempio 10.9 In figura in figura 10.a è rappresentato il grafico di una funzione che appartiene alla famiglia

$$a \sin bx.$$

Trovare i due parametri a e b, sapendo che b è un numero intero.

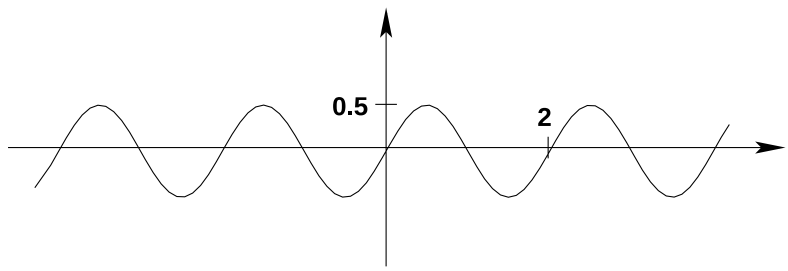


Figura 10.a Grafi co della funzione $a \sin bx$

Esempio 10.10 Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni:

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan^2 x < 1 \qquad \cos x < -\frac{1}{4} \qquad \cos x = x.$$

Esempio 10.11 Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $\sin(2x) = 2\sin(x)$.
- non esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $\sin(2x) = 2\sin(x)$.
- nessuna delle precedenti affermazioni è corretta.

Esempio 10.12 Riconoscere, giustificando la risposta, se i seguenti enunciati sono veri o falsi:

(1) $\forall x \forall y$ vale $\cos(x+y) = \cos(x) + \cos(y)$.
(2) $\exists x$ tale che $\forall y$ vale $\sin(x+y) = \sin(x) + \sin(y)$.

Esempio 10.13 Esprimere in funzione di $\cos\alpha, \cos\beta, \sin\alpha, \sin\beta$ le seguenti espressioni:

$$\cos(\alpha-\beta) \qquad \sin(\alpha+\beta) \qquad \sin 2\alpha \qquad \cos 2\alpha.$$

Esempio 10.14 Una delle seguenti espressioni è uguale a $\sin^2 t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quale?

$$\frac{1+\cos 2t}{2} \qquad \frac{1+\sin 2t}{2} \qquad \frac{1-\cos 2t}{2} \qquad \frac{1-\sin 2t}{2}.$$

Esempio 10.15 Scrivere $\cos x + \sqrt{3}\sin x$ nella forma $A\cos(x+\phi)$, dove A e ϕ sono costanti opportune.
Più in generale, determinare A e ϕ tali che

$$a\cos x + b\sin x = A\cos(x+\phi).$$

Esempio 10.16 Utilizzando un software opportuno, disegnare il grafico della funzione $\sin 9x + \sin 11x$.
Quali considerazioni suggerisce la forma del grafico ottenuto?

Capitolo 11

Progressioni aritmetiche e geometriche, funzioni esponenziali e logaritmiche

11.1 Motivazioni

Le funzioni basilari di tutta la matematica sono sostanzialmente solo di tre tipi:

- funzioni polinomiali
- funzioni esponenziali
- funzioni trigonometriche.

Più specificamente le funzioni esponenziali intervengono nella modellizzazione dei principali fenomeni di accrescimento o di decadimento, in tutti i settori disciplinari, dalla fisica alla chimica, alla biologia, all'economia,... Quindi una conoscenza approfondita e sicura delle funzioni esponenziali e delle loro inverse (ossia delle funzioni logaritmiche) è indispensabile per chiunque, e a qualunque livello, abbia a che fare con tali problematiche nell'ambito dei suoi studi universitari.

11.2 Prerequisiti e collegamenti

Per poter affrontare con successo gli argomenti trattati in questo blocco è opportuno conoscere:

- *Potenze e radici, equazioni e disequazioni algebriche (blocco n. 2)*
- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*

Le funzioni esponenziale e logaritmo sono di uso corrente nell'analisi matematica e in particolare in:

- *Elementi di statistica descrittiva (blocco n. 6)*
- *Probabilità nel continuo (blocco n. 18)*
- *Equazioni differenziali (blocco n. 20)*

11.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Progressioni aritmetiche e geometriche. Funzione esponenziale su $\mathbb{N}$.	Interpretare le progressioni aritmetiche e geometriche come funzioni definite su $\mathbb{N}$, a valori in $\mathbb{R}$ e saperne disegnare i grafici, con particolare attenzione alle progressioni aritmetiche di termine iniziale 0 e alle progressioni geometriche di termine iniziale 1. Conoscendo alcuni termini di una progressione, saper trovare gli altri.
Definizione di potenza con base reale positiva ed esponente razionale (positivo o negativo). Funzione esponenziale su $\mathbb{Z}$ e su $\mathbb{Q}$.	Conoscere le motivazioni e le modalità di estensione della funzione esponenziale da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ e successivamente a $\mathbb{Q}$ e saperne disegnare i grafici.
Definizione di potenza con base reale positiva ed esponente reale (positivo o negativo) facendo ricorso ad una definizione (informale) di continuità della funzione esponenziale.	Conoscere le motivazioni e le modalità con cui la funzione esponenziale può essere ulteriormente estesa da $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$. Sapere che per la funzione così estesa continua a sussistere la relazione funzionale già nota: $f(x) = f(0) \cdot q^x$ (con $q =$ ragione della progressione) oppure $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.
Invertibilità della funzione esponenziale: la funzione logaritmica.	Saper disegnare il grafico della funzione logaritmo. Saper operare con le funzioni esponenziale e logaritmo per risolvere semplici equazioni e disequazioni.
Terminologia e regole di calcolo.	Conoscere e saper utilizzare la proprietà della funzione logaritmo che corrisponde alla proprietà caratterizzante della funzione esponenziale: $\log(x \cdot y) = \log x + \log y$. Conoscere una definizione del numero e. Essere in grado di scegliere la base più opportuna in relazione alla situazione e al problema da risolvere e conoscere la formula per il cambiamento di base. Saper utilizzare la calcolatrice per determinare valori delle funzioni esponenziale e logaritmo.
Coordinate logaritmiche.	Saper "linearizzare" funzioni polinomiali o esponenziali utilizzando coordinate logaritmiche.

11.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **1** CREDITO .

11.5 Esempi di problemi, esercizi e domande.

Esempio 11.1 Disegnare, in un sistema di riferimento cartesiano, il grafico della funzione $f(x) = 2x$. Nello stesso sistema di riferimento disegnare poi, senza fare calcoli, i grafici delle funzioni $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = -2x$, e $f(x) = 2(x + 1)$.

Esempio 11.2 Disegnare, in un sistema di riferimento cartesiano, il grafico della funzione $f(x) = 2^x$. Nello stesso sistema di riferimento disegnare poi, senza fare calcoli, i grafici delle funzioni $f(x) = 1 + 2^x$, $f(x) = 2^{(x+1)}$ e $f(x) = 2^{-x}$.

Esempio 11.3 Disegnare, in un sistema di riferimento cartesiano, il grafico della funzione $f(x) = \log x$. Nello stesso sistema di riferimento disegnare poi, senza fare calcoli, i grafici delle funzioni $f(x) = \log(-x)$, $f(x) = 1 + \log x$, $f(x) = \log(2x)$ e $f(x) = \log(x + 1)$.

Esempio 11.4 In figura 11.a è rappresentato il grafico di una delle seguenti funzioni. Quale?

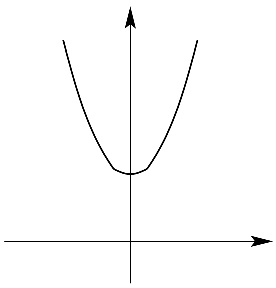


Figura 11.a

$$e^{-x} - e^x \qquad e^{-x} + e^x \qquad e^{-x} - e^x + 1 \qquad e^{-x} + e^x - 1.$$

Esempio 11.5 È vero che $2^x < 3^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

Esempio 11.6 Sapendo che il punto $P = (c, 3)$ appartiene al grafico della funzione $f(x) = 2^x$, determinare c.

Esempio 11.7 In determinate condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni due giorni. Se la crescita è esponenziale, qual è l'aumento percentuale dopo 6 ore? E dopo 18 ore?

Esempio 11.8 Si stima che la popolazione mondiale, attualmente di circa 6 miliardi di individui, aumenti dell' 1.7% all'anno. Supponendo che il tasso di crescita rimanga invariato nel tempo, calcolare entro quanti anni la popolazione raddoppierà, quadruplicherà, decuplicherà.

Esempio 11.9 Un capitale è investito da lungo tempo ad un tasso fisso di interesse annuo del 5%. Se attualmente il capitale, aumentato degli interessi maturati, è di 74500 €, qual era l'ammontare del capitale 10 anni fa? Determinare tale valore nei due casi:
- senza reinvestimento degli interessi (capitalizzazione semplice)
- con reinvestimento degli interessi ogni anno (capitalizzazione composta).

Esempio 11.10 Il tempo di dimezzamento del Carbonio (^{14}C) è di circa 5730 anni. Dopo quanti anni una data quantità di tale isotopo si sarà ridotta del 5% ?

Esempio 11.11 Una popolazione A è formata da 1 000 000 individui e cresce ad un tasso del 6% annuo. Un'altra popolazione B è formata da 1 350 000 individui e cresce ad un tasso del 3.5% annuo. Entro quanti anni la popolazione A diverrà più numerosa della popolazione B?

Esempio 11.12 Risolvere le disequazioni

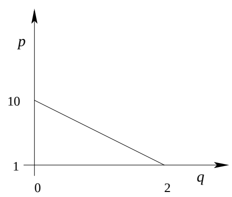
$$\log_3 x + \frac{1}{9} \leqslant 0 \qquad\qquad e^{-x^2+x} > 1.$$

Esempio 11.13 Rappresentare il numero $\sqrt{10}\, r^3$ sulla scala logaritmica in figura 11.b.

Figura 11.b

Esempio 11.14 In figura 11.c è rappresentato il grafico della grandezza p in funzione della grandezza q, utilizzando sull'asse delle ordinate una scala logaritmica (di base 10) e su quella delle ascisse una scala lineare. Esprimere p in funzione di q.

Figura 11.c



Capitolo 12

Spazi vettoriali e matrici

12.1 Motivazioni

Molte attività della vita reale e della matematica possono essere ricondotte a leggi che associano ad un insieme finito di variabili un altro insieme finito di variabili. Le più semplici leggi di questo tipo sono le trasformazioni lineari. Per una loro effettiva conoscenza è indispensabile avere un'idea ben chiara della struttura di spazio vettoriale dell'insieme $\mathbb{R}^n$, formato dalle ennuple di numeri reali, con le operazioni di somma e di moltiplicazione per un numero reale. Per descrivere le trasformazioni lineari sono di fondamentale importanza le matrici con le quali si realizzano algoritmi utili per la deteminazione delle eventuali soluzioni di sistemi di equazioni lineari. Per semplificare i calcoli è spesso utile esprimere le trasformazioni lineari in particolari sistemi di coordinate. A ciò è legato il problema della diagonalizzazione delle matrici per mezzo di matrici invertibili. In molte situazioni applicative, negli spazi vettoriali che si considerano è presente in modo naturale una nozione di distanza, che si descrive algebricamente con il prodotto scalare. In casi importanti le trasformazioni lineari, in un opportuno sistema di coordinate ortogonali, si comportano in modo molto semplice. Per trovare questi sistemi di coordinate occorre diagonalizzare matrici a coefficienti reali per mezzo di matrici ortogonali. Lo studio degli spazi $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ ha un'immediata interpretazione geometrica. Quest'ultima, a sua volta, aiuta a comprendere la struttura di $\mathbb{R}^n$ per n numero intero maggiore di 3. Pertanto lo studio dell'algebra lineare e della geometria analitica del piano e dello spazio si integrano a vicenda.

12.2 Prerequisiti e collegamenti

Per poter apprendere gli argomenti trattati in questo blocco si deve prima avere una buona padronanza di:

- *Coordinate e vettori (blocco n. 4)*

È molto utile sviluppare le conoscenze di questo blocco contestualmente a quelle di:

- *Geometria euclidea ed analitica dello spazio (blocco n. 13)*

In particolare, è utile sviluppare la capacità di passare dalla descrizione geometrica a quella algebrica di trasformazioni e sottospazi.

