Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 26. 1. 2004

1. Trovare le derivate di

   a) $v(t) = 4t^3 + \dfrac{1}{t}$, b) $y = \cos(5x^2 + 3)$, c) $y = \dfrac{x}{e^x}$, d) $y = x^2 \cdot \ln x$.

2. Data la funzione $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$, $\quad x \neq 0$,

   (a) trovare i minimi e i massimi relativi;

   (b) determinare gli asintoti;

   (c) disegnare il grafico;

   (d) calcolare l'area della regione limitata dal grafico, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = 1$ e $x = e$.

3. Calcolare gli integrali: a) $\displaystyle\int_0^4 (\frac{1}{4}x + 1)^3\, dx$, b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$, c) $\displaystyle\int x \cos x\, dx$.

4. Secondo van der Waals lo stato di una mole di un gas reale può essere descritto tramite l'equazione

   $$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = RT\,,$$

   dove la costante $R = 8,31$ Nm/(mol $\cdot$ K) è uguale per tutti i gas, mentre le costanti positive a (in Nm^4/mol^2) e b (in m^3/mol) dipendono dal gas. Si consideri una trasformazione isoterma (T costante) e calcoli il lavoro L compiuto dal gas nel passare da un volume iniziale V_1 a un volume finale V_2, cioè l'integrale

   $$L = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\, dV\,.$$

5. Si consideri la funzione

   $$f(x, y) = x^3 - xy, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2\,.$$

   (a) Disegnare le curve di livello della funzione f per le quote -1, 0 e 1.

   (b) Determinare i punti stazionari della funzione f e classificarli, ossia dire se sono punti di massimo, minimo o punti di sella.

   (c) In quali direzioni la derivata direzionale della funzione f nel punto $(0, 1)$ si annulla e in quali direzioni essa assume il massimo e il minimo? Determinare il valore di tale massimo e minimo.