

1. Sissa Nassir inventò il gioco degli scacchi e lo donò al re di Persia, che manifestò la volontà di ricompensare il dono. Sissa domandò, modestamente, un chicco di riso per la prima casella della scacchiera, due per la seconda, per la terza il doppio dei chicchi della seconda, per la quarta il doppio della terza, e così via.
  - (a) Quanti chicchi di riso ottenne?
  - (b) Stimando in  $1/45$  di grammo il peso medio di un chicco di riso, esprimete il risultato di (a) in tonnellate e confrontatelo con la produzione mondiale di riso nel 2006, che è stata di 636 milioni di tonnellate.
2. Il cesio isotopo  $^{134}\text{Cs}$  è radioattivo e ha un tempo di dimezzamento (emivita, semiperiodo) di 2,0648 anni.
  - (a) Siano presenti inizialmente  $N_0$  atomi di  $^{134}\text{Cs}$ . Determinare la costante di decadimento  $\lambda$  (in  $\text{a}^{-1}$ ) in modo tale che il numero  $N$  degli atomi presenti dopo  $t$  anni sia approssimativamente  $N = N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ .
  - (b) Di quale percentuale si riduce una data quantità di  $^{134}\text{Cs}$  annualmente?
  - (c) Calcolare il tempo necessario affinché una data quantità di  $^{134}\text{Cs}$  si riduca a meno dell'1 % della quantità iniziale.
3. Il pH di una soluzione acquosa è stato definito da Sørensen come  $\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}_3\text{O}^+]$ , dove  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  indica la concentrazione (in  $\text{mol/l} = M$ ) di  $\text{H}_3\text{O}^+$ .
  - (a) 200 anni fa il pH delle acque marine era 8,3. Calcolare  $[\text{H}_3\text{O}^+]$ .
  - (b) Fino ad oggi  $[\text{H}_3\text{O}^+]$  delle acque marine è cresciuta del 26%. Calcolare l'attuale pH.
4. Determinare la parte reale e la parte immaginaria di tutte le radici delle seguenti equazioni: (a)  $z^2 - z - 6 = 0$ ; (b)  $z^2 + 6z + 13 = 0$ .
5. Dati i numeri complessi  $z_1 = i$  e  $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ , calcolate
  - (a)  $|z_1|$ ,  $|z_2|$ ,  $\arg(z_1)$ ,  $\arg(z_2)$ ;
  - (b)  $z_1 z_2$  e  $z_1/z_2$  sia in forma cartesiana  $a + bi$  che in forma polare  $re^{i\varphi}$ ;
  - (c) le tre radici cubiche di  $z_1$ .

Descrivete geometricamente l'applicazione  $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $z \mapsto z z_2$  e scrivetela in forma matriciale, cioè posto  $z = x + iy$  e  $z z_1 = \bar{x} + i\bar{y}$ , trovate una matrice  $A$  tale che  $(\bar{x}, \bar{y})^T = A(x, y)^T$ . Qual è l'applicazione inversa e qual è la matrice associata ad essa?

6. È noto che la distanza  $s$  percorsa da un corpo in caduta libera (senza attrito d'aria e con velocità iniziale 0) è  $s(t) = \frac{g}{2}t^2$ , dove  $t$  è il tempo e  $g \approx 9,81 \text{ ms}^{-2}$  è l'accelerazione di gravità. Supponiamo che un corpo venga lasciato cadere da una quota di 30 m. Calcolate:

- (a) il tempo di caduta, (b) la velocità finale, (c) la velocità media.
- (d) In quale istante la velocità del corpo è uguale alla velocità media?

7. Calcolate

- (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log(x+1) - \log x)$ ;
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log(x+1) - \log x)$ .

8. Dire se le seguenti serie sono convergenti e in caso di convergenza calcolarne la somma:

- (a)  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1}$ , (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ , (c)  $\sum_{k=0}^{\infty} (\log_{10} 9)^k$ .

9. Siano  $a, b, c \in \mathbf{R}$  costanti positive. Trovare i limiti della funzione logistica  $f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$  per  $t \rightarrow +\infty$  e per  $t \rightarrow -\infty$ .

10. Dati i tre punti  $A = (2, -1, 4)$ ,  $B = (3, -1, 6)$  e  $C = (1, 0, 4)$ , calcolare

- (a) i vettori  $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{b} := \overrightarrow{AC}$ ;
- (b) la distanza fra i punti  $A$  e  $B$ ;
- (c) il prodotto scalare di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ;
- (d) l'angolo  $BAC$  in gradi e in radianti;
- (e) il prodotto vettoriale di  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ ;
- (f) l'area del triangolo di vertici  $A, B, C$ .

11. Una cellula elementare di saccarosio cristallino ha la forma di un parallelepipedo di spigoli  $|\vec{a}| = 10,9 \text{ \AA}$ ,  $|\vec{b}| = 8,7 \text{ \AA}$  e  $|\vec{c}| = 7,8 \text{ \AA}$  ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ) e di angoli  $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ ,  $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = 102,9^\circ$ ,  $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$ . Calcolarne il volume (in  $\text{nm}^3$ ).