12.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Gli spazi $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ *come spazi di vettori. Spazi vettoriali sui reali. Combinazione lineare; vettori linearmente dipendenti e indipendenti. Sottospazi vettoriali e sottospazi affini; insieme di generatori di un sottospazio. Basi, dimensione.*	Saper verificare se un insieme assegnato con due operazioni assegnate è uno spazio vettoriale. Con particolare riferimento a $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$: dato un insieme di elementi di uno spazio vettoriale, saper verificare se sono linearmente indipendenti e se sono generatori dello spazio vettoriale; saper verificare se un sottoinsieme assegnato di uno spazio vettoriale è un sottospazio vettoriale e, in caso affermativo, saperne determinare una base; saper determinare una base per l'intersezione e una base per la somma di due sottospazi vettoriali assegnati; saper verificare se un sottoinsieme assegnato di uno spazio vettoriale è un sottospazio affine.
Trasformazioni lineari tra spazi vettoriali. Nucleo e immagine. Matrice associata ad una trasformazione lineare. Autovalori, autovettori e autospazi. Diagonalizzazione di matrici quadrate a coefficienti reali. Prodotto scalare e diagonalizzazione di matrici simmetriche a coefficienti reali.	Saper verificare se una trsformazione tra due spazi vettoriali è lineare. Saper determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine di una trasformazione lineare. Sapere che l'autospazio corrispondente ad un certo autovalore è un sottospazio vettoriale che la trasformazione manda in se stesso e nel quale essa agisce come una dilatazione. Saper determinare autovalori, autovettori e autospazi di una trasformazione lineare di uno spazio vettoriale in se stesso. Saper diagonalizzare, quando possibile, una matrice quadrata a coefficienti reali. Saper diagonalizzare una matrice simmetrica a coefficienti reali per mezzo di una matrice ortogonale. Saper determinare basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$ e di suoi sottospazi vettoriali.
Algebra delle matrici. Notazione matriciale per i sistemi lineari. Descrizione dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare. Algoritmi per trovare le soluzioni di un sistema lineare. Determinante, matrice inversa.	Saper riconoscere un'equazione e un sistema lineare. Saper scrivere in forma matriciale un sistema lineare. Saper calcolare somme e prodotti di matrici. Saper applicare le proprietà delle operazioni tra matrici per risolvere semplici equazioni matriciali. Sapere che l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo è uno spazio vettoriale. Saper descrivere le soluzioni di un sistema lineare utilizzando il linguaggio degli spazi vettoriali. Saper determinare le eventuali soluzioni di un sistema lineare, per esempio trasformando il sistema in un sistema a scalini ad

(*continua*)

esso equivalente. Saper calcolare il determinante e il rango di una matrice, per esempio trasformando la matrice in una matrice a scalini. Sapere quali matrici sono invertibili e saper calcolare la matrice inversa.

12.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **3** CREDITI . I crediti sono riducibili se si studia il solo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ o se ci si limita alla sola algebra delle matrici.

12.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 12.1 Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ due vettori di uno spazio vettoriale V sui numeri reali. Determinare tutti i vettori $\mathbf{x}$ di V verificanti la condizione

$$3\mathbf{u} + 2\mathbf{x} = 5\mathbf{v}.$$

Esempio 12.2 Sia V lo spazio vettoriale dei polinomi nella variabile x di grado $\leqslant 2$. Mostrare che i vettori

$$v_1 = 1 \qquad v_2 = x^2 - 2 \qquad v_3 = x^2 - x$$

- sono linearmente indipendenti
- generano V.

Esempio 12.3 Sia $S(\mathbb{R}, 2)$ l'insieme delle matrici simmetriche di ordine 2. Verificare che $S(\mathbb{R}R, 2)$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale delle matrici di ordine 2 a coefficienti reali e determinarne una base.

Esempio 12.4 Sia dato il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e determinarne una base.

Esempio 12.5 Siano dati i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\}$$

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}$$

Determinare basi di V, W, $V \cap W$, $V + W$.

Esempio 12.6 Sia fissato un sistema di riferimento cartesiano nello spazio. Sia dato il piano π di equazione cartesiana $x+y+z=0$ e la retta di equazioni cartesiane $x=2y=3z$. Dato un punto $P=(x,y,z)$ dello spazio sia $P'=(x',y',z')$ la sua proiezione sul piano π parallela alla retta r. Sia data la funzione $f : R^3 \longrightarrow R^3$ che associa alla terna (x,y,z) delle coordinate di P la terna (x',y',z') delle coordinate (x',y',z') del punto P'. Verificare che f è una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^3$ in se stesso. Determinare la matrice A associata a f relativamente alla base $\mathbf{v}_1=(1,0,0)$, $\mathbf{v}_2=(0,1,0)$, $\mathbf{v}_3=(0,0,1)$. Determinare basi del nucleo e dell'immagine di f. Verificare se la trasformazione f è diagonalizzabile. In caso affermativo determinarne una base di autovettori. Verificare se la matrice A è diagonalizzabile per mezzo di una matrice ortogonale.

Esempio 12.7 Affrontare il problema precedente considerando, al posto della funzione f, la funzione g determinata dalla proiezione ortogonale di P sul piano π.

Esempio 12.8 Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare definita da

$$f(1,0,0)=(0,1,-2,0), \qquad f(0,1,0)=(1,1,3,-1), \qquad f(0,0,1)=(1,0,5,-1).$$

- Calcolare $f(x,y,z)$.
- Determinare gli insiemi $E=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 : f(\mathbf{x})=(-2,1-12,1)\}$ e $F=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 : f(\mathbf{x})=(1,1,1,0)\}$.
- Descrivere il sottospazio vettoriale nucleo di f.
- Scrivere la matrice associata alla trasformazione f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

Esempio 12.9 Scrivere per esteso la matrice di ordine 4

$$A=(a_{ij}) \quad \text{con} \quad a_{ij}=i\cdot j\,.$$

Esempio 12.10 Date le matrici

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}-1&2/3\\1/5&3\end{pmatrix},$$

per ciascuna delle seguenti equazioni matriciali, determinare tutte le matrici X di ordine 2 che sono soluzioni.

$$A+X=B,$$

$$A\cdot X=B\cdot X,$$

$$A\cdot X=X\cdot A\,.$$

Esempio 12.11 Sia data la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}.$$

Determinare tutti i numeri reali h per i quali esistono matrici X non nulle formate da due righe e una colonna verificanti la seguente equazione matriciale:

$$AX=hX.$$

Esempio 12.12 Sia data, al variare del parametro h nei numeri reali, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Determinare tutti i valori del parametro h per i quali è valida la seguente proprietà:

$$A \cdot B = A \cdot C \quad \text{se e solo se} \quad B = C,$$

dove B e C sono matrici di ordine 2.

Esempio 12.13 Dire se è vero o falso che la terna $(-1, -3, 5)$ è soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Esempio 12.14 Siano $\mathbf{v} = (x_1, y_1)$ e $\mathbf{w} = (x_2, y_2)$ due soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$$

Mostrare che anche $2\mathbf{v} - \mathbf{w}$ è soluzione.

Esempio 12.15 Determinare le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = & 2/3, \\ y + 2z \quad = & -3, \\ x + y + z \quad = & -1/2. \end{cases}$$

Esempio 12.16 Determinare le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 2/3, \\ y + 2z & = & -3, \\ 2x + 5y + 8z & = & -1/2. \end{cases}$$

Esempio 12.17 Determinare le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 2/3, \\ y + 2z & = & -3, \\ 2x + 5y + 8z & = & -5/3. \end{cases}$$

Esempio 12.18 Ecco il valore proteico di 100 grammi di alcuni alimenti. Pasta: 368 kcal, carne di vitello: 92 kcal, lattuga: 14 kcal, mela: 45 kcal. Determinare le diete (cioè le quantità dei singoli alimenti) che diano un apporto calorico di 1500 kcal, costituite da 300 grammi complessivi di alimenti, dei quali 120 grammi di frutta e verdura.

Esempio 12.19 Calcolare il determinante della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esempio 12.20 Calcolare il rango della seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Esempio 12.21 Trovare gli autovalori e i corrispondenti autospazi della matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio 12.22 Determinare i tre autovalori della matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per ognuno di essi determinare un autovettore. Mostrare che tali autovettori formano una base di $\mathbb{R}^3$. Scrivere una matrice ortogonale che diagonalizza A.

Capitolo 13

Geometria dello spazio; rappresentazione dello spazio nel piano

13.1 Motivazioni

Noi viviamo in una realtà tridimensionale. Già questa sola constatazione dovrebbe essere ampiamente sufficiente per motivare l'esigenza di una trattazione matematica delle principali proprietà geometriche dello spazio. A ciò si aggiunge il fatto che le rappresentazioni visive delle figure tridimensionali implicano un passaggio dallo spazio al piano (sia esso concretamente realizzato sotto forma di una porzione della retina dei nostri occhi, o di una lastra fotografica, o di un foglio di carta). Trattandosi di un argomento estremamente ampio e articolato, ma purtroppo spesso emarginato o del tutto ignorato nell'insegnamento secondario, questo blocco non ha la pretesa di proporre un'esposizione rigorosa ed esaustiva, quanto piuttosto di richiamare l'attenzione su un numero limitato di aspetti basilari di geometria tridimensionale, sia sintetica che analitica, suscettibili di ulteriori approfondimenti. Il blocco dovrebbe essere utile, in particolare, a chi deve visualizzare e progettare in 3 dimensioni (ingegneri, architetti, computer grafica).
Alcuni elementi di geometria dello spazio compaiono già nel blocco *Coordinate e vettori (blocco n. 4)*.

13.2 Prerequisiti e collegamenti

Per poter affrontare con successo lo studio di questo blocco è indispensabile una buona padronanza degli argomenti basilari della geometria sintetica (euclidea) del piano, nonché della geometria analitica del piano, come specificato in:

- *Geometria euclidea del piano (blocco n. 3)*
- *Coordinate e vettori (blocco n. 4)*

Per la parte delle coordinate cilindriche e polari occorre conoscere le nozioni di seno e coseno di un angolo, ma non è necessaria la conoscenza di tutto il blocco *Dalla trigonometria alle funzioni trigonometriche (blocco n. 10)*.

Particolarmente correlato alla geometria analitica dello spazio risulta

- *Spazi vettoriali e matrici (blocco n. 12)*

13.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Rette e piani dello spazio e loro mutue posizioni: parallelismo e perpendicolarità tra rette, tra piani, tra rette e piani. Angoli diedri e angoloidi.	Proprietà delle relazioni di parallelismo e di perpendicolarità nello spazio. Esistenza di coppie di rette sghembe. Misura delle ampiezze angolari tra due rette, tra due piani, tra una retta e un piano.
Isometrie e similitudini nello spazio; il teorema di Talete nello spazio.	Proprietà delle traslazioni, delle rotazioni intorno ad una retta e delle simmetrie rispetto ad un piano.
Prismi, piramidi, sfere, cilindri e coni.	Conoscere le formule per il calcolo dei volumi di prismi, piramidi, sfere, cilindri e coni. Saper individuare le geodetiche di sfere, cilindri e coni.
Coordinate cartesiane nello spazio.	Equazioni cartesiane di piani e di rette. Equazioni di traslazioni, di rotazioni rispetto ad un asse coordinato, di simmetrie rispetto ad un piano coordinato. Equazioni parametriche di rette dello spazio.
Equazioni di una proiezione parallela dei punti dello spazio secondo una direzione prefissata. Equazioni della proiezione da un punto.	Sapere che nelle proiezioni parallele si conserva l'allineamento di punti e il parallelismo tra rette, ma non la perpendicolarità. Sapere che nelle proiezioni da un punto si conserva l'allineamento.
Superfici nello spazio. Coordinate cilindriche e polari nello spazio.	Equazioni di semplici superfici (sfere, cilindri), anche in coordinate cilindriche o polari.

13.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **1.5** CREDITI .

13.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 13.1 Disegnare correttamente (a mano o al calcolatore) una sfera, evidenziando equatore, poli, alcuni paralleli, alcuni meridiani.

Esempio 13.2 Cosa si ottiene intersecando una sfera con un piano? E intersecando due sfere?

Esempio 13.3 Intersecando un angolo diedro con un piano si ottiene un angolo α la cui ampiezza varia a seconda delle mutue posizioni del diedro e del piano. Entro quali limiti può variare l'ampiezza di α?

Esempio 13.4 Quali tra i seguenti poligoni si possono ottenere come intersezione di un cubo con un piano?
- Un triangolo equilatero
- Un triangolo rettangolo
- Un rettangolo (che non sia un quadrato)
- Un pentagono
- Un esagono

Esempio 13.5 Descrivere tutte le possibili mutue posizioni di tre piani distinti, in termini di incidenza e parallelismo (classificazione affine).

Esempio 13.6 Calcolare il volume del tetraedro regolare di spigolo l.

Esempio 13.7 Individuare la posizione del punto P sull'altezza di un cono in modo che il piano passante per P e parallelo alla base del cono divida il cono in due solidi di uguale volume.

Esempio 13.8 Determinare l'equazione del piano parallelo al piano $3x - 4y + 5z = 0$ e passante per il punto $P = (1, -1, 0)$.

Esempio 13.9 Determinare le equazioni della retta perpendicolare al piano $3x-4y+5z = 0$ e passante per il punto $P = (1, -1, 0)$.

Esempio 13.10 Determinare l'equazione di un piano perpendicolare al piano $3x - 4y + 5z = 0$ e passante per il punto $P = (1, -1, 0)$.

Esempio 13.11 I due piani di equazione $x - 3y + 2z = 5$ e $x + y + z = 4$ sono perpendicolari? La loro retta intersezione r passa per il punto $P = (2, -2, 4)$? Scrivere le equazioni della retta parallela ad r e passante per l'origine.

Esempio 13.12 Disegna un solido che visto da sopra e di fronte appaia come in figura 13.a.

