DIFFERENZIALE E SUO SIGNIFICATO GEOMETRICO

Sia $y = f(x)$ una funzione reale a variabile reale, derivabile nel punto x, indichiamo con Δx l'incremento arbitrario della variabile indipendente x; diamo allora la seguente

DEFINIZIONE: si chiama **DIFFERENZIALE** di una funzione $y = f(x)$ relativo al punto x e all'incremento Δx, il prodotto della derivata $f'(x)$ per l'incremento Δx.

Simbolicamente si indica con df(x) oppure dy:

$$(1) \qquad \boxed{df(x) = dy = f'(x)\,\Delta x}$$

Dalla definizione si ha che il differenziale dipende dal punto x (dove si calcola la derivata) e dall'incremento Δx.

Es. : $\mathbf{y = x^3}$ $\qquad$ $\mathbf{dy = 3x^2\,\Delta x}$

Se consideriamo la funzione $\mathbf{y = x}$ (funzione identità) si ha:

$$dy = dx = 1\,\Delta x \qquad \text{cioè} \qquad dx = \Delta x$$

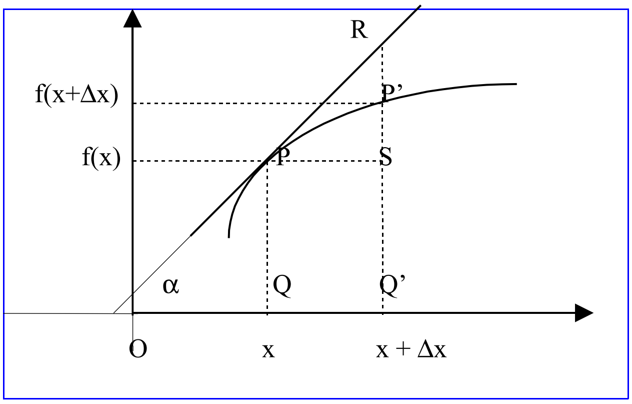
La definizione (1) si può allora riscrivere:

$$\boxed{df(x) = dy = f'(x)\,dx}$$

Interpretazione geometrica

Consideriamo una curva $y = f(x)$ e i punti:

P (x, f (x)) $\qquad$ **P'(x+Δx , f (x+Δx))**
S (x+Δx, f(x))



Nel triangolo **PSR** si ha $\mathbf{RS = PS \,tg\, \alpha = \Delta x\, f'(x)}$
($tg\,\alpha = f'(x)$ Significato geometrico e goniometrico di derivata)

Allora il segmento RS rappresenta il differenziale della funzione in x .

Si ha allora:
quando la variabile indipendente passa da x a $x+\Delta x$ la **funzione ha un incremento uguale alla lunghezza del segmento SP'** .
Se consideriamo l'incremento rispetto alla retta **tangente in P**, si ha che **tale incremento è proprio RS cioè il differenziale della funzione in x**.

Si dimostra che:

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$$

dove α tende a zero al tendere a zero dell'incremento.

Si ha $$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$$

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

In un punto "prossimo" a P si può calcolare il valore della funzione usando quest'ultima formula con un errore che tende a zero al tendere a zero di Δx (cioè in un punto "prossimo" a P si può calcolare il valore della funzione sulla retta tangente in P con un errore che tende a zero).

DIFFERENZIALI PARZIALI e DIFFERENZIALE TOTALE

Sia **$z = f(x,y)$** una funzione in due variabili definita in un dominio $D \subseteq R^2$ e supponiamo che in un punto P (x,y) esistano le derivate parziali prime $f'_x(x,y)$ e $f'_y(x,y)$.

Analogamente a quanto detto per le funzioni ad una variabile definiamo **DIFFERENZIALI PARZIALI PRIMI** i prodotti:

$$\boxed{f'_x(x,y)\,\Delta x \quad \text{e} \quad f'_y(x,y)\,\Delta y}$$

Si chiama **DIFFERENZIALE TOTALE** della funzione **$z = f(x,y)$** nel punto P(x,y) relativo agli incrementi la somma dei differenziali parziali:

$$d f(x,y) = f'_x(x,y)\,\Delta x + f'_y(x,y)\,\Delta y$$

Si dimostra, prendendo le funzioni **$z = x$** e **$z = y$** che **$\Delta x = dx$** e **$\Delta y = dy$** quindi si ha

$$\boxed{d f(x,y) = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy}$$

Si ha il seguente **TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE**:

Se in ogni punto interno ad un cerchio di centro P (x,y), la funzione possiede derivate parziali prime continue in P, allora, detto Q un punto di coordinate ($x+\Delta x$, $y+\Delta y$) appartenente al cerchio, sussiste la relazione:

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = f'_x(x,y)\,\Delta x + f'_y(x,y)\,\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$$

dove α e β sono due funzioni degli incrementi e tendono a zero al tendere a zero degli incrementi stessi.
Si ha quindi:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + f'_x(x,y)\,\Delta x + f'_y(x,y)\,\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \cong f(x,y) + f'_x(x,y)\,\Delta x + f'_y(x,y)\,\Delta y$$

Ciò significa che posso calcolare il valore della funzione in un punto prossimo a P sommando a $f(x,y)$ il valore del differenziale in P, commettendo un errore che sarà tanto più piccolo quanto più piccoli saranno gli incrementi Δx e Δy.