Università degli Studi di Bologna - Dipartimento di Matematica

Master di II livello in Matematica per le Applicazioni

14. 3. 2003

1. Si consideri il seguente sistema di equazioni polinomiali:

$$\begin{cases} 16x^4 + y^2z^2 + z^2 = 16 \\ y^2z^2 - z^2 = 4 \\ x^2z = 1 \end{cases}$$

   a) Si dimostri che il sistema ha un numero finito di soluzioni in $\mathbb{C}$.

   b) Utilizzando il metodo di eliminazione, si determinino tutte le soluzioni del sistema in $\mathbb{Q}$.

2. Si consideri la superficie $\mathcal{S}$ di $\mathbb{R}^3$ data dalla seguente parametrizzazione razionale:

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{uv} + 1 \\ y = \dfrac{v-1}{u} \\ z = \dfrac{3-u^2}{uv} \end{cases}$$

   a) Si determini la più piccola varietà W di $\mathbb{R}^3$ contenente $\mathcal{S}$.

   b) Si stabilisca se $W = \mathcal{S}$, cioè se dato $P = (a, b, c) \in W$ è sempre possibile trovare $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tali che (u, v, a, b, c) soddisfino le equazioni date.

3. Si consideri un robot tridimensionale con tre bracci e due giunti di rotazione non planari. Il primo braccio è fisso, il primo giunto permette una rotazione del secondo braccio nel piano perpendicolare al primo braccio e il secondo giunto la rotazione del terzo braccio nel piano perpendicolare al secondo braccio.
   Si introducano tre sistemi di riferimento cartesiani destrorsi come segue. Il primo sistema (x_1, y_1, z_1) è fissato con l'origine nel giunto 1 e il braccio 1 sull'asse z_1. Allora il braccio 2 ruota nel piano (x_1, y_1). Il secondo sistema di coordinate (x_2, y_2, z_2) ha anche l'origine nel primo giunto con l'asse x_2 in direzione del braccio 2 e l'asse y_2 nel piano (x_1, y_1). Il terzo sistema di coordinate (x_3, y_3, z_3) con l'origine nel giunto 2 ha l'asse x_3 in direzione del braccio 3 e l'asse z_3 in direzione del braccio 2. Quindi il braccio 3 ruota nel piano (x_3, y_3) che è parallelo al piano (y_2, z_2).
   Infine si denotino con l_2, l_3 le lunghezze dei bracci $2, 3$ rispettivamente, con θ_2 l'angolo orientato che serve per ruotare in senso antiorario l'asse x_1 nell'asse x_2 e con θ_3 l'angolo orientato per ruotare in senso antiorario l'asse y_2 nell'asse x_3.

Il legame tra le coordinate di un punto nei sistemi 1 e 3 è:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_1c_2 & s_1s_2 & c_1 & c_1l_2 \\ c_1c_2 & -c_1s_2 & s_1 & s_1l_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove $c_i = \cos\theta_i$, $s_i = \sin\theta_i$, $i = 1, 2$ (si veda lezione del 7 marzo 2003).

a) Determinare le coordinate della mano (= punto finale del braccio 3) nel sistema di riferimento 3.

b) Data una posizione (x, y, z) della mano nel sistema 1, trovare un sistema di equazioni le cui soluzioni diano le possibili configurazioni dei giunti per le quali si ottiene tale posizione della mano.

c) Risolvere il sistema di b) calcolando con il computer una base di Gröbner ridotta per l'ideale generato dalle equazioni di b) nell'anello

$$\mathbb{Q}(l_2, l_3)[c_1, s_1, c_2, s_2, x, y, z]$$

rispetto all'ordine lessicografico $c_1 > s_1 > c_2 > s_2 > x > y > z$.

d) Sia ora $l_2 = 5$ e $l_3 = 12$. Decidere (senza o con l'uso del computer), se si può posizionare la mano nei seguenti punti:

$$(4, 3, 12), \quad (12, 3, 4), \quad (0, 0, 13)\,.$$

In caso affermativo dire con quanti posizionamenti dei giunti il punto è raggiungibile.

e) Descrivere geometricamente il luogo delle possibili posizioni della mano.