Esempio 13.13 Si consideri la proiezione parallela dello spazio tridimensionale, con coordinate (x, y, z) sul piano coordinato $z = 0$ secondo la direzione dell'asse z. In tale proiezione, esistono segmenti dello spazio la cui lunghezza resta invariata nella proiezione? E segmenti la cui lunghezza diminuisce nella proiezione? E segmenti la cui lunghezza aumenta nella proiezione? (In caso di risposta affermativa, si dia un esempio; in caso di risposta negativa, se ne dia una motivazione).

Figura 13.a

Esempio 13.14 Sia γ la curva ottenuta sezionando la sfera di centro l'origine e raggio 1 con il piano $z = y$. Qual è l'equazione della proiezione di γ sul piano coordinato $z = 0$ secondo la direzione dell'asse z ?

Esempio 13.15 Disegnare le superfici descritte in coordinate cilindriche dalle equazioni

$$r^2 = z - 1, \qquad r = z - 1, \qquad r = 2\cos\theta.$$

Esempio 13.16 Scrivere l'equazione della superficie che si ottiene ruotando la retta di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$$

attorno all'asse z.

Capitolo 14

Preliminari al Calcolo: processi di approssimazione e introduzione ai numeri reali

14.1 Motivazioni

Tutta l'Analisi è fondata su maggiorazioni, processi di approssimazione e limiti, e l'esistenza di questi limiti dipende dalla proprietà di continuità dei numeri reali. Attraverso opportuni procedimenti di approssimazione si introducono in particolare anche i concetti di derivata e integrale. Per trovare le funzioni derivate o le primitive si hanno però anche "regole" di calcolo, la cui potenza e semplicità d'uso può portare a mettere in ombra il significato e il ruolo dell'approssimazione e delle stime e a far risaltare soprattutto l'aspetto algebrico dell'Analisi Matematica. Si ritiene invece che questo aspetto debba accompagnarsi ad una solida padronanza almeno di alcuni esempi assai semplici di approssimazione, come quelli che sono appunto descritti nel mattoncino presente. Tali esempi sono anche l'ambito naturale nel quale gli studenti possono raggiungere una conoscenza intuitiva dei numeri reali e in particolare della proprietà di "continuità della retta" e della relazione di questa con l'esistenza dei limiti. Una definizione assiomatica dei numeri reali, che in particolare catturi la proprietà di continuità in qualche forma, può essere accompagnata a questi obiettivi ma si ritiene che non sia strettamente necessaria in questo stadio, e non è stata inclusa. La si trova invece nel blocco *Derivata*, nel sottogruppo *complementi e fondamenti teorici* .

14.2 Prerequisiti e collegamenti

Per iniziare ad acquisire le conoscenze indicate in questo mattoncino occorre saper calcolare con sicurezza nell'ambito dei numeri razionali, utilizzando la rappresentazione decimale e le frazioni, e con l'ausilio, quando opportuno, di una calcolatrice tascabile. Occorre inoltre saper rappresentare i numeri sulla retta e, per alcuni argomenti, bisogna avere qualche elemento di conoscenza del piano cartesiano e della rappresentazione dei grafici di semplici funzioni, in particolare dei polinomi di primo e secondo grado. Quindi è sufficiente una padronanza almeno parziale degli argomenti trattati in:

- *Potenze e radici, equazioni e disequazioni algebriche (blocco n. 2)*
- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*

anche se conoscenze più ampie consentono di considerare un maggior numero di esempi significativi, come indicato in alcune domande e problemi.
Moduli particolarmente correlati sono

- *Calcolo numerico esatto e approssimato, propagazione degli errori (blocco n. 8)*
- *Derivata (blocco n. 16)*
- *Integrale (blocco n. 17)*

Un corso di calcolo differenziale e integrale dovrebbe comprendere tutte le conoscenze indicate in questo blocco. Tali conoscenze hanno tuttavia una loro autonoma consistenza e si possono padroneggiare anche indipendentemente dal loro sviluppo nel calcolo differenziale e integrale.

14.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Approssimazione di soluzioni di equazioni	Conoscere una procedura, ad esempio per bisezione di intervalli, per approssimare $\sqrt{2}$ con due successioni a_n e b_n di approssimanti razionali, per difetto e per eccesso, tali che: (i) a_n è monotona crescente; (ii) b_n è monotona decrescente; (iii) $a_n < b_n$ per ogni n. Saper stimare l'errore $b_n - a_n$. Saper generalizzare l'algoritmo di bisezione alla soluzione di altre equazioni del tipo $f(x) = 0$. Saper descrivere l'algoritmo e saperlo realizzare con qualche strumento di calcolo automatico, ad esempio una calcolatrice grafico-simbolica o un foglio elettronico.
Approssimazione dell'area di un sottoinsieme del piano.	Dato un insieme disegnato su di un foglio quadrettato o con l'indicazione di una unità misura o una scala, saper stimare l'area dell'insieme, indicando un valore approssimato e valutando l'errore. Nel caso di un cerchio D, saper descrivere una procedura che consenta di costruire due successioni A_n e B_n di insiemi (ad esempio poligoni), la cui area sia facilmente calcolabile e tali che $A_n \subset A_{n+1} \subset D \subset B_{n+1} \subset B_n \quad \forall n$, $\mathrm{area}(B_n) - \mathrm{area}(A_n) \rightarrow 0$. Sapere che, in tale situazione, l'area del cerchio si può *definire* come: *quel numero* w *tale che* $\mathrm{area}(A_n) < w < \mathrm{area}(B_n)$ *per tutti gli* n.

(*continua*)

Pendenza di un grafico in un punto.	Saper stimare per eccesso e per difetto la pendenza della retta tangente al grafico di una funzione (in casi semplici), argomentando la procedura utilizzata.
La serie geometrica. Allineamenti decimali infiniti e numeri reali.	Sapere che, e sapere argomentare perché, la successione $1, 1 + 1/2, 1 + 1/2 + 1/4, ...$ converge a 2. Saper generalizzare il risultato alla “somma infinita” $1 + a + a^2 + a^3 + ...$ Sapere che ad ogni allineamento decimale infinito si associa un numero reale, che è anche il “limite” a cui tende la “somma infinita” associata. Avere un’idea di una procedura per fare operazioni (somma, prodotto, reciproco, potenza...) con due numeri reali dati come allineamenti decimali infiniti.

14.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **0.5** CREDITI .

14.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 14.1 Con una calcolatrice tascabile, ma usando solo il tasto della moltiplicazione, si dia una stima del numero $\sqrt[3]{2}$ con tre passi del metodo di bisezione, cominciando da $a_1 = 1$ e $b_1 = 1.5$.

Esempio 14.2 L’equazione $x^3 - 6\sqrt{x} = 1$ ha una e una sola radice compresa tra 2 e 3. (Perché?). Darne una stima utilizzando una calcolatrice tascabile. Descrivere un algoritmo iterativo che produca una successione di approssimanti di questa radice. Realizzare l’algoritmo utilizzando uno strumento di calcolo automatico disponibile.

Esempio 14.3 Trovare una soluzione dell’equazione $2^x = x + 3$, approssimando a meno di 0.01.

Esempio 14.4 Devo seminare il prato rappresentato nella pianta in figura 14.a sulla quale è segnata una griglia principale i cui quadrati hanno lato di 2 metri. Le sementi sono vendute in confezioni ciascuna sufficiente per la semina di $25\ m^2$ di prato. Qual è il minimo numero di confezioni che dovrò comperare per essere certo di seminare l’intero prato?

Esempio 14.5 Utilizzando un foglio di carta millimetrata e un compasso, dare graficamente una approssimazione di π e stimare l’errore.

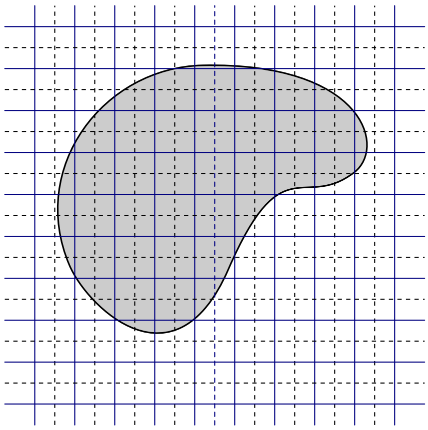


Figura 14.a Griglia ad elementi quadrati su un insieme bidimensionale

Esempio 14.6 Dare una stima della pendenza del grafico della funzione $f(x) = 1/x$ nel punto $(2, 1/2)$, valutando l'errore che si commette.

Esempio 14.7 Mostrare che la pendenza del grafico della funzione 2^x nel punto $(0, 1)$ è minore di 1, mentre la pendenza di 3^x nello stesso punto è maggiore di 1.

Esempio 14.8 Determinare una frazione uguale al numero decimale periodico $0.5\overline{7}$. [Lo studente deve scrivere il numero decimale come somma infinita e ricondursi ad una serie geometrica. Non è richiesto di ricordare formule a memoria e anzi si chiede di non farlo.]

Esempio 14.9 Calcolare la somma infinita:

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{5}{10000} + \cdots$$

Esempio 14.10 Descrivere procedure per calcolare $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ e $\pi^{\sqrt{2}}$ con una precisione assegnata.

Capitolo 15

Numeri complessi

15.1 Motivazioni

I numeri complessi sono nati per la risoluzione delle equazioni algebriche, ma le funzioni a valori complessi sono molto usate per lo studio delle equazioni differenziali e delle trasformate funzionali. Il formalismo dei vettori nel piano complesso è inoltre largamente utilizzato in elettronica ed elettrotecnica.
Scopo del blocco è l'acquisizione delle regole di calcolo nel campo complesso utilizzando le varie rappresentazioni possibili (algebrica, vettoriale, trigonometrica–polare).

15.2 Prerequisiti e collegamenti

Per poter apprendere gli argomenti trattati in questo blocco si deve prima avere una buona padronanza degli argomenti trattati in:

- *Potenze e radici, equazioni e disequazioni algebriche (blocco n. 2)*
- *Dalla trigonometria alle funzioni trigonometriche (blocco n. 10)*

15.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
L'equazione $x^2 = -1$ *e l'unità immaginaria* i. *I numeri complessi* $z = x + iy$, *dove* x *e* y *sono numeri reali. Rappresentazione*	Data la rappresentazione algebrica di z, essere in grado di scrivere quella polare e viceversa. Saper eseguire operazioni con i numeri complessi.

(*continua*)

dei numeri complessi nel piano cartesiano. Modulo e argomento; disuguaglianza triangolare. Rappresentazione in forma polare. Somma, prodotto, inverso, coniugato. Rappresentazione delle operazioni come trasformazioni di vettori nel piano. Equazioni nel campo complesso.	Saper risolvere equazioni algebriche in $\mathbb{C}$. Saper descrivere sottoinsiemi del piano mediante uguaglianze e disuguaglianze.
Formula di de Moivre, radici n–esime dei numeri complessi. Forma esponenziale di un numero complesso. Definizione di e^z e $\log z$.	Saper calcolare le radici n–esime di un numero complesso. Sapere che un polinomio di grado n ha n zeri complessi. Saper utilizzare, senza giustificarla, l'identità $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

15.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **0.5** CREDITI .

15.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 15.1 Calcolare $(1+i)^{17}$.

Esempio 15.2 Dati $z = 2+8i$ e $w = -1-i$, trovare $\mathrm{Arg}(z/w)$.

Esempio 15.3 Scrivere il numero complesso $\dfrac{i}{i^3\sqrt{3}+1}$ nella forma $x+iy$.

Esempio 15.4 Mostrare che valgono le identità

$$\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w} \qquad \overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w} \qquad w\bar{w} = |w|^2.$$

Esempio 15.5 Risolvere in $\mathbb{C}$ le equazioni

$$z^2+3iz+4=0 \qquad \bar{z} = 2/z+z.$$

Esempio 15.6 Calcolare le radici ottave di $(1-i)^{-1}$.

Esempio 15.7 Scomporre in fattori il polinomio x^4+1.

Esempio 15.8 Mostrare che la somma delle radici n–esime dell'unità è 0.

Esempio 15.9 Trovare il luogo dei punti z nel piano complesso tali che $|z| = |z-1|$

Esempio 15.10 È valida l'identità $\sqrt{zw} = \sqrt{z}\sqrt{w}$ se $z, w \in \mathbb{C}$?

Esempio 15.11 Rappresentare nel piano complesso gli insiemi

$$E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \qquad F = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z| \leqslant 2\} \qquad G = \{z+i : z \in E\}.$$

Esempio 15.12 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione $z^5 + 32 = 0$.

Esempio 15.13 Descrivere utilizzando opportune disuguaglianze con moduli e/o argomenti di numeri complessi gli insiemi rappresentati nella figura 15.a.

