

1. Trovare le funzioni inverse (se esistono) delle seguenti funzioni:

(a)  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-3x}}$ , (b)  $f: \mathbf{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{2\}$ ,  $f(x) = \frac{2x + 3}{x - 2}$ ,

(c)  $f: \{x \in \mathbf{R} \mid x > -1\} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = \ln(1 + x)$ .

2. Il pH di una soluzione è stato definito da Sørensen come  $\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+]$ , dove  $[\text{H}^+]$  indica la concentrazione (in mol/dm<sup>3</sup>) di H<sup>+</sup>.

(a) Una soluzione abbia un pH di 5. Per quale pH la concentrazione di H<sup>+</sup> risulterebbe dieci volte minore? E per quale cento volte maggiore?

(b) Se  $[\text{H}^+] = 4 \times 10^{-6}$  mol/dm<sup>3</sup>, qual è il pH? Si usi che  $\log_{10} 2 = 0,30$ .

(c) Se il pH è stato determinato con una accuratezza di un decimo di pH, con quale errore percentuale si conosce  $[\text{H}^+]$ ?

3. Consideriamo una sostanza contenente  $N_0$  atomi radioattivi (al tempo  $t = 0$ ) e supponiamo che ci sia un solo genere di isotopo radioattivo. Indichi  $N$  il numero degli atomi radioattivi presenti nella sostanza al tempo  $t$ . È noto che  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ . Trovare il semiperiodo (tempo di dimezzamento) delle sostanze radioattive (a) <sup>131</sup>I, (b) <sup>18</sup>F le cui costanti  $\lambda$  di disintegrazione sono 0,086 d<sup>-1</sup> e 0,371 h<sup>-1</sup>, rispettivamente (d = giorno, h = ora).

4. Il CO<sub>2</sub> agisce come gas serra. Attualmente la concentrazione (riferita al volume) di CO<sub>2</sub> nell'atmosfera terrestre è circa dello 0,038% (o 380 ppm). Il Lawrence Livermore National Laboratory (USA) prevede annualmente un incremento dello 0,45%. Supponiamo che tale crescita percentuale duri nel tempo.

(a) Calcolare il tempo di raddoppiamento del contenuto di CO<sub>2</sub> nell'atmosfera terrestre.

(b) Quale sarebbe la concentrazione (in ppm) di CO<sub>2</sub> nel 2300?

5. Con l'aumentare della concentrazione CO<sub>2</sub> nell'atmosfera, aumenta la quantità di ioni bicarbonato presente nelle acque marine con conseguente abbassamento del pH.

(a) Attualmente il pH delle acque marine è 8,2. Calcolare  $[\text{H}^+]$ .

(b) 200 anni fa il pH delle acque marine era 8,3. Di quale percentuale è cresciuta  $[\text{H}^+]$  fino ad oggi?

6. Il logaritmo di Nepero  $y$  di un numero reale  $x$  ( $0 < x \leq 10^7$ ) è definito mediante

$$x = 10^7(1 - 10^{-7})^y.$$

Esplicitate la  $y$  in funzione della  $x$  e approssimate la  $y$  usando il logaritmo naturale.

7. (Facoltativo) Il più grande numero primo attualmente noto è  $p = 2^{43112609} - 1$ . Quante cifre decimali ha  $p$ ? Trovate la prima e l'ultima cifra di  $p$ .