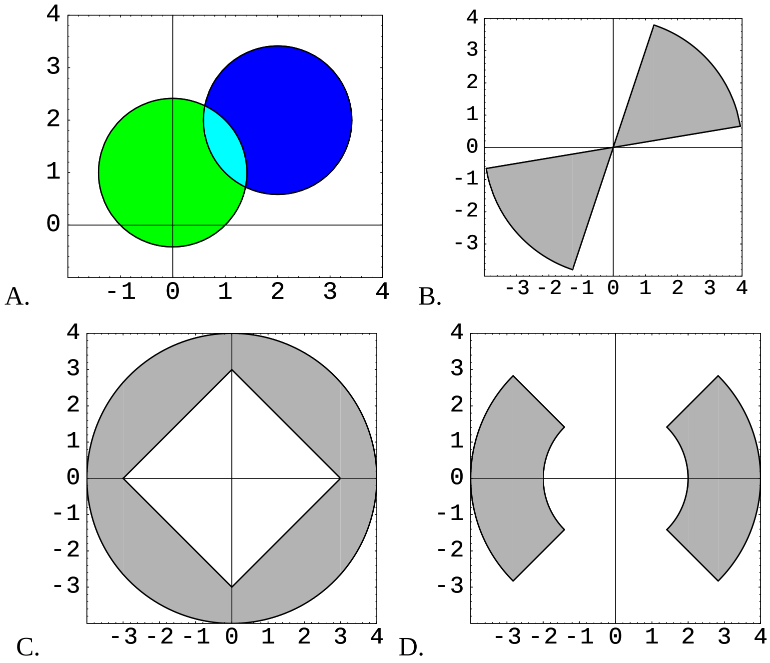


Figura 15.a Insiemi nel piano complesso

Esempio 15.14 Rappresentare nel piano complesso i punti O, P, Q corrispondenti ai numeri complessi 0, 1, e^i. Dire qual è l'ampiezza dell'angolo formato dalle semirette OP e OQ.

Capitolo 16

Derivata

16.1 Motivazioni

Il blocco “Derivata” comprende le conoscenze essenziali relative alla derivata e all’interpretazione di questo concetto in diversi contesti. La capacità di disegnare il grafico della funzione derivata e di “leggerlo” insieme al grafico della funzione è utile per l’interpretazione dei modelli, fa capire come la derivata di f possa essere utilizzata per ottenere informazioni sull’andamento del grafico di f e sui suoi punti di massimo e minimo, introduce alle equazioni differenziali. Una certa capacità di calcolare funzioni derivate è naturalmente necessaria e deve comprendere la capacità di usare tabelle e strumenti informatici di calcolo simbolico. A questo stadio, in particolare per gli studenti che non intendono approfondire successivamente lo studio dell’analisi, non si ritiene strettamente necessario richiedere una definizione rigorosa di limite. Si ritiene sufficiente che lo studente conosca alcune proprietà dei limiti, come la linearità e la monotonia, e sappia utilizzarle in semplici situazioni. Tali proprietà non sono però indicate come prerequisiti e si ritiene che sia sufficiente introdurle, illustrarle e giustificarle, almeno in qualche forma semplice, mentre si sviluppa la derivata. Per la capacità di modellizzare, e in particolare di utilizzare approssimazioni lineari di funzioni che descrivono situazioni concrete, si ritengono invece importanti, con le loro interpretazioni geometriche, ma senza dimostrazioni formali, il teorema del valor medio di Lagrange e la nozione di *differenziale* di una funzione in un punto x_0, intesa come approssimazione lineare dell’incremento della funzione. Le conoscenze fin qui indicate si ritiene siano strumenti indispensabili per qualunque laureato che debba saper interpretare descrizioni quantitative di fenomeni, nelle quali si utilizzano funzioni di una variabile reale. Naturalmente queste conoscenze non sono sufficienti per fondare sviluppi ulteriori, come ad esempio quelli che possono essere richiesti in qualsiasi laurea specialistica in ingegneria o in discipline scientifiche. Pertanto, se si vuole che il calcolo differenziale sia appreso anche come adeguato fondamento per ulteriori sviluppi, si ritiene molto opportuno, se non necessario, che le conoscenze indicate nel presente blocco siano sviluppate con una qualche maggiore attenzione alla definizione degli oggetti matematici e alla dimostrazione delle loro proprietà. A tal fine si è aggiunto un insieme ulteriore di conoscenze, indicate col nome di “complementi e fondamenti teorici”, che possono utilmente completare il primo gruppo dato.

16.2 Prerequisiti e collegamenti

Per cominciare ad *affrontare* i temi contenuti in questo blocco, occorre possedere una buona parte delle conoscenze indicate in:

- *Potenze e radici, equazioni e disequazioni algebriche (blocco n. 2)*
- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*

e queste conoscenze devono poi essere ulteriormente sviluppate e ben padroneggiate se si vuole arrivare ad una buona acquisizione degli obiettivi indicati nel presente blocco. Se poi si vuole una *completa padronanza* del blocco derivata, utilizzabile in contesti ed esempi significativi, nei tempi (crediti) previsti, occorre sviluppare, prima o contemporaneamente, almeno in qualche misura, anche le conoscenze e le capacità indicate in:

- *Calcolo numerico esatto e approssimato, propagazione degli errori (blocco n. 8)*
- *Dalla trigonometria alle funzioni trigonometriche (blocco n. 10)*
- *Progressioni aritmetiche e geometriche, funzione esponenziale e funzione logaritmo (blocco n. 11)*
- *Preliminari al calcolo: processi di approssimazione e numeri reali (blocco n. 14)*

Moduli particolarmente correlati sono

- *Integrale (blocco n. 17)*
- *Equazioni differenziali (blocco n. 20)*

16.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Retta tangente a un grafico e pendenza del grafico in un punto. Velocità. Rapporto incrementale	Utilizzando una nozione intuitiva di “retta tangente” al grafico di una funzione in un punto, saper descrivere una procedura di approssimazione della pendenza di tale retta come “limite” della pendenza di opportune rette secanti. Analogamente, saper de-

(*continua*)

di una funzione in un punto e sua interpretazione in diversi contesti. Derivata. Differenziale.	scrivere una procedura di approssimazione della "velocità istantanea" come "limite"della velocità media in opportuni intervalli di tempo di durata che tende a zero. Conoscere la definizione di "derivata" $\frac{df}{dx}(x_0)$ della funzione f in un punto x_0 come "limite" del rapporto incrementale $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ per $x \to x_0$, sapendo interpretare sul grafico della funzione i diversi elementi del rapporto incrementale stesso. Derivata destra e sinistra. Esempi di funzioni non derivabili in un punto. Saper scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di una funzione in un punto. Data una funzione f derivabile in x_0, saper leggere sul grafico la formula $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + E(x - x_0)$ e saperla interpretare.
Funzione derivata. Teorema del valor medio di Lagrange. Studio del grafico di una funzione conoscendo la derivata. Massimi e minimi. Derivata seconda. Convessità.	Distinguere fra "derivata" in un punto e funzione *derivata*. Dato il grafico di una funzione, saper tracciare qualitativamente, e in casi semplici esattamente, il grafico della funzione derivata (senza passare per una rappresentazione analitica). Saper "leggere" la coppia dei grafici di f e f', e utilizzare i due grafici per la descrizione e l'interpretazione di fenomeni naturali o socio-economici, ad esempio una legge oraria insieme al grafico della velocità, oppure una distribuzione cumulata insieme alla sua densità. Conoscere un enunciato del teorema di Lagrange e saperlo interpretare geometricamente. Dalla conoscenza della funzione derivata saper ricavare informazioni sull'andamento della funzione e sui punti di massimo e minimo. Conoscere la nozione di derivata seconda. Dalla derivata seconda saper ricavare informazioni elementari sulla derivata e poi sulla funzione (in particolare: convessità, carattere dei punti critici).
Formule di derivazione. Derivate di funzioni elementari. Loro significato in casi particolari e in diversi contesti.	Conoscere e saper applicare le formule per le derivate di somma, prodotto, quoziente, composizione di funzioni, funzione inversa. Saperle giustificare, riconducendole alle proprietà di linearità e di monotonia dei limiti. Sapere che si possono scrivere esplicitamente le funzioni derivate di molte funzioni elementari, ricordarne alcune e saperne trovare altre in un archivio di memoria. Conoscere argomentazioni che giustifichino alcune delle derivate delle funzioni elementari (a^x, $\log x$, x^α, $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$). Saper calcolare derivate con l'aiuto di strumenti informatici.

Complementi e fondamenti teorici: i numeri reali e le loro proprietà; nozione di limite di una successione e serie numeriche; nozioni di limite di una funzione e funzioni continue; proprietà globali delle funzioni continue; approssimazione locale di una funzione con un polinomio.

Conoscere la definizione di estremo superiore e sapere che l'esistenza dell'estremo superiore equivale all'esistenza del limite delle successioni monotone.
Saper enunciare la definizione di limite di una successione. Saper dimostrare alcune proprietà del limite. Conoscere diversi esempi di successioni convergenti e non convergenti, e un ordine di infinitesimi e di infiniti. Conoscere qualche esempio significativo di serie numeriche e di uso del criterio del confronto.
Saper enunciare la definizione di limite di una funzione (in un punto o all'infinito) e conoscere esempi di funzioni che hanno diversi comportamenti al limite. Conoscere e saper dimostrare qualche semplice proprietà locale, come ad esempio la permanenza del segno per le funzioni continue o la continuità delle funzioni derivabili.
Conoscere l'enunciato e avere un'idea della dimostrazione del teorema degli zeri e del teorema di Bolzano-Weierstrass. Saper dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange. Conoscere e saper dimostrare le relazioni fra la monotonia di una funzione e il segno della derivata in un intervallo.
Conoscere la formula di Taylor almeno al secondo ordine, con qualche stima del resto, per funzioni sufficientemente regolari, saperla interpretare e saperla utilizzare per riconoscere il carattere dei punti critici e per il calcolo di semplici limiti.

16.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **1.5– 2.5** CREDITI . La prima parte di questo blocco, esclusi i complementi e fondamenti teorici, richiede circa 1.5 crediti, se gli studenti hanno i prerequisiti indicati. Se si include la parte dei complementi e fondamenti occorrono invece circa 2.5 crediti.

16.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 16.1 Sul grafico della funzione $f(x) = x^2 + 1$ considerare i punti A e B tali che $x_A = -2$ e $x_B = -1$. Trovare la pendenza della retta che passa per A e B.

Esempio 16.2 Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $P_0 = (x_0, y_0)$ e avente pendenza uguale a $-1/2$.

Esempio 16.3 Mostrare che la pendenza del grafico della funzione 2^x nel punto $(0, 1)$ è minore di 1, mentre la pendenza di 3^x nello stesso punto è maggiore di 1. Utilizzando una calcolatrice tascabile, stabilire se la pendenza in $(0, 1)$ della funzione a^x, dove $a = 2.5$, è maggiore o minore di 1. E se $a = 2.7$?

Esempio 16.4 Calcolare la derivata delle funzioni $x^2 - 3x + 1$ e $1/x$ nel punto $x_0 = 2$, scrivendo il rapporto incrementale e trovandone il limite.

Esempio 16.5 Descrivere la funzione derivata della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-2, 0], \\ 0 & \text{se } x \in [0, 3]. \end{cases}$$

Tracciare il grafico di f, f' e f''.

Esempio 16.6 Tracciare il grafico della derivata $f'(x)$ della funzione f il cui grafico è disegnato in figura 16.a

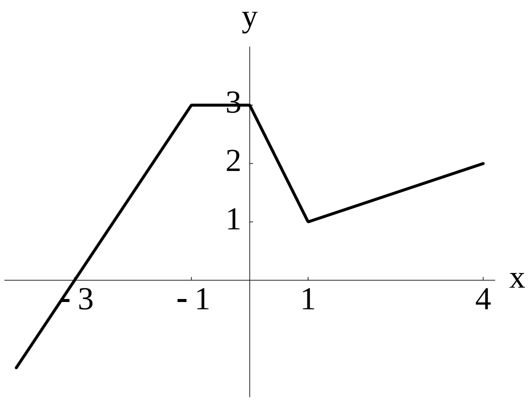


Figura 16.a Grafi co di f

Esempio 16.7 Disegnare il grafico di una funzione la cui pendenza sia sempre maggiore di 1.

Esempio 16.8 Nella figura 16.b è rappresentato il grafico di una funzione f. Determinare i valori per i quali $f'(x)$ è positiva, negativa, nulla.

Esempio 16.9 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione la cui derivata soddisfa le seguenti richieste:

a) $f'(x) < 0$ in $(-\infty, -3)$ ed in $(-3, 0)$
b) $f'(3) = 0$ e $f'(0) = 0$
c) $f'(x) > 0$ per $x > 0$

Disegnare un possibile grafico della funzione f.

Esempio 16.10 Calcolare la derivata delle funzioni

$$\frac{1}{1-x}; \qquad \sqrt{1+x^2}; \qquad |x|^{\frac{2}{3}}; \qquad e^{-x^2}; \qquad 10^x; \qquad xe^{-3x+1}.$$

Esempio 16.11 Calcolare la derivata delle funzioni

$$x \ln x; \qquad \ln \frac{f(x)}{x}; \qquad \sin(\omega t - \alpha); \qquad \cos^2 t; \qquad \tan^{-1} t.$$

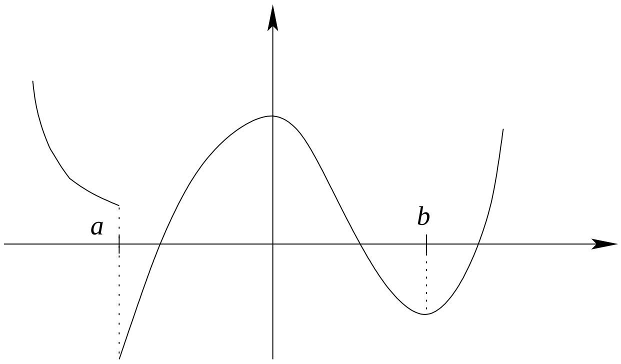


Figura 16.b Grafico di f

Esempio 16.12 Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e tangente al grafico della funzione e^x.

Esempio 16.13 Determinare i valori del parametro a per cui la funzione $f(x) = e^{ax}$ verifica la relazione $f''(x) + 4f'(x) - f(x) = 0$.

Esempio 16.14 Una scala lunga 13 metri è appoggiata ad una parete verticale. La base della scala si allontana dalla parete alla velocità di 20 cm/sec. A che velocità scende l'altra estremità, appoggiata alla parete?

Esempio 16.15 Trovare il valore massimo possibile per il volume di una scatola cilindrica, senza coperchio, tra tutte quelle che hanno una superficie di $40cm^2$.

Esempio 16.16 Calcolare massimo e minimo della funzione $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$ nell'intervallo $[0, +\infty)$.

Esempio 16.17 Disegnare qualitativamente il grafico della funzione e^{-4x^2+x}.

Esempio 16.18 Dire per quali valori di k l'equazione $x^3 - 5x = k$ ha esattamente una soluzione (reale).

Esempio 16.19 Sia x una variabile che indica la quantità di un certo prodotto di una azienda e sia $C(x)$ il costo necessario per produrre la quantità x. La quantità $C(x)/x$ è allora il *costo medio* di produzione, relativo alla quantità di prodotto x. Supponiamo che per un certo prodotto si abbia $C(x) = 2000+4x+0.03x^2$. Disegnare un grafico di $C(x)$ e dare un'interpretazione degli addendi che compaiono nella funzione. Dare un'interpretazione geometrica di $C(x)/x$ e disegnare il grafico. Trovare il valore di x per cui il costo medio è minimo. Mostrare in generale che nel punto x_0 in cui il costo medio è minimo si ha $C'(x_0) = C(x_0)/x_0$.

Esempio 16.20 Un serbatoio a forma di tronco di cono, con l'asse verticale e la base minore in basso, è alto 12 metri e ha i raggi delle basi di 1 metro e 2 metri. Il serbatoio, inizialmente vuoto, viene riempito con un flusso di liquido di 20 litri al secondo, a partire dall'istante t_0. Scrivere l'altezza del liquido in funzione del tempo e calcolare la rapidità di variazione dell'altezza del liquido nel serbatoio all'istante t. Confrontare tale rapidità di variazione così calcolata con la quantità $1/A(t)$, dove $A(t)$ è l'area della superficie del liquido al tempo t, e dare un'interpretazione del risultato ottenuto.

Esempio 16.21 Un'automobile ha percorso un tratto di autostrada secondo la legge oraria $s(t)$. Supponiamo che s sia una funzione derivabile; se in un intervallo di tempo di 100 secondi l'automobile ha percorso 4 chilometri, mostrare che vi è stato almeno un istante t in cui la sua velocità è stata di $144\,km/h$.

Esempio 16.22 Scrivere i polinomi di Taylor centrati in 0 delle funzioni $x \sin x$ e $1-e^{-x^2}$ e mostrare come si possono utilizzare per il calcolo del limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1 - e^{-x^2}}.$$

Capitolo 17

Integrale

17.1 Motivazioni

La nozione di integrale ha tradizionalmente due facce. Da un lato quella di "operazione inversa della derivata". Dall'altro quella di "integrale definito". Qui si è scelto di usare semplicemente la parola *integrale* per la seconda e di usare la parola *primitiva* per indicare la prima, anche al fine di consentire una migliore distinzione dei due aspetti e di apprezzare meglio la portata del Teorema fondamentale. Si pone una particolare attenzione all'interpretazione dell'integrale e delle sue proprietà in diversi contesti modellistici, poiché per molti utilizzatori è essenziale la capacità di usare l'integrale come linguaggio più che per il calcolo effettivo. L'accento sul calcolo delle primitive è ridotto (e si chiede però una minima capacità di usare strumenti informatici di calcolo simbolico). Si ritiene infine indispensabile saper usare l'integrale anche per il calcolo di aree e volumi di semplici insiemi e per funzioni illimitate o su intervalli illimitati.

17.2 Prerequisiti e collegamenti

Per cominciare l'acquisizione della nozione di integrale e delle sue prime proprietà, che già danno qualche capacità di modellizzare, occorre conoscere almeno in parte:

- *Potenze e radici, equazioni e disequazioni algebriche (blocco n. 2)*
- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*
- *Preliminari al calcolo: processi di approssimazione e numeri reali (blocco n. 14)*

Per affrontare poi il Teorema fondamentale del Calcolo e arrivare ad una conoscenza più completa, occorre buona parte di:

- *Derivata (blocco n. 16)*

Moduli particolarmente correlati sono:

- *Elementi di statistica descrittiva (blocco n. 6)*
- *Elementi di statistica inferenziale (blocco n. 19)*
- *Probabilità nel continuo (blocco n. 18)*
- *Equazioni differenziali (blocco n. 20)*

17.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Nozione elementare di integrale e sua interpretazione in diversi contesti.	Saper enunciare una definizione di integrale di una funzione su un intervallo, come limite di integrali di funzioni costanti a tratti, definiti elementarmente. In semplici situazioni, saper interpretare l'integrale come area di un sottografico, come spazio percorso da un punto mobile, come massa totale di una distribuzione di cui è nota la densità, oppure come numero totale di una popolazione di cui è nota la distribuzione di frequenza rispetto all'età. Saper dare un valore approssimato dell'integrale di una funzione, con qualche stima dell'errore, ad esempio per le funzioni monotone o in casi specifici. Sapere che l'integrale $\int_{[a,b]} f$ esiste certamente per le funzioni monotone limitate, i polinomi, le funzioni esponenziale e logaritmo, le funzioni trigonometriche e, in generale per una classe di funzioni, che si chiamano *continue* (è sufficiente una nozione intuitiva di funzione continua).
Linearità, monotonia, additività dell'integrale. Teorema della media integrale e sue interpretazioni.	Conoscere le proprietà dell'integrale, saperle interpretare, saperne dare qualche giustificazione e saperle usare per calcolare integrali e aree di semplici funzioni.
Funzione integrale. Teorema fondamentale del Calcolo.	Conoscere la definizione di *funzione integrale* F associata ad una funzione data f e saperne interpretare il significato a seconda dei contesti. Saper disegnare il grafico della funzione integrale di una semplice funzione lineare a tratti, senza passare per una rappresentazione analitica e senza usare il teorema fondamentale. Sempre in questo caso, saper mostrare che $F'(x) = f(x)$ in tutti i punti in cui f è continua. Conoscere un enunciato generale del Teorema fondamentale, nella forma di una condizione sufficiente affinché valga $F'(x) = f(x)$, sapendone argomentare la plausibilità.

(*continua*)

Funzioni primitive e calcolo di integrali	Sapere che una funzione che ha derivata sempre nulla in un intervallo è costante. Conoscere la nozione di "funzione primitiva" e saper utilizzare il Teorema Fondamentale per il calcolo di integrali di semplici funzioni. Conoscere le primitive delle funzioni x^α, e^{ax}. Saper trovare una primitiva per sostituzione, almeno nel caso in cui sia una applicazione immediata della derivata di una funzione composta. Comprendere una integrazione per parti. Saper trovare primitive di semplici funzioni, anche assistiti da tavole e da strumenti informatici.
Aree, volumi. Integrali di funzioni non limitate o su intervalli illimitati.	Saper utilizzare l'integrale per calcolare l'area di semplici insiemi nel piano. Conoscere il principio di Cavalieri e saperlo usare per calcolare il volume di semplici solidi (ad esempio di rotazione). Conoscere una nozione di integrale di funzioni non limitate o su intervalli illimitati.

17.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **2** CREDITI . Questo blocco richiede circa 2 crediti, se gli studenti possiedono i prerequisiti indicati. A seconda delle finalità è possibile ridurre alcuni aspetti e in tal caso può essere sufficiente circa 1 credito, ma in questo modo si compromette la possibilità di basare su questo blocco ulteriori sviluppi, ad esempio nella direzione del Calcolo differenziale e integrale in più variabili, o della probabilità nel continuo o delle equazioni differenziali.

17.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 17.1 Calcolare $\int_{[-1,3]} f$ per la funzione f il cui grafico è rappresentato in figura 17.a.

Esempio 17.2 Disegnare il grafico della funzione $2x + 1$. Utilizzando l'interpretazione dell'integrale come area (con segno) del sottografico e calcolando l'area di opportuni triangoli, determinare $\int_{[-2,3]} (2x + 1)$.

Esempio 17.3 Disegnare il grafico della funzione $\sqrt{4 - (x - 1)^2} + 1$. Utilizzando l'interpretazione dell'integrale come area (con segno) del sottografico, calcolare $\int_{[-1,3]} \left(\sqrt{4 - (x - 1)^2} + 1\right)$.

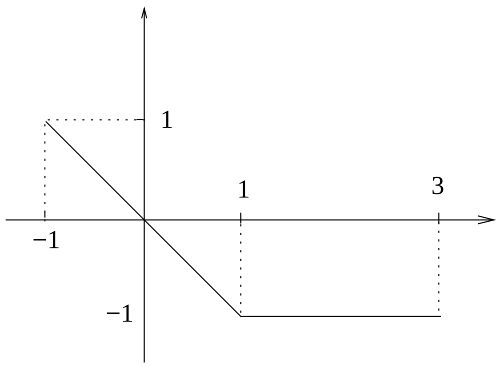


Figura 17.a Grafico di f

Esempio 17.4 Un'automobile accelera costantemente partendo da ferma e arrivando alla velocità di 100 km/h in 8.3 secondi. Poi prosegue a velocità costante per 10 secondi e infine decelera costantemente fermandosi 45 secondi dopo la partenza. Rappresentare graficamente la situazione e trovare lo spazio percorso. Rappresentare il risultato utilizzando la notazione di integrale.

Esempio 17.5 Sia $f(x) = e^{-x^2}$. Utilizzando una calcolatrice tascabile calcolare un valore approssimato per l'integrale della funzione f nell'intervallo $[0,1]$ con un errore non superiore a $1/10$.

Esempio 17.6 Si mostri con un controesempio che è falsa l'affermazione: se $\displaystyle\int_{[a,b]} f = k$, allora $\displaystyle\int_{[a,b]} f^2 = k^2$.

Esempio 17.7 Disegnare il grafico della funzione integrale $F(x) = \displaystyle\int_{[0,x]} f$ per la funzione f il cui grafico è indicato nella figura 17.b.

Esempio 17.8 In figura 17.c è rappresentato il grafico della funzione integrale di una funzione f. Disegnare il grafico della funzione f.

Esempio 17.9 Calcolare le primitive

$$\int \frac{1}{(r-r_0)^2} \qquad \int \sin x \cos x \qquad \int \frac{\log x}{\sqrt{x}}.$$

Esempio 17.10 Calcolare

$$\int_{(0,\pi)} \sin^2 x \qquad \int_{[-2,0]} \frac{1}{x^2+4x+6}.$$

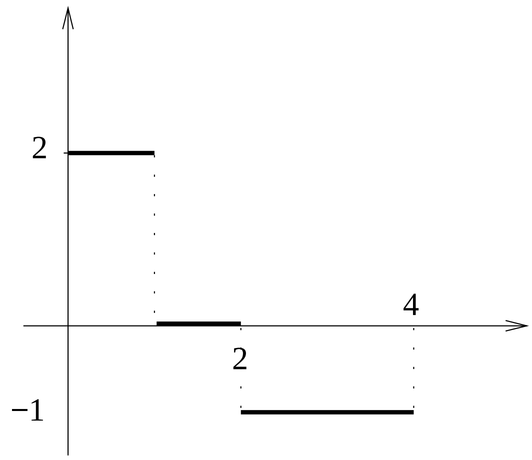


Figura 17.b Grafico di f

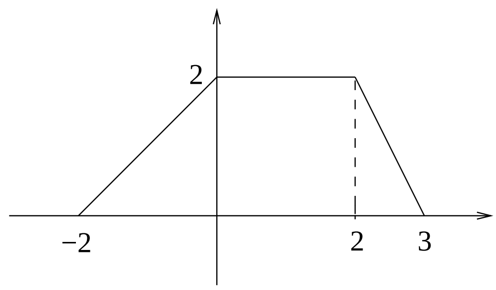


Figura 17.c Grafico della funzione integrale di una certa funzione f

Esempio 17.11 Calcolare

$$\int_{(0,+\infty)} xe^{-3x+1}.$$

Esempio 17.12 Sapendo che $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$, calcolare $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$.

Esempio 17.13 Dire quale dei seguenti integrali è uguale a $\displaystyle\int_{[1,4]} f(2x)$.

$$2\int_{[2,8]} f(x); \qquad 2\int_{[1/2,2]} f(x); \qquad \frac{1}{2}\int_{[2,8]} f(x); \qquad \int_{[1,4]} f(x)$$

Esempio 17.14 Calcolare l'area dell'insieme piano compreso fra le due parabole $y = x^2$ e $x = y^2$.

Esempio 17.15 Mostrare che il volume di una piramide è dato dalla formula

$$1/3 \cdot \text{altezza} \cdot \text{area della base}.$$

Esempio 17.16 Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare intorno all'asse x il grafico della funzione $f(x) = 1/x$ sull'intervallo $[1, 3]$.

Esempio 17.17 Per quali valori di a ha un valore finito l'area sotto il grafico della funzione $1/x^a$ nell'intervallo $[1, +\infty)$?

Esempio 17.18 Posto $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt$, con n intero positivo, mostrare che $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$.

Capitolo 18

Probabilità nel continuo

18.1 Motivazioni

I concetti e gli strumenti del Calcolo delle probabilità, insieme a quelli strettamente collegati dell'inferenza statistica, sono di grandissima e crescente importanza nella modellizzazione scientifica e sono destinati ad influenzare profondamente la matematica e la scienza dei prossimi decenni. In questo blocco sono raccolte le conoscenze e le abilità essenziali nell'ambito della probabilità, mentre l'inferenza statistica si trova in un altro apposito blocco. Nelle più diverse situazioni di molteplici ambiti disciplinari è richiesto di saper:

- riconoscere le possibilità di utilizzare modelli probabilistici e statistici continui, applicando nozioni basilari di Calcolo differenziale e integrale;
- usare modelli di approssimazione e di simulazione;
- effettuare stime di tipo inferenziale;

18.2 Prerequisiti e collegamenti

Per poter apprendere completamente gli argomenti trattati in questo blocco si deve avere una buona padronanza degli argomenti trattati in:

- *Probabilità nel discreto e calcolo combinatorio (blocco n. 7)*
- *Preliminari al calcolo: processi di approssimazione e numeri reali (blocco n. 14)*
- *Derivata (blocco n. 16)*
- *Integrale (blocco n. 17)*

Altri moduli particolarmente correlati sono:

- *Elementi di statistica descrittiva (blocco n. 6)*
- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*
- *Elementi di statistica inferenziale (blocco n. 19)*

18.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Variabili aleatorie continue. Densità e distribuzioni di probabilità come funzioni reali di variabile reale. Eventi impossibili ed eventi di probabilità nulla. Media e varianza di una variabile aleatoria continua. Densità del massimo, del minimo e della somma di due variabili aleatorie indipendenti. Vettori aleatori. Densità congiunta. Densità marginali.	Conoscere la differenza tra variabili aleatorie discrete e variabili aleatorie continue. Saper fornire esempi di esperienze il cui esito può essere descritto per mezzo di variabili aleatorie continue (tempo di attesa, tempo di vita). Conoscere la relazione tra la funzione di densità e la funzione di ripartizione di una distribuzione. Saper calcolare il valore atteso e la varianza di una variabile aleatoria continua e di una funzione elementare di una variabile aleatoria continua (ad esempio $E(X+3), \mathrm{Var}(X-4)$). Saper calcolare la densità, la distribuzione, la media e la varianza di funzioni di variabili aleatorie in casi semplici: massimo, minimo e somma di variabili aleatorie continue indipendenti. Saper utilizzare i concetti di densità congiunta e marginali per inferire sull'indipendenza di variabili aleatorie continue.
Alcune distribuzioni continue notevoli: uniforme, esponenziale, di Cauchy, gaussiana. Legge dei grandi numeri. Teorema del limite centrale.	Conoscere e saper applicare a situazioni concrete alcune distribuzioni continue notevoli (ad esempio la distribuzione uniforme, la distribuzione esponenziale, la distribuzione di Cauchy). Conoscere il significato e le proprietà della distribuzione normale (gaussiana), saperla applicare a situazioni concrete in diversi contesti. Saper utilizzare la legge dei grandi numeri per opportune successioni di variabili aleatorie. Conoscere il legame tra frequenza e probabilità. Conoscere il significato del teorema del limite centrale: saper utilizare la legge normale standard per ottenere adeguate approssimazioni numeriche di distribuzioni discrete o continue nel caso di prove ripetute. Saper trasformare una distribuzione normale generale nella distribuzione normale standard. Saper utilizzare le tavole numeriche della distribuzione normale.

18.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **2** CREDITI .

18.5 Esempi e problemi

Esempio 18.1 Se si lancia 300 volte una moneta perfetta, qual è la probabilità di avere 84 Teste?

Esempio 18.2 Quanti lanci di un dado perfetto si prevede di dover fare per avere la probabilità del 95% di avere almeno una volta 6?

Esempio 18.3 Si vendono pacchetti di zucchero ufficialmente da $500g$. In realtà, però, la quantità di zucchero in un pacchetto è distribuita normalmente con media $500g$ e deviazione standard $10g$. Qual è probabilità che il peso del pacchetto sia maggiore di $510g$?

Esempio 18.4 Se a, b sono due numeri reali uniformemente distribuiti in $[0, 10]$ qual è la probabilità che l'equazione $x^2 + ax + b = 0$ abbia due radici reali?

Esempio 18.5 Se X è una variabile aleatoria uniformemente distribuita in $[0, 6]$, cosa possiamo dire delle due valutazioni $\mathbb{P}(X \in [2, 4])$ e $\mathbb{P}(X \in [3, 5])$

Esempio 18.6 Per assumere nuovi dipendenti in una ditta di computer viene presentato un test con domande a risposta multipla. In base ad esperienze precedenti è noto che i punteggi che sono ottenuti dai candidati sono distribuiti con densità normale di media 100 e scarto quadratico 15. Per essere assunti bisogna acquisire un punteggio pari ad almeno 140 punti. Qual è la probabilità di essere assunti?

Esempio 18.7 Sia X una variabile aleatoria continua con densità di probabilità data da:

$$f(x) = \begin{cases} k(4x - 2x^2) & se \qquad x \in [0, 2] \\ 0 & se \qquad x \notin [0, 2] \end{cases}$$

Calcolare $\mathbb{P}(X > 1)$, dopo aver determinato k.

Esempio 18.8 La lunghezza del periodo di maternità di una donna è regolato da una distribuzione normale di media 270 (giorni) e varianza 100. Se il padre del nascituro è stato "assente da casa " dal $290-$simo giorno al $240-$ giorno prima della nascita, qual è la probabilità di una maternità particolarmente lunga (o particolarmente corta)?

Esempio 18.9 La probabilità che una persona sia allergica ad un vaccino è $\frac{1}{1000}$. Determinare la probabilità che su 2000 persone più di 2 siano allergiche al vaccino.

Esempio 18.10 (Maturità 1997) Supponiamo che un campione radioattivo contenga 2×10^{10} nuclidi ciascuno dei quali ha la probabilità $p = 10^{-10}$ di decadere in un secondo. Calcolare il numero atteso di decadimenti in un secondo e la probabilità di osservare più di 4 decadimenti in un secondo.

Esempio 18.11 Un componente elettronico è composto da due elementi in parallelo, entrambi aventi un tempo di rottura che segue una legge esponenziale di parametro $\alpha = 3$. Un secondo componente è invece composto da un elemento avente un tempo di rottura che segue una legge esponenziale di parametro $\beta = 2$. Quale dei due componenti ha il tempo medio di rottura maggiore? Qual è la probabilità che il primo componente sia ancora in funzione al tempo $t = 2$? Ed il secondo ?

Esempio 18.12 Si immagini di effettuare una serie di lanci di un dado fino a quando esce la faccia 4. Il numero di lanci effettuati viene detto "tempo di attesa" dell'evento in questione. Ripetere la determinazione dei tempi di attesa dello stesso evento (uscita della faccia 4) su una serie di 120 lanci e visualizzare i risultati ottenuti sotto forma di un istogramma.

Esempio 18.13 Siano X, Y, Z, W quattro variabili aleatorie gaussiane standard tra loro indipendenti. Qual è la $P(X + Y + W + Z \leq 0)$?

Esempio 18.14 Siano $X_1, X_2, X_3, ..., X_{100}$ variabili aleatorie gaussiane standard, tra loro indipendenti. Cosa si può dire della variabile aleatoria $\frac{(X_1+X_2+...+X_{100})-\sum E(x_i)}{\sqrt{\sum \sigma^2(X_i)}}$?

Capitolo 19

Elementi di Statistica Inferenziale

19.1 Motivazioni

L'Inferenza Statistica è la disciplina scientifica che si propone di ricostruire, in modo verosimile (cioè con una certa affidabilità), dai (pochi) risultati di una prova o esperimento, le caratteristiche della *popolazione* da cui i dati provengono. Della popolazione interessano alcuni aspetti o *caratteri* che possono essere quantitativi o qualitativi. Per ogni unità della popolazione è definita la modalità che assume il carattere oggetto di studio: se abbiamo a che fare con caratteri quantitativi si ha una funzione che viene detta variabile statistica (che, inizialmente, è del tutto simile ad una variabile aleatoria). La sua distribuzione *statistica* è allora assimilabile alla distribuzione di una variabile aleatoria discreta e ciò ci permette il *passaggio* dal *campione* alla popolazione, rispetto ad un carattere prefissato; tale momento che costituisce il processo di inferenza, contiene un aspetto di incertezza e si basa, come detto, sull'ipotesi che vi sarà analogia di comportamento tra ciò che si è osservato e ciò che è presente nella popolazione di riferimento. Ogni processo di inferenza, nonostante la complessità che può caratterizzare le singole situazioni (mutevolezza dei fenomeni, loro non ripetibilità ecc..), si struttura definendo accuratamente i seguenti punti:

- la popolazione di riferimento,
- la procedura di raccolta e selezione delle informazioni,
- la procedura per giungere dal risultato parziale (il campione) alla popolazione,
- la validità statistica della procedura usata.

19.2 Prerequisiti e collegamenti

Per poter apprendere gli argomenti trattati in questo blocco si deve prima avere una buona padronanza degli argomenti trattati in:

- *Elementi di statistica descrittiva (blocco n. 6)*
- *Probabilità nel discreto e calcolo combinatorio (blocco n. 7)*
- *Derivata (blocco n. 16)*
- *Integrale (blocco n. 17)*

- *Probabilità nel continuo (blocco n. 18)*

Questo blocco può essere utilmente affrontato dopo una buona preparazione di base di studi universitari. Si suppone che il materiale del modulo venga insegnato "privilegiando le tecniche di utilizzo", rinunciando quindi a ogni pretesa di rigore formale.

19.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Variabili statistiche e loro distribuzioni (χ^2, $\mathfrak{T}$ di Student, $\mathfrak{F}$ di Snedecor - Fisher).	Saper leggere ed utilizzare le tavole numeriche delle distribuzioni per il calcolo dei valori richiesti.
Stimatori e metodi di stima (puntuale, per intervalli).	Saper utilizzare il Metodo dei Momenti, quello dei Minimi Quadrati e quello della Massima Verosimiglianza per le stime dei parametri di una popolazione e per determinarne gli intervalli di confidenza.
Test di significatività (parametrici) per variabili statistiche unidimensionali e bidimensionali.	In base ad una ipotesi H_0 fatta, alla natura del campione casuale, alle modalità sperimentali e alle indicazioni fornite dall'analisi descrittiva, saper individuare la distribuzione di probabilità più verosimile per la variabile statistica sottoposta al test. Saper valutare l'errore di I tipo e di II tipo.

19.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **2** CREDITI . Come già detto in precedenza, questo blocco va inserito all'interno dell'insegnamento universitario e certamente *successivamente* ai blocchi ai quali è già stato fatto riferimento.

19.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 19.1 Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- La miglior stima puntuale per la media di una popolazione è la media campionaria
- Il valore della ordinata gaussiana standard corrispondente al 98% è dato da 1.96
- Un intervallo di confidenza del 90% per la media di una popolazione significa che c'è la probabilità del 90% che la media della popolazione sia contenuta nell'intervallo di confidenza.

Esempio 19.2 In occasione di un referendum si effettua un sondaggio su 1287 possibili elettori. Il 37% dichiara che non andrà a votare. Si determini un intervallo di confidenza del 95% per la percentuale di elettori che non andrà a votare.

Esempio 19.3 Il valor medio e la varianza di una serie di stipendi giornalieri sono rispettivamente (in euro) 74 e 144. Se un impiegato ne riceve 71, come si colloca, percentualmente, fra gli stipendiati dell'azienda?

Esempio 19.4 Un commerciante di televisori acquista 24 televisori a schermo piatto. Tre di essi risultano essere difettosi. Se si suppone che la distribuzione dei televisori della ditta ai commercianti sia casuale, si stimi, con il metodo della massima verosimiglianza, la probabilità che un televisore di quella partita sia difettoso.

Esempio 19.5 Durante una cerimonia religiosa è stato chiesto ai presenti se credevano all'esistenza degli angeli: 164 su 200 hanno risposto positivamente. Determinare gli estremi dell'intervallo di confidenza del 90% della proporzione corretta di coloro che credono nell'esistenza degli angeli.

Esempio 19.6 In un sondaggio telefonico di 5000 telefonate, alla domanda "Volete Roberto Baggio in nazionale?' si è ottenuto il 73% di risposte positive, con un margine di errore del 2.3%. Cosa fareste se foste il Commissario Tecnico della nazionale?

Esempio 19.7 Consideriamo un campione di $n = 16$ rocce per le quali il contenuto medio $\overline{x}$ di *Zr* (Zirconio) è risultato pari a 35 *ppm* con varianza campionaria $s^2 = 3.2$. Supponendo di conoscere la media μ della popolazione (da cui proviene il campione), determinare un intervallo di confidenza per σ^2.

Esempio 19.8 Tra gli spettatori di un concerto si prendono due campioni casuali di 100 e 110 spettatori e si ottengono rispettivamente 53 e 73 presenze di uomini.Qual è, al 95%, l'intervallo di confidenza per la differenza fra la popolazione delle donne e quella degli uomini?

Esempio 19.9 Poniamo di aver determinato il numero di batteri per volume unitario in $n = 10$ campioni di acqua prelevati da un lago; essendo

$$A = \{175, 190, 215, 198, 184, 207, 210, 193, 196, 180\},$$

i 10 valori misurati, si vuole verificare se il contenuto medio si trova al di sotto di un livello di sicurezza pari a 200, ovvero si vuole verificare l'ipotesi $H_0 : \mu = 200$ contro $H_1 : \mu < 200$ con un livello di confidenza del 99%.

Esempio 19.10 Poniamo di aver determinato il contenuto di *Ti* (Titanio), misurato in *ppm*, in due serie di campioni di rocce basaltiche provenienti da differenti contesti geologici, con rispettivamente $n_1 = 10$ ed $n_2 = 12$ unità; supponendo che le due popolazioni siano distribuite in modo Normale e avendo calcolato le rispettive varianze campionarie $s_1^2 = 15$ e $s_2^2 = 12$, si voglia verificare che i due insiemi di osservazioni sono fra loro omogenei rispetto alla variabilità del carattere in questione, cioè il contenuto medio di *Ti*, con un margine di errore del 5%.

Esempio 19.11 Consideriamo $n = 40$ valori relativi al contenuto percentuale di carbonato di Calcio ($CaCO_3$) di una serie di campioni di rocce sedimentarie per i quali l'analisi dei contenuti ha portato al valore $\overline{x} = 1.715$ con $s = 0.475$; supponendo che la popolazione di provenienza abbia distribuzione Normale, si voglia sottoporre a test l'ipotesi $H_0 : \mu = 1.9\%$ contro $H_1 : \mu \neq 1.9\%$ ad un livello di significatività del 95%.

Esempio 19.12 Prima di installare in uno studio una nuova linea telefonica si vuol calcolare la probabilità di trovare libera la linea già attivata. Si fanno 10 tentativi, che supponiamo indipendenti, e si hanno i seguenti risultati: $2, 7, 4, 1, 4, 9, 8, 5, 5, 2$. Quale legge di probabilità sembra la più opportuna da usare per afrontare questo problema? Ed usando la legge scelta, quale stima si ottiene, con il metodo della massima verosimiglianza?

Esempio 19.13 In una ricerca di carattere ambientale si vuole stimare la proporzione p di una popolazione (supposta distribuita in modo Normale) di campioni di acque che presentano problemi di inquinamento. Quanti campioni devono essere analizzati se si desidera essere certi al 98% che l'errore della stima è inferiore a 0.05 se non si hanno conoscenze sul valore di p?

Capitolo 20

Equazioni differenziali elementari

20.1 Motivazioni

Gli studenti di molti Corsi di Laurea si devono assai presto confrontare con fenomeni di natura dinamica e con il problema di darne una rappresentazione formale efficace, capace di fornire previsioni. A questo fine le equazioni differenziali costituiscono uno strumento molto importante e sono quindi un argomento matematico di cui è molto utile conoscere almeno i primi rudimenti.
Attraverso lo studio di semplici equazioni differenziali ordinarie, limitandosi ai soli processi unidimensionali, è poi possibile introdurre alcuni importanti esempi di sistemi dinamici in tempo continuo, che emergono in diversi ambiti disciplinari, e fornire i concetti e gli strumenti analitici essenziali per studiarne le proprietà.

20.2 Prerequisiti e collegamenti

Questo blocco di conoscenze dovrebbe essere affrontato da studenti che hanno già avuto un primo corso di "calcolo" e che hanno in generale una buona "maturità matematica". In particolare è necessaria una buona padronanza degli argomenti trattati in:

- *Funzioni e grafici elementari (blocco n. 5)*
- *Derivata (blocco n. 16)*
- *Integrale (blocco n. 17)*

ed è utile la conoscenza di almeno una parte di

- *Numeri complessi (blocco n. 15)*

20.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Equazioni differenziali a variabili separabili. Equazioni differenziali lineari del I ordine (autonome e no). Equazioni differenziali lineari del II ordine a coefficienti costanti.	Conoscere esempi di equazioni differenziali di vari tipi e il loro possibile significato nel contesto di diversi fenomeni naturali e sociali. Saper usare il metodo di separazione delle variabili. Saper risolvere semplici problemi di Cauchy e saper interpretare la soluzione e il suo comportamento in contesti significativi. Saper dire cos'è un'equazione differenziale lineare e saperla riconoscere. Conoscere l'operatore lineare associato a un'equazione e saperlo utilizzare per descrivere, anche con un liguaggio geometrico, le proprietà delle soluzioni dell'equazione, sia nel caso omogeneo sia nel caso non omogeneo. Essere in grado di determinare la soluzione generale di equazioni differenziali lineari del I ordine, sia nel caso di coefficienti costanti, sia nel caso di coefficienti variabili. Saper determinare la soluzione generale di un'equazione differenziale lineare del II ordine a coefficienti costanti, omogenea. Saper discutere comportamento asintotico e natura delle soluzioni al variare di uno o più parametri. Saper determinare soluzioni particolari, e quindi la soluzione generale, quando il termine noto è una funzione di alcuni tipi particolari. Saper trovare soluzioni che verficano specifiche condizioni iniziali o al contorno.
Equazioni differenziali del primo ordine in forma normale. Campi di vettori e curve integrali. Problema di Cauchy e condizioni di esistenza e unicità. Dipendenza continua dai dati. Approssimazione delle soluzioni.	Saper interpretare un'equazione differenziale del primo ordine in forma normale come problema di trovare le curve integrali di un campo di vettori. Conoscere condizioni sufficienti per l'esistenza e unicità delle soluzioni per il problema di Cauchy. Conoscere la nozione di "dipendenza continua dai dati" e la sua importanza ai fini delle applicazioni. Conoscere qualche metodo per la costruzione di approssimazioni delle soluzioni di un problema di Cauchy.
Sistemi di due equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti omogenee e classificazione delle morfologie dinamiche corrispondenti.	Saper risolvere un semplice sistema di due equazioni differenziali lineari del primo ordine riducendolo ad un'equazione del secondo ordine. Essere in grado di tracciare qualitativamente nel piano le traiettorie relative ad un sistema di due equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti costanti omogeneo.

20.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **2** CREDITI .
La parte di questo blocco che arriva fino alle equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti comprese richiede circa 1.5 crediti. Tutto il mattoncino richiede almeno 2 crediti, ma anche di più a seconda del grado di approfondimento dei contenuti teorici e della complessità dei problemi che si richiede di saper risolvere.

20.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 20.1 Si studino, al variare dei parametri reali a, b e k, le soluzioni del problema di Cauchy : $x' = ax + b$, condizione iniziale $x(0) = k$, determinandone il comportamento asintotico a $\pm\infty$ e l' intervallo massimale di definizione. Si traccino inoltre i grafici delle funzioni trovate.

Esempio 20.2
Si determini la soluzione generale delle equazioni differenziali lineari, a coefficienti non costanti

a) $x' = x/t$,
b) $x' = 2tx + (t^3 - 1)$
c) $x' = 3tx + e^t$

Esempio 20.3 Si studino le soluzioni del problema di Cauchy: $x' = x - x^2$, con la condizione iniziale $x(0) = k$, al variare del parametro reale k, determinandone in particolare comportamento asintotico e intervallo massimale di definizione. Si generalizzi l'analisi precedente al problema: $x' = ax + bx^2$, con la condizione iniziale $x(0) = k$, con coefficienti a e b numeri reali qualunque

Esempio 20.4 Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy relativi ad equazioni differenziali a variabili separabili :

a) $x' = (1 + x^2) \sin t$ con $x(0) = 1$
b) $x' = t(1 - x^2)/x$ con $x(1) = 1$
c) $x' = (1 + t)e^{-x}$ con $x(0) = 1$
d) $x' = e^t \cos^2 x$ con $x(1) = 1/4$

Esempio 20.5 Si determini la soluzione generale delle equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine:

a) $x'' - 5x' + 6x = 0$
b) $x'' - 2x' + 2x = 0$
c) $x'' + 2x' + x = 0$

Esempio 20.6 Si determini la soluzione generale delle equazioni differenziali lineari non omogenee del secondo ordine:

a) $x'' + 4x = \tan t$
b) $x'' + x' = \sin t$

c) $x'' - 5x' + 6x = 2e^t$
d) $x'' - 5x' + 6x = t^2 + 3$

Esempio 20.7 Si risolva il problema di Cauchy : $x'' + x' - 6x = 0$, condizione iniziale $x(0) = a, x'(0) = b$, determinando per quali valori dei parametri a e b il comportamento asintotico della soluzione tende a zero per $t \to +\infty$.

Esempio 20.8 Si studi al variare del parametro k l'equazione differenziale: $x'' + kx' + (1-k)x = 0$ determinando i valori di k per cui : $x_{n+1} = (6 + x_n)^{1/2}$ con condizione iniziale $x_0 = a$

Esempio 20.9 Si studi il comportamento asintotico del sistema dinamico lineare discreto: $x_{n+1} = ax_n + b$, con condizione iniziale $x_0 = k$, al variare dei parametri reali a, bek, mettendo in evidenza in particolare l'esistenza di punti fissi e di punti periodici ed il diverso comportamento delle traiettorie nei due casi: $a > 0$ e $a < 0$.

Esempio 20.10 Si determinino equilibri e punti periodici delle mappe seguenti, determinandone l'eventuale iperbolicità :

a) $f(x) = x - x^2$
b) $f(x) = -x^3$
c) $f(x) = (x^3 + x)/2$

Esempio 20.11 Sia f una funzione continua e strettamente monotona definita su tutta la retta reale. Si provi allora che il sistema dinamico discreto $x_{n+1} = f(x_n)$ non può ammettere punti periodici di periodo maggiore di 1, se la f è monotona crescente, nè maggiore di 2, se la f è monotona descrescente. Si dia inoltre l'esempio di una funzione f continua, strettamente monotona, definita su tutta la retta reale che ammette una orbita periodica di periodo 2 iperbolica.

Esempio 20.12 Si studi il comportamento asintotico della successione definita per ricorrenza: $x_{n+1} = (6 + x_n)^{1/2}$ con condizione iniziale $x_0 = a$, dove a è un numero reale positivo. Si generalizzi l'analisi al sistema dinamico discreto: $x_{n+1} = (K + x_n)^{1/2}$, con condizione iniziale $x_0 = a$, dove a e K sono numeri reali positivi.

Esempio 20.13 La successione di Fibonacci è definita per ricorrenza dalla legge di evoluzione : $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, con condizioni iniziali : $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Si verifichi che il comportamento asintotico della successione è divergente. Definito come a_n il numero reale x_{n+1}/x_n, si scriva la legge del moto relativa alla successione ricorrente a_n e se ne determini il comportamento asintotico. Si osservi che tale comportamento non varia se le condizioni iniziali della successione di Fibonacci sono sostituite dalle : $x_0 = a$, $x_1 = b$, con a e b numeri reali positivi e qualunque.

Capitolo 21

Modelli di Ricerca Operativa

21.1 Motivazioni

La Ricerca Operativa offre strumenti sia di modellizzazione che algoritmici di notevole importanza applicativa in diversi campi, dall'Economia, alle Scienze Biologiche, alla Chimica e Fisica, oltre che, naturalmente, all'Ingegneria. In molti campi è utile che uno studente

- sappia formulare un modello matematico di un problema riconducibile alla ricerca operativa con particolare riferimento ai modelli di programmazione matematica e, tra questi, ai modelli di programmazione lineare
- sappia riconoscere la struttura di un problema di programmazione matematica e sappia classificarlo
- sappia risolvere per via grafica un semplice problema di ottimizzazione in due variabili
- sappia utilizzare uno strumento software per formulare e risolvere semplici problemi di Ricerca Operativa

21.2 Prerequisiti e collegamenti

Per poter apprendere gli argomenti contenuti in questo blocco occorre possedere una buona padronanza degli argomenti trattati in:

- *Potenze e radici, equazioni e disequazioni algebriche (blocco n. 2)*
- *Coordinate e vettori (blocco n. 4)*
- *Geometria analitica piana (blocco n. 9)*
- *Spazi vettoriali e matrici (blocco n. 12)*

Altri argomenti correlati:

- *Calcolo numerico esatto e approssimato, propagazione degli errori (blocco n. 8)*
- *Probabilità nel continuo (blocco n. 18)*
- *Grafi e Reti (blocco n. 22)*

21.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Concetto di modello matematico: parametri, variabili di decisione, vincoli, obiettivo. Modelli elementari di Programmazione Lineare, di Programmazione Quadratica e di Programmazione Lineare Intera.	Saper riconoscere gli elementi che caratterizzano i problemi di decisione deterministici: parametri (o variabili esogene), variabili di decisione (incognite o variabili endogene). Saper formulare vincoli sotto forma di equazioni e/o disequazioni lineari. Saper formulare una funzione obiettivo. Conoscere esempi di modelli elementari di programmazione (della miscela (o dieta) ottimale, di pianificazione della produzione, di flusso su reti, di ottimizzazione del portafoglio). Dato un modello elementare di programmazione matematica, saperlo classificare come modello di programmazione lineare, quadratica, lineare intera, anche allo scopo di poterlo implementare e risolvere mediante un algoritmo specializzato.
Risoluzione grafica di modelli di programmazione lineare in due variabili.	Saper risolvere problemi di ottimizzazione lineare elementari utilizzando la rappresentazione grafica bi–dimensionale. Saper rappresentare graficamente l'insieme di soluzioni di un sistema di disequazioni lineari. Saper rappresentare graficamente le linee di livello di una funzione lineare in due variabili. Saper determinare una soluzione ottimale ad un problema di programmazione lineare in due variabili evidenziando in particolare la proprietà che una soluzione ottimale si trova su un vertice. Saper riconoscere esempi di problemi con un solo ottimo, problemi con infiniti ottimi, problemi illimitati. Saper visualizzare problemi elementari con funzione obiettivo illimitata inferiormente.
Risoluzione di semplici modelli di programmazione matematica mediante un foglio elettronico.	Saper utilizzare semplici algoritmi di ottimizzazione disponibili nella maggior parte dei fogli elettronici più diffusi. Sapere impostare un problema di ottimizzazione e saperlo risolvere mediante gli strumenti contenuti nel foglio elettronico. Saper leggere e interpretare la soluzione.

21.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **1** CREDITO .

21.5 Esempi di problemi, esercizi e domande.

Esempio 21.1 Giudicare se il seguente è un problema di programmazione lineare:

$$\begin{aligned} \min\ & x \\ x + 2y &\geq -1 \\ x - y &\leq 2 \\ x &\geq y \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

Esempio 21.2 Controllare se il seguente è un problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \max\ & x + y \\ x - 2y &\neq 0 \\ x + y &\leq 1 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Esempio 21.3 Formulare come problema di programmazione lineare il problema seguente:

$$\begin{aligned} \min\ & 2x - y \\ x - 2y &\in [-1, 1] \\ x + 2y &\leq 2 \\ x &\in [0, 1] \\ y &\in [0, x] \end{aligned}$$

Esempio 21.4 Utilizzando modelli di programmazione lineare, mostrare come sia possibile formulare il problema di decidere se la quantità

$$2x - y + w$$

ha sempre segno costante (in caso affermativo, determinare quale segno) nell'insieme definito dai vincoli

$$\begin{aligned} x + y + w &\leq 1 \\ x - 2y + w &\leq 2 \\ x + w &\geq 1 \\ x, y, w &\geq 0 \end{aligned}$$

Esempio 21.5 Formulare, come modello di programmazione lineare, il seguente problema identificando con chiarezza i dati (parametri), le variabili, i vincoli, l'obiettivo: determinare il tempo minimo necessario per completare la seguente ricetta:

A scaldare l'acqua (8')

B cuocere gli spaghetti (12’)
C grattugiare il formaggio (1’)
D preparare il soffritto (3’)
E preparare il sugo (4’)
F condire [1’]

sapendo che l’attività B non può iniziare prima del completamento di A, l’operazione E non può iniziare prima del completamento di D, F non può essere svolta se non sono terminate B, C, E.
Suggerimento: utilizzare come incognite il momento di inizio di ogni attività.

Esempio 21.6 Formulare, come modello di programmazione lineare intera, il seguente problema, identificando con chiarezza i dati (parametri), le variabili, i vincoli, l’obiettivo: si immagini di avere a disposizione un certo numero n di brani musicali in formato MP3; per ciascun brano siano dati la lunghezza (espressa in Megabyte) ed un indice numerico di gradimento. Avendo a disposizione un lettore MP3 in grado di contenere al massimo 512 Megabyte, formulare il problema di scelta dei brani da memorizzare con l’obiettivo di massimizzare l’indice di gradimento complessivo (somma degli indici associati a ciascun brano).

Esempio 21.7 Come cambierebbe il modello dell’esempio precedente se si volessero memorizzare tutti i brani sul *minimo* numero di CD?

Esempio 21.8 Se, nelle ore di messa in onda dei telegiornali di prima serata, gli ascolti medi dell’ultima settimana ed il prezzo di vendita (in migliaia di euro) per uno spot sono stati quelli riportati in tabella:

TG	TG 1	TG 2	TG 3	TG 5	STUDIO APERTO	TG 4	TG LA7
Audience	5940	1520	1124	5701	909	827	122
Prezzo	110	34	9	75	11	7	8

immaginando di voler investire un massimo di 110 mila euro formulare un modello che permetta, entro i limiti del budget previsto, di raggiungere la massima audience complessiva (ipotizzata costante nel prossimo futuro).

Esempio 21.9
Rappresentare e risolvere per via grafica il problema

$$\begin{aligned} \min_{x,y} \ & 2x - y \\ & x + y \geq 1 \\ & x - 2y \leq 0 \\ & x \leq 2 \\ & y \leq 2 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Esempio 21.10 Rappresentare e risolvere per via grafica il problema

$$\begin{aligned}\min_{x,y}\ & x - y\\ & -x + y \leq 1\\ & x - 2y \leq 1\\ & x \geq 0\\ & y \geq 0\end{aligned}$$

Esempio 21.11 Rappresentare graficamente il seguente problema:

$$\begin{aligned}\min_{x,y}\ & -x + y\\ & -x + y \leq 1\\ & x - 2y \leq 1\\ & x \geq 0\\ & y \geq 0\end{aligned}$$

e verificare che esso è illimitato inferiormente.

Esempio 21.12 Un editore ha previsto, per i prossimi 6 mesi, vendite di un nuovo romanzo rispettivamente per $10\,000$, $15\,000$, $30\,000$, $35\,000$, $25\,000$ e $10\,000$ unità. Attualmente dispone, in magazzino, di $5\,000$ libri finiti. In ogni periodo (mese) l'azienda può produrre al massimo $30\,000$ nuovi volumi; e la capacità massima del magazzino è di $10\,000$ pezzi (misurata alla fine di ciascun periodo, dopo aver effettuato le vendite previste per il periodo). Il costo di produzione per ciascuna unità prodotta nei diversi periodi è pari, rispettivamente, a 7.50, 7.55, 7.70, 7.80, 7.85, 7.95 euro; il costo di mantenimento in magazzino di un libro per un mese è stimato pari al 5% del costo di produzione relativo a tale mese. Il prezzo di vendita di ciascun volume è fissato in 10 euro. Determinare, utilizzando un foglio elettronico, il piano di produzione che permetta di massimizzare il guadagno nel periodo considerato. NB: utilizzando la maggior parte dei fogli elettronici, il problema può essere impostato mediante il menù “Strumenti”, alla voce “Risolutore”.

Capitolo 22

Grafi e Reti

22.1 Motivazioni

In moltissimi campi sono assai utilizzati i concetti di grafo e di rete. Le applicazioni sono le più varie, ad esempio nelle reti di telecomunicazioni, nelle reti informatiche, nelle reti di trasporto, nell'economia e nell'ottimizzazione combinatoria. I problemi su grafi e reti (cammini minimi, reti di distribuzione, grafi di sequenziamento, ...) portano inoltre a sviluppare algoritmi matematici importanti e a studiare i concetti annessi di correttezza, finitezza e complessità.

22.2 Prerequisiti e collegamenti

Per poter apprendere gli argomenti contenuti in questo blocco occorre possedere una buona padronanza degli argomenti trattati in:

- *Calcolo numerico esatto e approssimato, propagazione degli errori (blocco n. 8)*
- *Spazi vettoriali e matrici (blocco n. 12)*
- *Modelli di Ricerca Operativa (blocco n. 21)*

22.3 Contenuti e obiettivi

CONTENUTI	OBIETTIVI: CONOSCENZE E ABILITÀ
Nozione di massimo e di minimo in forma elementare. Concetto di rete, grafo,	Saper individuare la soluzione "migliore" secondo un criterio, in un insieme finito di scelte possibili.

(*continua*)

cammino, ciclo, albero, foglia. Problemi su reti: cammini minimi, assegnamenti di costo minimo, cicli hamiltoniani ed euleriani ottimi, caricamento ottimale, albero di copertura minimo, trasporto di costo minimo.	Conoscere esempi di problemi che possono avere una rete come modello matematico e saper ricondurre problemi reali a problemi su reti. Saper individuare nodi ed archi di una rete. Saper costruire semplici algoritmi matematici che risolvono problemi su reti.

22.4 Crediti

QUESTO BLOCCO EQUIVALE A CIRCA **1** CREDITO .

22.5 Esempi di problemi, esercizi e domande

Esempio 22.1 Un commesso viaggiatore deve mostrare i suoi prodotti in 6 città. Data la matrice simmetrica di distanze:

	1	2	3	4	5	6
1	0	12	11	16	22	19
2		0	10	15	27	8
3			0	7	22	12
4				0	16	11
5					0	24
6						0

Trovare il percorso di costo minimo totale tra quelli che toccano ogni città una ed una sola volta.

Esempio 22.2 Data la seguente matrice di distanze tra 6 città (ove il simbolo – corrisponde agli archi non presenti nel grafo):

	1	2	3	4	5	6
1	-	16	8	16	20	-
2	-	-	2	15	7	-
3	-	9	-	7	12	-
4	-	-	-	-	16	11
5	-	-	-	-	16	1
6	-	-	-	-	-	-

Trovare il percorso minimo dalla città 1 alla città 6.

Esempio 22.3 Supponiamo di voler collegare tra loro 6 città con una rete informatica costituita da tratti che congiungono a 2 a 2 le città. Data la matrice simmetrica di costi di costruzione di ogni tratto:

	1	2	3	4	5	6
1	0	12	11	16	22	19
2		0	10	15	27	8
3			0	7	22	12
4				0	16	11
5					0	24
6						0

Trovare la rete di minimo costo totale tra tutte quelle che potrebbero collegare le città.

Esempio 22.4 Supponiamo di dover assegnare 6 lavori a 6 persone (uno ed un solo lavoro ad ogni persona). Data la matrice di costi (costo sostenuto per assegnare il lavoro i alla persona j):

	1	2	3	4	5	6
1	14	12	21	16	22	19
2	13	16	20	15	27	18
3	15	21	17	17	22	16
4	15	19	19	15	16	18
5	18	21	21	18	19	24
6	21	23	25	25	27	26

Trovare l'assegnamento di costo minimo totale.

Esempio 22.5 Supponiamo di dover distribuire da alcuni magazzini merce ad alcune destinazioni. Supponiamo di avere la seguente matrice di costi unitari di trasporto dal magazzino i alla destinazione j:

	1	2	3	4	5
1	14	12	11	16	22
2	15	16	10	15	27
3	18	19	11	16	22

Supponendo che sia nota la capacità produttiva dei 3 magazzini (21,16,13) e che sia nota la richiesta delle 5 destinazioni (9,12,8,14,7), trovare il piano di trasporto di minimo costo totale.

Esempio 22.6 Supponiamo di avere k lavori da far svolgere a r persone ($k < r$); supponiamo che ogni lavoro possa essere svolto da almeno una persona e che ogni persona debba svolgere al più un lavoro. Trovare un algoritmo risolutivo che determini quale è il massimo numero di lavori eseguibili. Mostrare, preliminarmente, che la soluzione ottima non è, a priori, k.

Esempio 22.7 Dire se sono vere o false le seguenti affermazioni:

(1) In un grafo di n nodi un albero di copertura contiene $n - 1$ archi
(2) Ogni albero ha almeno una foglia.
(3) In un grafo connesso esiste sempre un ciclo hamiltoniano.

(4) In un grafo connesso esiste sempre un ciclo euleriano.
(5) In un grafo connesso esiste sempre un cammino che connette due nodi
(6) In un grafo connesso esiste sempre un cammino orientato che connette due nodi.
(7) Il cammino di costo minimo tra due nodi di un grafo non contiene mai l'arco di costo massimo
(8) Il cammino di costo minimo tra due nodi di un grafo contiene sempre l'arco di costo minimo.